

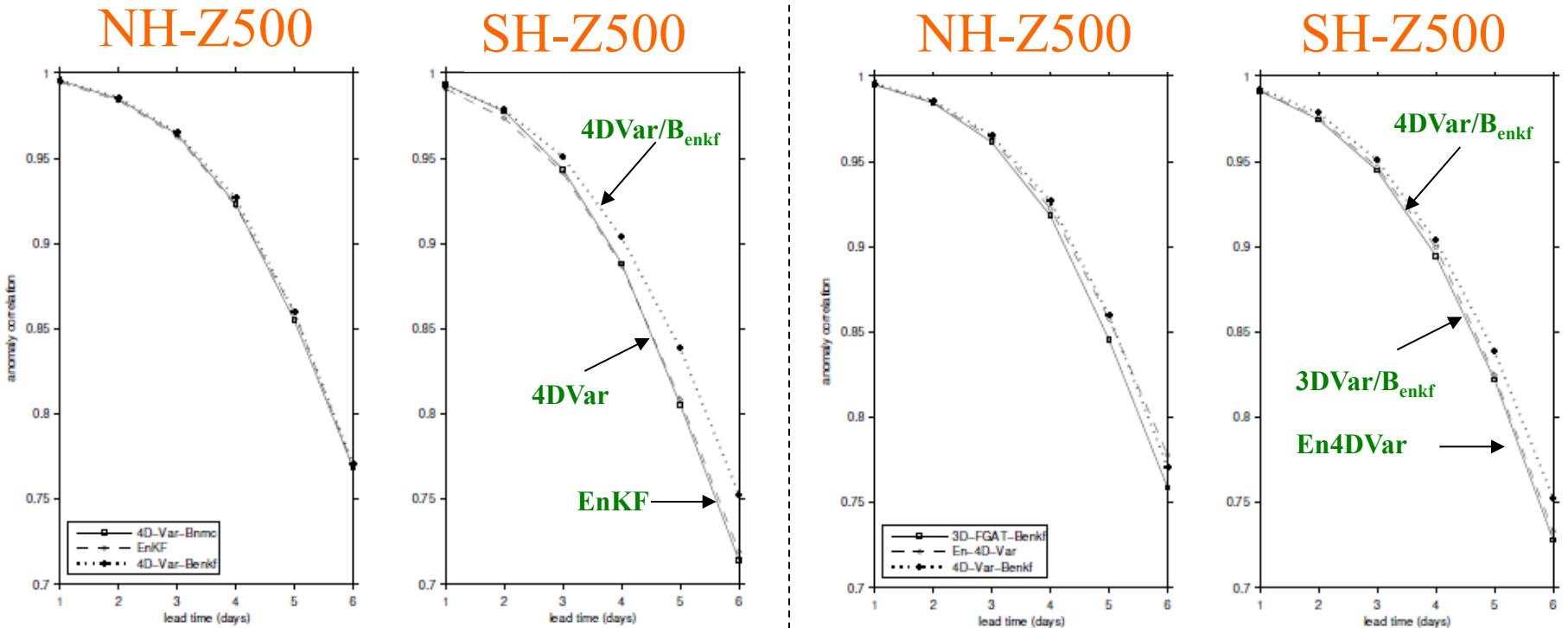
## 6. その他の話題

# データ同化法の比較(1)

	EnKF	4DVar
統計的推定法	線形最小分散推定	MAP推定
解析値	近似的な平均値	近似的なモード
時間発展	アンサンブル予報	決定論的予報
システム構築の手間	・サンプリングエラーやフィルタの発散などを抑えるためのチューニング	・数値モデルと観測演算子のアジョイントコードの作成 ・平均的な予測誤差共分散行列の設計
解析誤差共分散	自然に得られる	別途、要計算
非線形の影響	平均値でなくなる	最適値探索に困難

# データ同化法の比較(2)

カナダ気象局の全球モデル(400×200×58L):2007年2月



- EnKFと4DVarは同程度の精度。
- 4DVarや3DVarにEnKFで計算した $P^f$ を使う(ハイブリッド)と精度向上。
- En4DVarは、EnKFや4DVarとほぼ同程度の精度。

Buehner et al. (2010)

# データ同化法の課題

## 1. 非線形・非ガウス分布

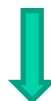
- データ同化における非線形の強さは、観測データの時空間密度と精度に依存。
- 非線形は非ガウス分布をもたらす。



