

# 波・流れ相互作用（2）

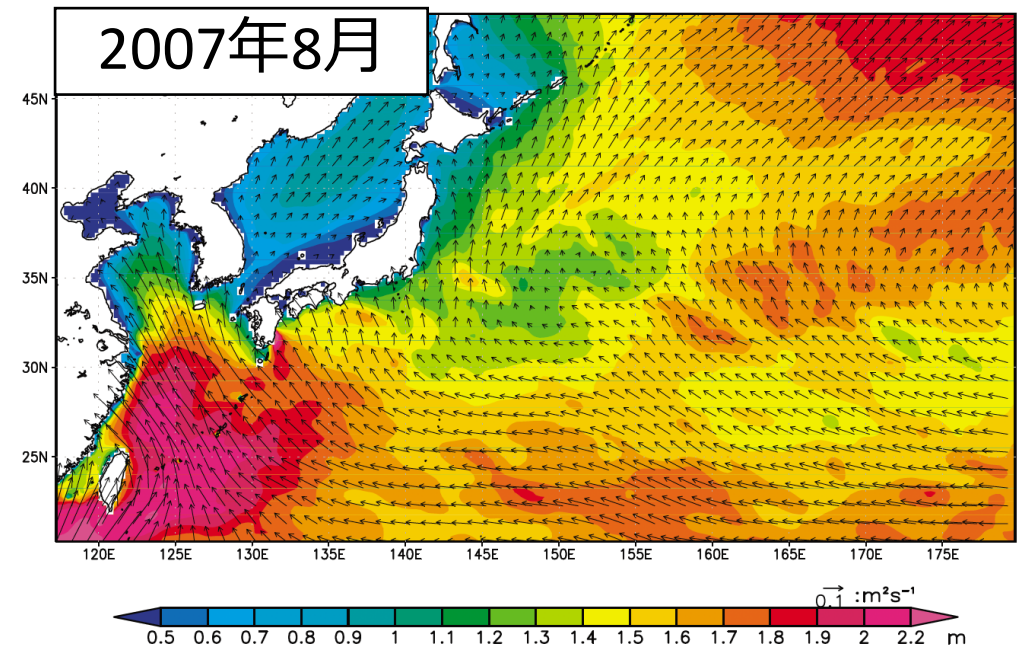
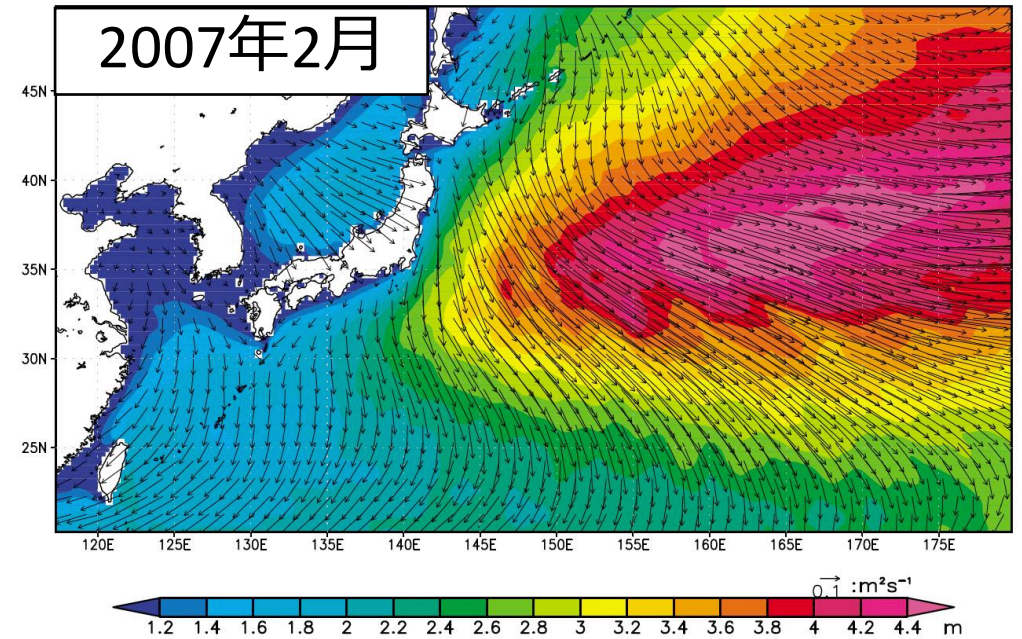
- 非一様な波構造への流れの応答
- コリオリ・ストークスカとエクマン流の変化