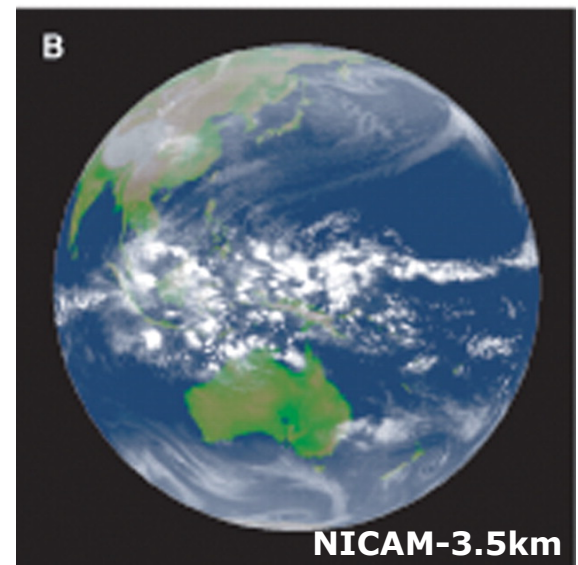
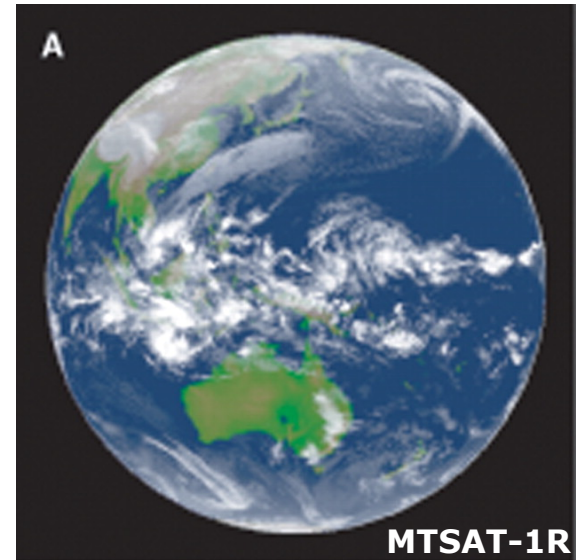
- EnKFと粒子フィルタハイブリッド
- Long window 弱拘束4DVar

## 2. マルチスケール・データ同化

- 大気海洋結合データ同化
- 全球雲解像データ同化



- 階層的アプローチ



# 観測データの影響評価(1)

個々の観測データの予測値への影響を感度解析で評価する。

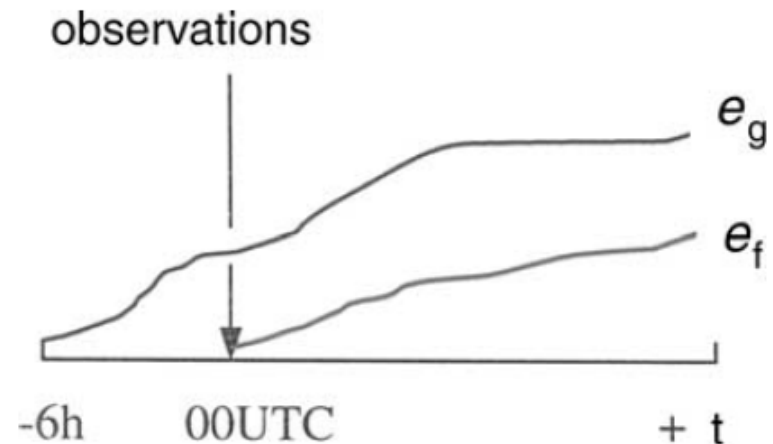
$\mathbf{x}^f$  : 時刻0 の解析値からの予測値

$\mathbf{x}^g$  : 時刻 $-T$  の解析値からの予測値。時刻0 のデータ同化における第一推定値(予測値)として使用。

$\Delta\mathbf{x}_t^f, \Delta\mathbf{x}_t^g$  : 時刻 $t$  におけるそれぞれの予測誤差

$\mathbf{W}$  : 予測値の二乗誤差に用いる重み行列(非負定値対称行列)

$$\begin{aligned}\Delta e_t &:= \frac{1}{2} (e_t^f - e_t^g) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\Delta\mathbf{x}_t^f)^\top \mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_t^f - (\Delta\mathbf{x}_t^g)^\top \mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_t^g \right] \\ &= \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{x}_t^f - \Delta\mathbf{x}_t^g)^\top \mathbf{W} (\Delta\mathbf{x}_t^f + \Delta\mathbf{x}_t^g) \\ &= (\mathbf{x}_t^f - \mathbf{x}_t^g)^\top \mathbf{W} \left[ \Delta\mathbf{x}_t^g + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_t^f - \mathbf{x}_t^g) \right]\end{aligned}$$



# 観測データの影響評価(2)

$\mathbf{M}_t$  : 数値モデルの時刻0 から時刻 $t$  への線形時間推進演算子

$$\mathbf{x}_t^f - \mathbf{x}_t^g \approx \mathbf{M}_t (\mathbf{x}_0^f - \mathbf{x}_0^g)$$

$\mathbf{K}_0$  : 時刻0 におけるカルマンゲイン

$\mathbf{y}_0, \mathbf{R}_0$  : 時刻0 における観測データと観測誤差共分散行列

$H_0, \mathbf{H}_0$  : 時刻0 における観測演算子とその線形演算子

$$\mathbf{x}_0^f = \mathbf{x}_0^a = \mathbf{x}_0^g + \mathbf{K}_0 (\mathbf{y}_0 - H_0(\mathbf{x}_0^g))$$

これらを代入すると

$$\Delta e_t \approx \mathbf{d}_0^T \mathbf{K}_0^T \mathbf{M}_t^T \mathbf{W} \left( \Delta \mathbf{x}_t^g + \frac{1}{2} \mathbf{M}_t \mathbf{K}_0 \mathbf{d}_0 \right)$$

$$\mathbf{d}_0 := \mathbf{y}_0 - H_0(\mathbf{x}_0^g)$$

したがって

$$\frac{\partial \Delta e_t}{\partial \mathbf{d}_0} \approx \mathbf{K}_0^T \mathbf{M}_t^T \mathbf{W} (\Delta \mathbf{x}_t^g + \mathbf{M}_t \mathbf{K}_0 \mathbf{d}_0)$$