# ストークスドリフトの推算

Tamura et al. [2012]

波浪モデルから $\mathbf{u}^{\text{St}}(0)$ ,  $\mathbf{M}^{\text{St}} = \int \mathbf{u}^{\text{St}} dz$ を推算

日本近海では季節風方向に  
2 – 10cm/sの海面ストークスドリフト・  
 $O(0.1) \text{ m}^2/\text{s}$  の岸向き輸送、  
これはエクマン吹送流に匹敵



# 沿岸海洋を想定した波平均方程式の拡張 [McWilliams et al. 2004]

砕波帯～陸棚端を想定したスケーリング仮定のもと導出された方程式系

→ 海洋モデルROMSやNEMOに実装 [Uchiyama et al. 2010, Breivik et al. 2015, Wu et al. 2019]

- 予報変数はオイラー平均流速  $\bar{\mathbf{u}}$

- Craik and Leibovich [1976] に対して、 $\mathbf{u}^{\text{St}}$ などの時空間変化を許容する

などの特徴をもつ

## 方程式系（簡易化したもの）

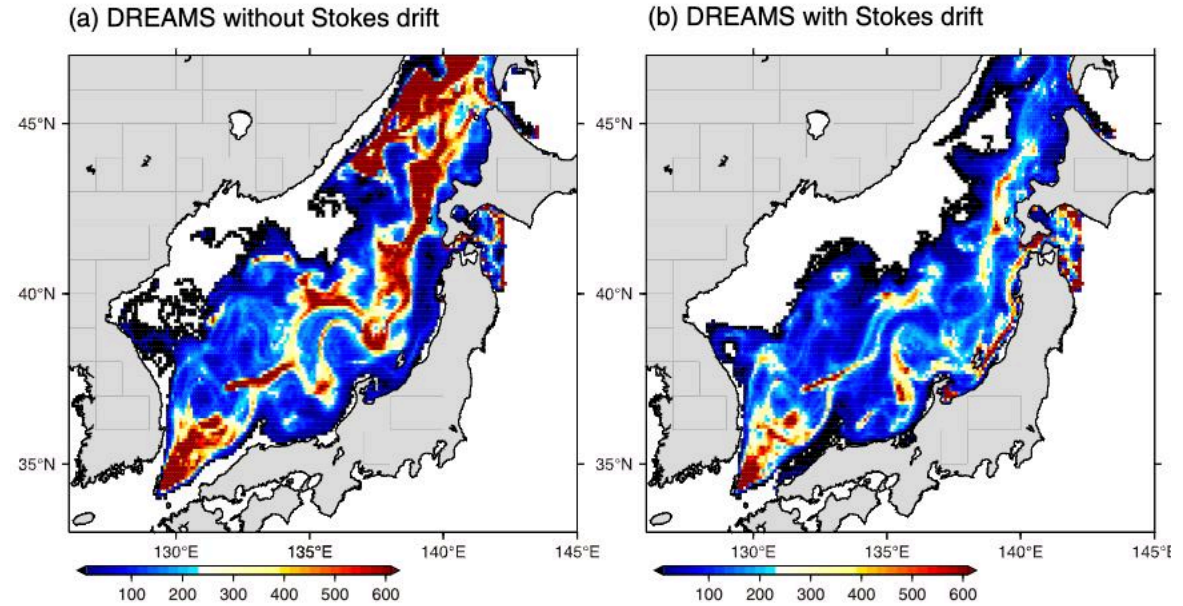
- $\mathbf{u}^{\text{St}}$ の擬似非圧縮性（鉛直成分の定義）： $\partial w^{\text{St}} / \partial z = -\nabla_{\text{H}} \cdot \mathbf{u}_{\text{H}}^{\text{St}}$

- 運動量方程式： $\partial \bar{\mathbf{u}} / \partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = \dots - \nabla \Pi + \mathbf{u}^{\text{St}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{u}^{\text{St}} \times \mathbf{f}$