# 観測データの影響評価(3)

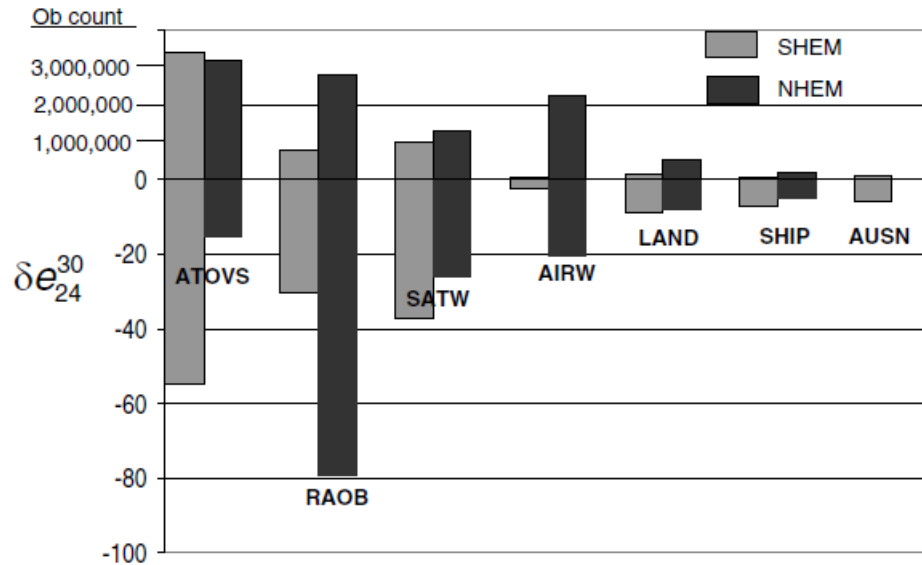


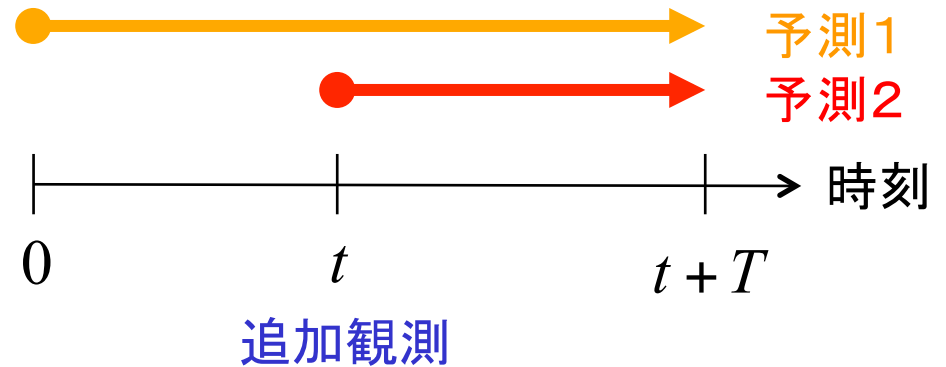
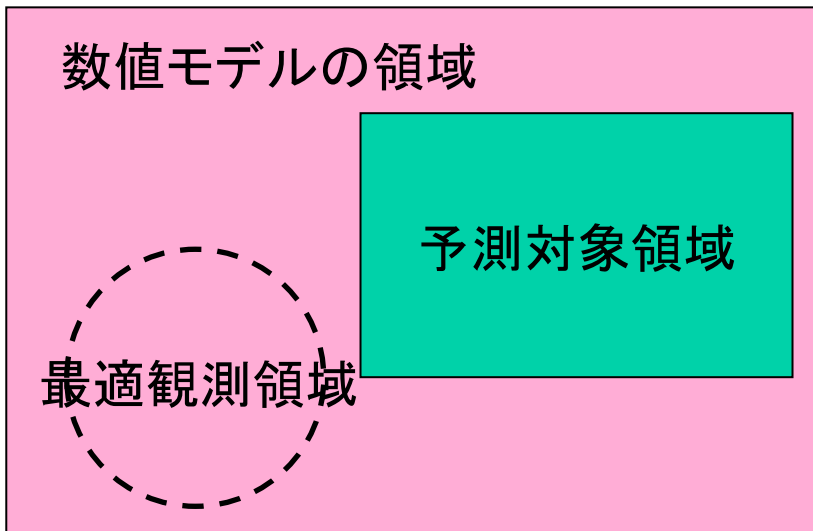
Fig 4. Summed observation impact ( $\delta e_{24}^{30}$ ,  $J kg^{-1}$ ) for Southern and Northern Hemispheres, partitioned by instrument type. Results combine June and December 2002. Includes all observations assimilated in NAVDAS at 00UTC as in Fig. 3.

Table 1. Mean observation impact ( $\delta e_{24}^{30}$ ,  $J kg^{-1}$ ), total number of observations assimilated by NAVDAS at 00UTC for the month of December 2002, and types of observation data provided

Ob type	Mean impact (per observation)	Number of observations	Variables
ATOVS	-0.9208	3 532 889	$T$ (retrievals, super-ob, $\sim 33$ levels)
Rawinsonde	-3.3018	1 763 768	$T, u, v, q$ (mandatory and significant levels), sea level pressure (assimilated as height)
Satellite wind	-2.7698	1 221 972	$u, v$ (VIS, IR, WV, 500–800 hPa not assimilated)
Aircraft	-1.1612	1 203 855	$T, u, v$ (flight level, ascent and descent)
Land surface	-2.3903	333 321	$z, T, q$
Ship and buoy	-6.2101	101 982	$z, T, u, v, q$ (ship only)
Australian synthetic pressure	-31.12	7 601	Sea level pressure (assimilated as height)

# 機動的観測(1)

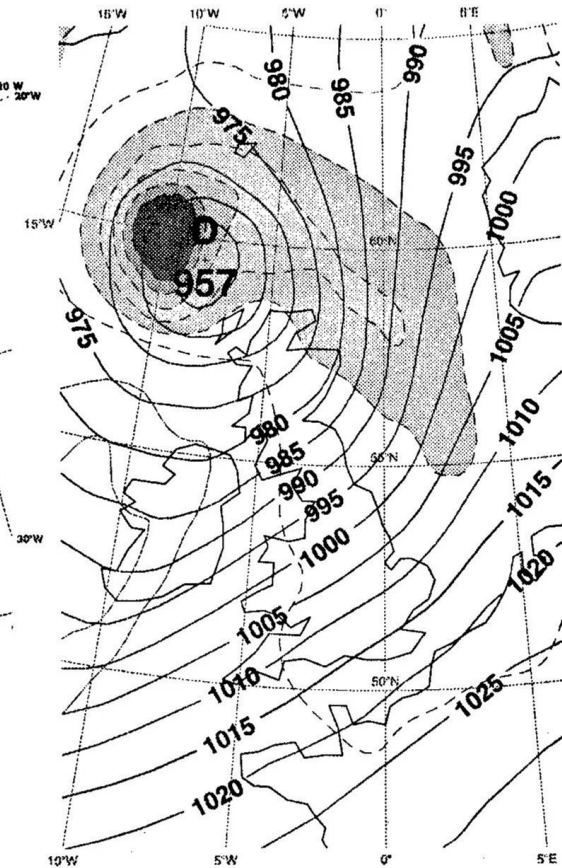
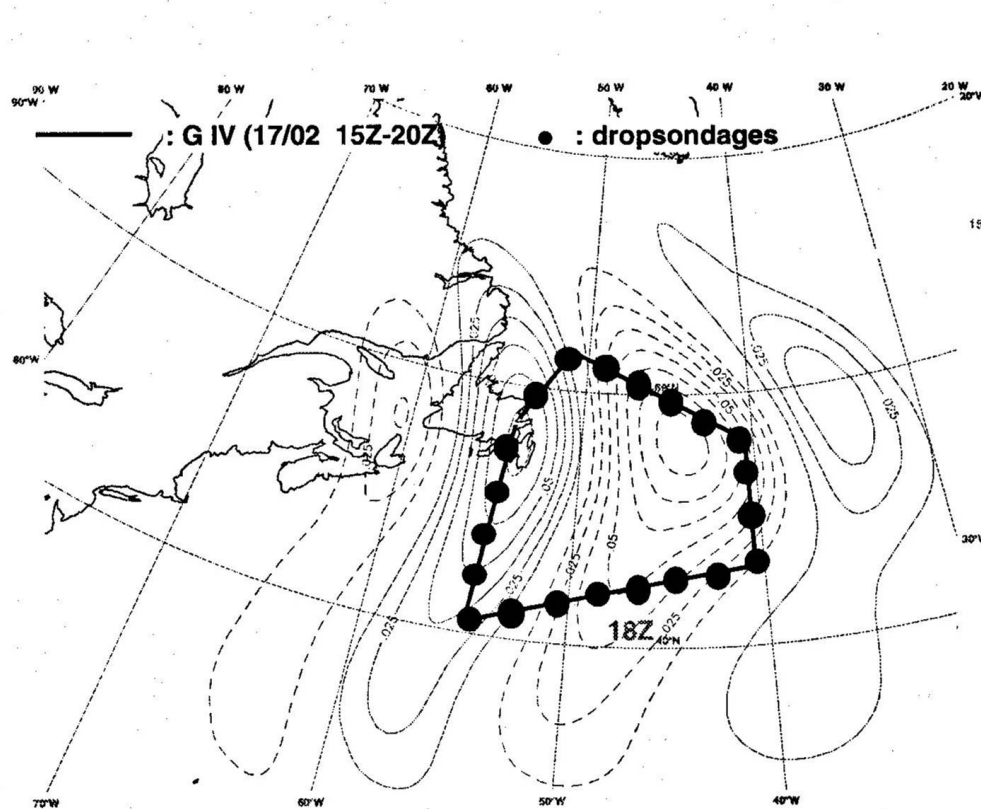
1. 時刻  $0$  を初期値とする予測値(予測1)から、時刻  $t + T$  の予測対象領域に対して、時刻  $t$  における最適観測領域を推定。
2. 従来観測に加えて、時刻  $t$  に最適観測領域で追加観測を実施。
3. それらの観測データを同化して時刻  $t$  の初期値を作成し、時刻  $t + T$  の予測を行う(予測2)。





# 機動的観測(2)

FASTEX:前線と大西洋ストームトラック実験(1997年冬)