- 自由表面の運動学的境界条件： $\partial \bar{\eta} / \partial t = -\nabla_{\text{H}} \cdot \int \bar{\mathbf{u}}_{\text{H}} dz - \nabla_{\text{H}} \cdot \int \mathbf{u}_{\text{H}}^{\text{St}} dz$

# 漂流予測とストークスドリフト

- 海面を浮かぶ物質の水平漂流モデリング  
典型的に、 $\mathbf{u}_{\text{drift}} = \mathbf{u}_{\text{ocean}} + \mathbf{u}^{\text{St}} + \mathbf{u}_{\text{wind}}$   
 $\mathbf{u}_{\text{ocean}}$  は海洋モデル最上層の速度
- $\mathbf{u}^{\text{St}}$  は質量・トレーサー・渦度などを動かすので、実際はオイラー流 $\bar{\mathbf{u}}$ も変化
- しかし、一般に $\mathbf{u}_{\text{ocean}}$  はwave-unawareな海洋モデルから得られている  
海流計算に波効果を入れる重要性が指摘されている [Rühs et al. 2025]



Iwasaki et al. [2017]

# ストークスドリフトに対するオイラー流 $\bar{u}$ の応答

風波、うねりの分布や波群構造に由来する $u^{St}$ に対し、  
オイラー平均流 $\bar{u}$  ( $u_{ocean}$ ) はどう応答するか？

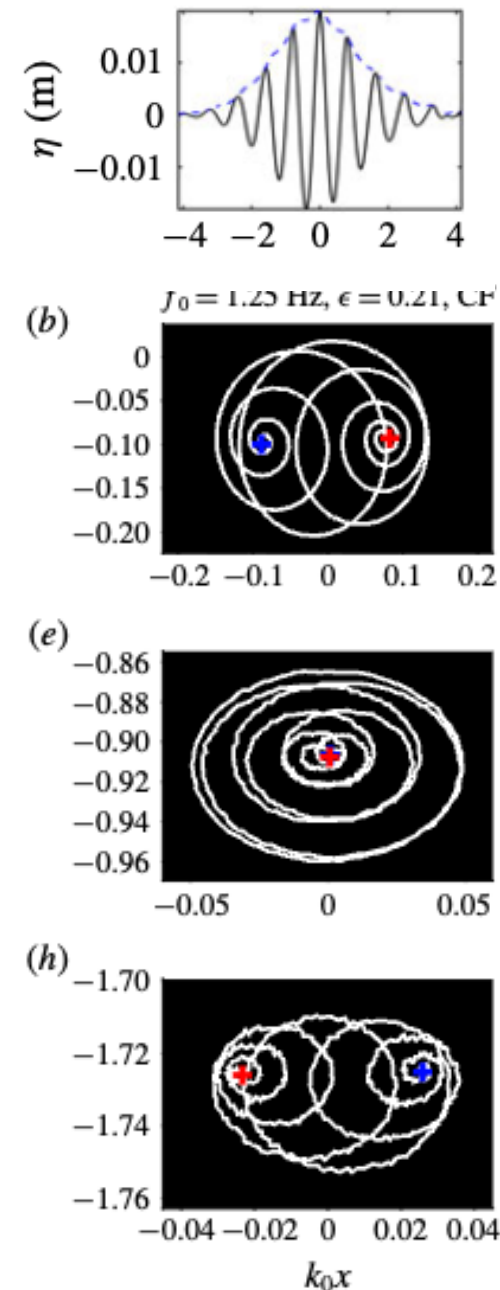
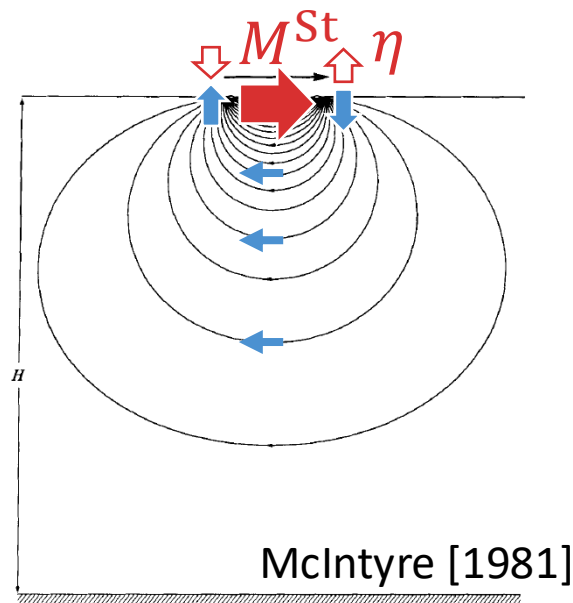
|                  | 水平一様な $u^{St}(z)$ | 水平非一様な $u^{St}(x, y, z)$ |
|------------------|-------------------|--------------------------|
| 非回転<br>$f = 0$   |                   |                          |
| 回転<br>$f \neq 0$ |                   |                          |