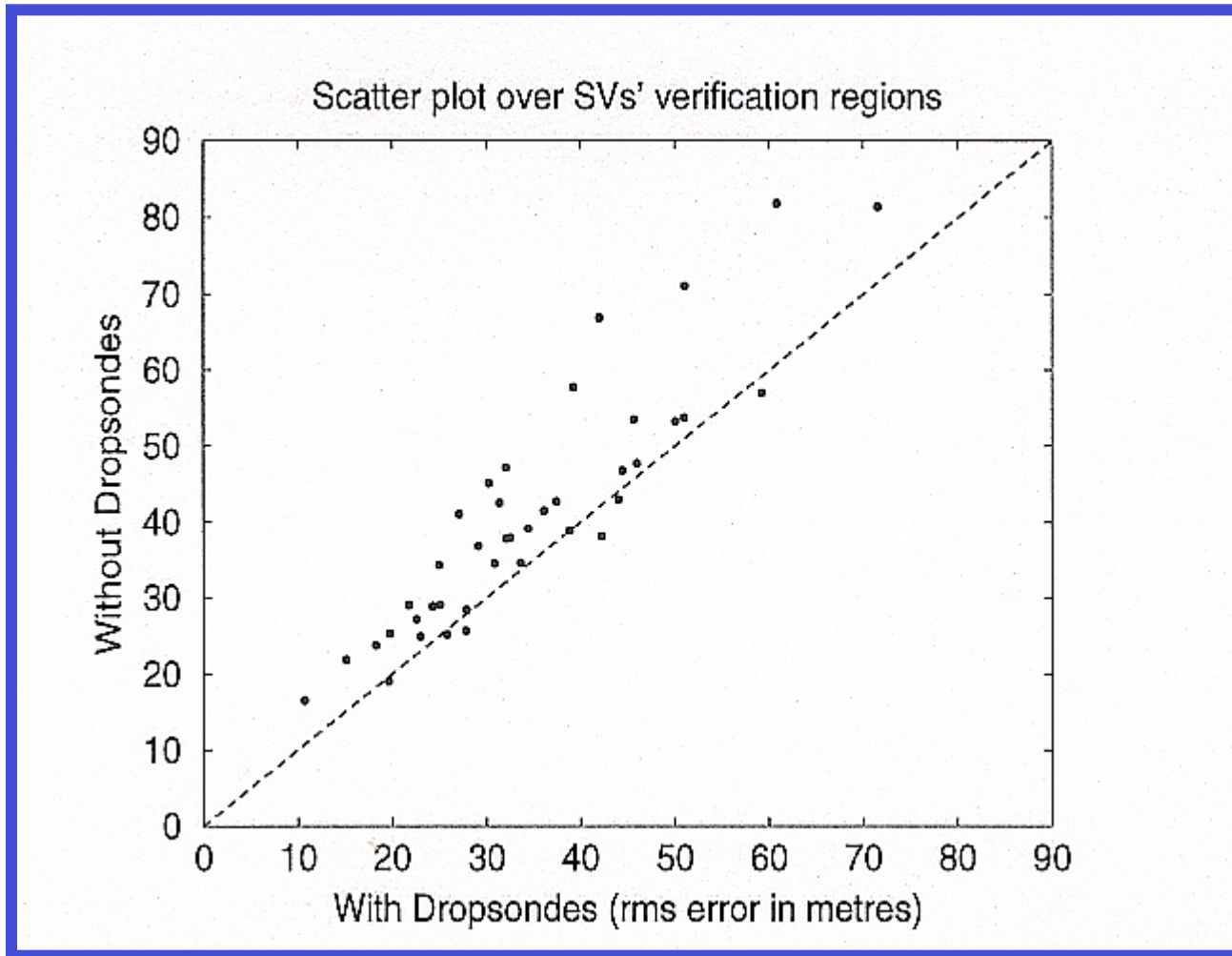


数値モデルによる右特異ベクトルの分布  
(評価期間:2月17日18UTC~19日12UTC)

(Joly et al, 1999)

# 機動的観測(3)

追加したドロップゾンデ観測の予測精度への効果



(Shapiro and Thorpe, 2002)

# 追加観測データの効果(1)

時刻  $t$  において

$\mathbf{y}_t, \mathbf{R}_t$  : 追加観測データとその観測誤差共分散行列

$H_t, \mathbf{H}_t$  : 追加観測データの観測演算子とその線形演算子

$\tilde{\mathbf{x}}_t^a, \tilde{\mathbf{P}}_t^a$  : 従来観測データのみを同化した場合の解析値と解析誤差共分行列