# 波群構造に対する応答

波群の下では、逆向きのオイラー流が生じる  
自由伝播する波群に伴う全水平運動量はゼロ

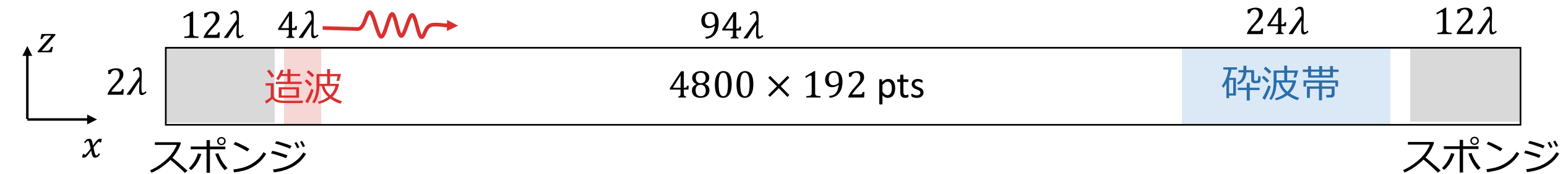
van den Bremer and Taylor [2015] の説明：

- ストークス輸送が水平収束・発散  
→ 水面を押し下げる・持ち上げる強制力
- 波群規模の長波の位相速度  $\gg$  波群の進行速度（搬送波の群速度）  
→ 瞬時に重力波調節が生じるとみなせる

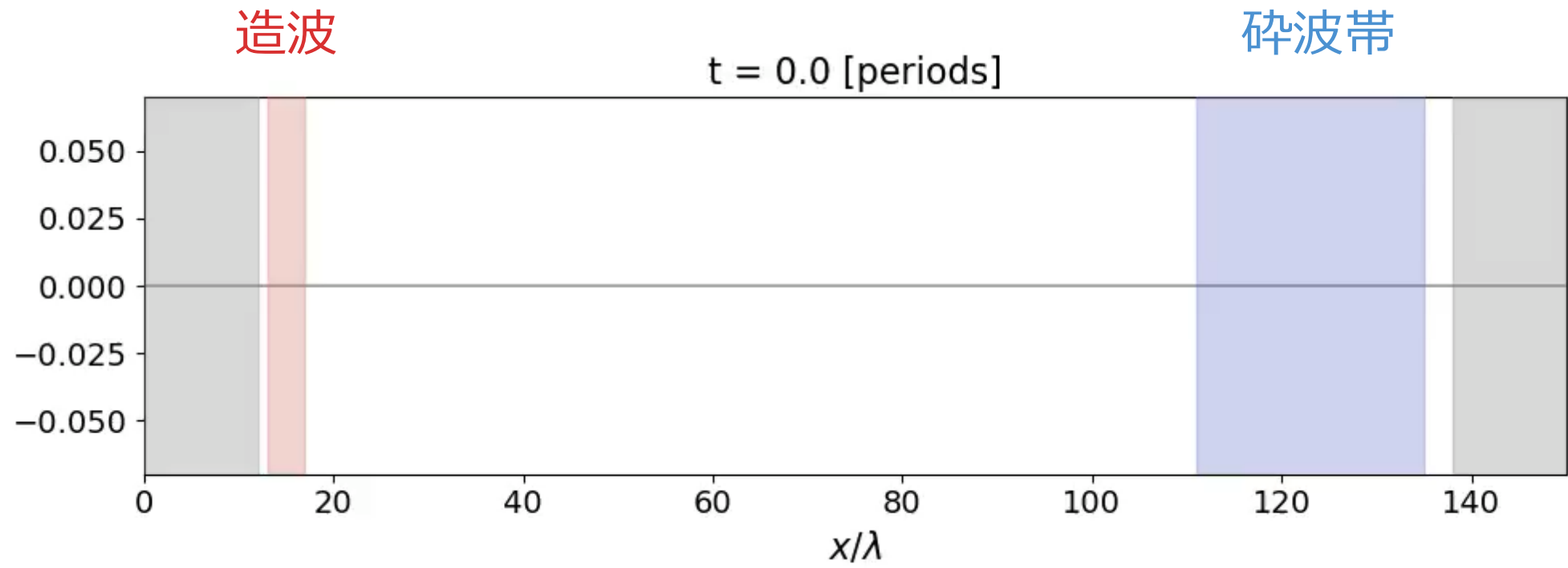


# 実験設定 – 波解像計算

- 自由表面数値モデル [Fujiwara et al., 2020]
- 鉛直2次元領域（長さ $150\lambda$ 、深さ $2\lambda$ ;  $4800 \times 192$ 点）  
上端は自由表面・下端は固定壁、左右端に速度緩和スポンジ層
- 非圧縮N-S方程式、基準深水波の角周波数 $\sigma$ 、波数 $k$ で無次元化  
成層・回転なし、全域に弱い粘性 ( $\nu/\sigma k^{-2} = 10^{-5}$ )
- 造波域で大気圧を振動、 $p_0(x) \cos \sigma t \rightarrow ak \approx 0.06$ の深水波を造波  
強粘性領域 ( $\nu/\sigma k^{-2} = 10^{-2}$ ) で砕波帯を模擬、波を減衰



# 結果 - 波解像計算





# 結果 – 反流応答、波平均計算との比較

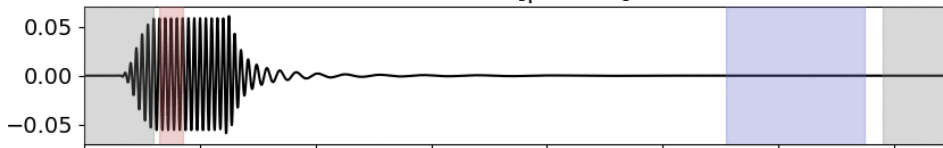
## 波解像計算

造波

t = 25.0 [periods]