$\mathbf{x}_t^a, \mathbf{P}_t^a$  : 追加観測データも同化した場合の解析値と解析誤差共分散行列

観測データを逐次的に同化すると

$$\mathbf{x}_t^a = \tilde{\mathbf{x}}_t^a + \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \left( \mathbf{y}_t - H_t(\tilde{\mathbf{x}}_t^a) \right)$$

$$\mathbf{P}_t^a = \tilde{\mathbf{P}}_t^a - \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a$$

# 追加観測データの効果(2)

時刻  $t + T$  において

$\mathbf{M}_{t+T}$  : 数値モデルの時刻  $t$  から  $t + T$  への線形時間推進演算子

$\mathbf{Q}_{t+T}$  : 数値モデルのランダム誤差の共分散行列

$\tilde{\mathbf{P}}_{t+T}^f$  : 従来観測データのみを同化した場合の予測誤差共分散行列

$\mathbf{P}_{t+T}^f$  : 追加観測データも同化した場合の予測値と予測誤差共分散行列

その時刻の予測誤差共分散行列を計算すると

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{t+T}^f &\approx \mathbf{M}_{t+T} \mathbf{P}_t^a \mathbf{M}_{t+T}^T + \mathbf{Q}_{t+T} \\ &= \mathbf{M}_{t+T} \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{M}_{t+T}^T \\ &\quad - \mathbf{M}_{t+T} \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{M}_{t+T}^T + \mathbf{Q}_{t+T} \\ &= \tilde{\mathbf{P}}_{t+T}^f - \mathbf{M}_{t+T} \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{M}_{t+T}^T\end{aligned}$$

# 追加観測データの効果(3)

時刻  $t + T$  において

$\mathbf{x}_{t+T}^f$  : 追加観測データも同化した場合の予測値

$\mathbf{x}_{t+T}$  : 状態変数の真値

$\tilde{e}_{t+T}^f$  : 従来観測データのみを同化した場合の二乗誤差の期待値

$e_{t+T}^f$  : 追加観測データも同化した場合の二乗誤差の期待値

$$\begin{aligned} e_{t+T} &= \left\langle \left( \mathbf{x}_{t+T}^f - \mathbf{x}_{t+T} \right)^T \mathbf{W} \left( \mathbf{x}_{t+T}^f - \mathbf{x}_{t+T} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \text{Tr} \left[ \left( \mathbf{x}_{t+T}^f - \mathbf{x}_{t+T} \right)^T \mathbf{W} \left( \mathbf{x}_{t+T}^f - \mathbf{x}_{t+T} \right) \right] \right\rangle \\ &= \text{Tr} \left[ \mathbf{W} \left\langle \left( \mathbf{x}_{t+T}^f - \mathbf{x}_{t+T} \right) \left( \mathbf{x}_{t+T}^f - \mathbf{x}_{t+T} \right)^T \right\rangle \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \mathbf{W} \mathbf{P}_{t+T}^f \right] \\ &\approx \text{Tr} \left[ \mathbf{W} \tilde{\mathbf{P}}_{t+T}^f \right] - \text{Tr} \left[ \mathbf{W} \mathbf{M}_{t+T} \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{M}_{t+T}^T \right] \end{aligned}$$

$$\therefore e_{t+T} \approx \tilde{e}_{t+T} - \text{Tr} \left[ \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{M}_{t+T}^T \mathbf{W} \mathbf{M}_{t+T} \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \mathbf{H}_t \tilde{\mathbf{P}}_t^a \mathbf{H}_t^T \right)^{-1} \right]$$

重み行列  $\mathbf{W}$  には、二乗誤差を予測対象流域に限定する演算を含む。

# 追加観測データの効果(4)

簡単のため、追加観測データは $i$  番目の状態変数に対する1個だけとする。

$$\mathbf{H}_t = (0 \cdots 0 1 0 \cdots 0), \quad \mathbf{R} = (\sigma^o)^2$$

これらを代入すると

$$e_{t+T} \approx \tilde{e}_{t+T} - \frac{(\tilde{\mathbf{P}}_t^a)^T \mathbf{M}_{t+T}^T \mathbf{W} \mathbf{M}_{t+T} (\tilde{\mathbf{P}}_t^a)_i}{(\tilde{\mathbf{P}}_t^a)_{ii} + (\sigma^o)^2}$$

非負定値対称行列 $\mathbf{M}_{t+T}^T \mathbf{W} \mathbf{M}_{t+T}$  の固有値問題を解く。

$$\mathbf{M}_{t+T}^T \mathbf{W} \mathbf{M}_{t+T} \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j$$

固有値  $\lambda_j$  は摂動  $\mathbf{u}_j$  の増幅率を与える。この行列を固有値分解すれば

$$e_{t+T} \approx \tilde{e}_{t+T} - \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j [\mathbf{u}_j^T (\tilde{\mathbf{P}}_t^a)_i]^2}{(\tilde{\mathbf{P}}_t^a)_{ii} + (\sigma^o)^2}$$

最適観測領域は、固有値の大きな固有ベクトル(右特異ベクトル)の成分の絶対値が大きく、かつ解析誤差が大きな領域とすればよい。

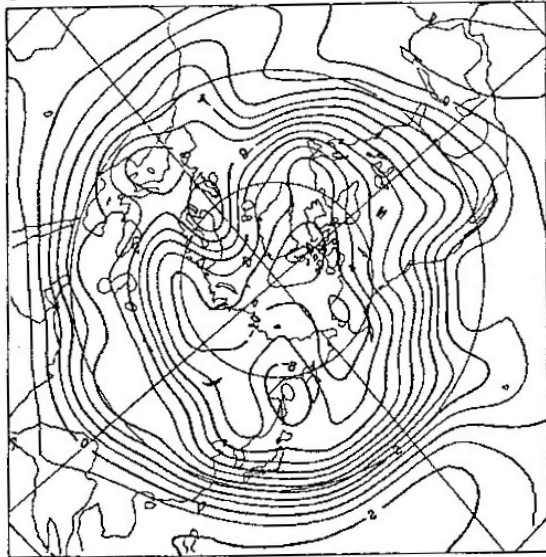


# 追加観測データの効果(5)

北半球2層準地衡風モデルによる特異ベクトルの計算例

基本場

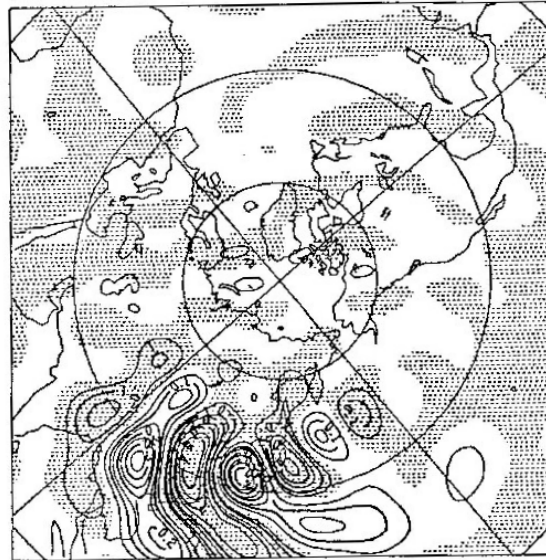
1991 1 14 12UTC (KT = 0)



T = 0 h

右特異ベクトル

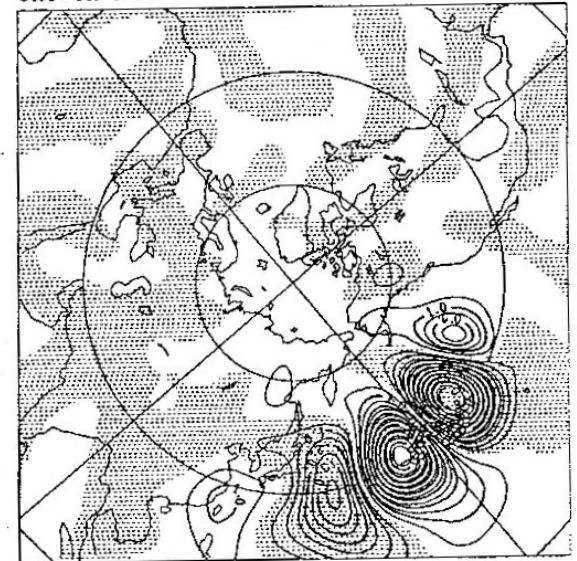
GROWTH RATE = 9.93984



T = 0 h

左特異ベクトル

GROWTH RATE = 9.93984



T = 48 h  
(等値線間隔10倍)