砕波帯

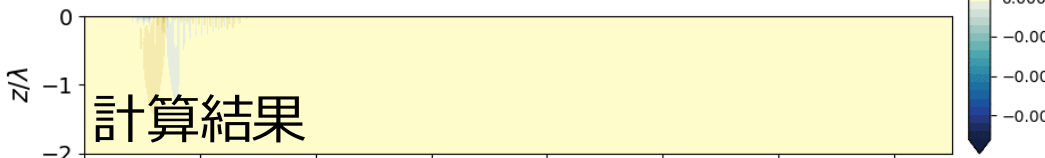
$\eta(x, t)$   
瞬間値



$u^{St}(x, z, t)$

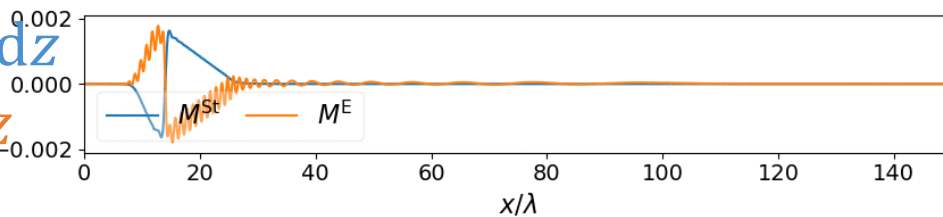


$\bar{u}(x, z, t)$



$$M^{St} = \int u^{St} dz$$

$$\bar{M} = \int \bar{u} dz$$

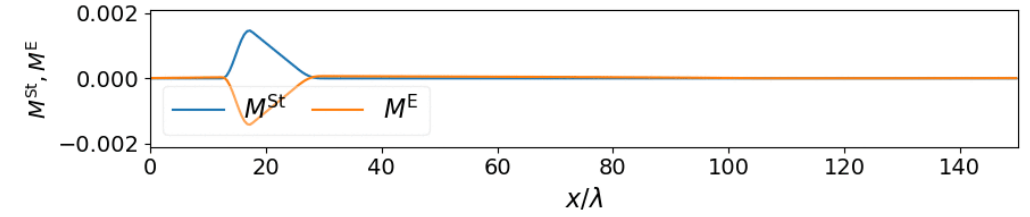
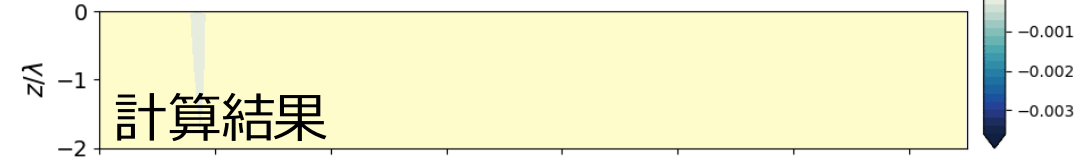
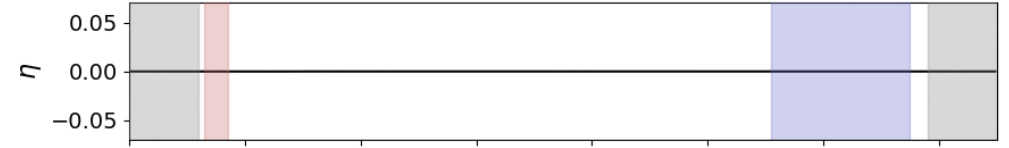


## 波平均計算

造波

t = 25.0 [periods]

砕波帯



オイラー流は波とともに群速度で進むストークス輸送を即座に補償  
 右向きに進む $u^{St}$ を外部条件として与えた波平均計算でもよく再現

# ストークスドリフトに対するオイラー流 $\bar{u}$ の応答

風波、うねりの分布や波群構造に由来する $u^{St}$ に対し、  
オイラー平均流 $\bar{u}$  ( $u_{ocean}$ ) はどう応答するか？

|                  | 水平一様な $u^{St}(z)$ | 水平非一様な $u^{St}(x, y, z)$ |
|------------------|-------------------|--------------------------|
| 非回転<br>$f = 0$   |                   |                          |
| 回転<br>$f \neq 0$ |                   |                          |

# 弱い粘性での水面波の線形解 [Lamb 1932, Weber 2018 etc.]

波の粘性減衰に伴い何が起こる？

微小振幅仮定で線形化したNavier-Stokes方程式, 水面で応力なし, 深水条件

$$\partial_t u = -\partial_x p + \nu(\partial_x^2 + \partial_z^2)u$$

$$\partial_t w = -\partial_z p - g + \nu(\partial_x^2 + \partial_z^2)w$$

$$\partial_x u + \partial_z w = 0$$

$$\partial_t \eta = w,$$

$$\mathbf{T} = 0 \text{ at } z = \eta$$

$$u, w = 0 \text{ at } z = -\infty$$

$\text{Re} \equiv \sigma/(\nu k^2) \gg 1$  のとき

$$\eta = a e^{-2k^2 \nu t} \exp i(kx - \sigma t)$$

$$u = a \sigma e^{-2k^2 \nu t} \left[ e^{kz} + O(\text{Re}^{-1/2}) e^{mz} \right] \exp i(kx - \sigma t)$$

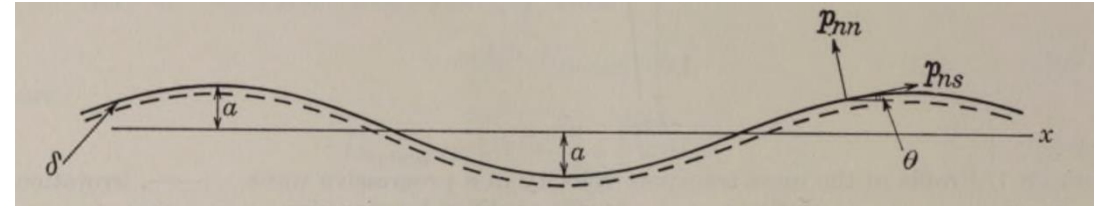
$$w = a \sigma e^{-2k^2 \nu t} \left[ e^{kz} + O(\text{Re}^{-1/2}) e^{mz} \right] \exp i(kx - \sigma t)$$

$$m = (1 - i)/\delta, \delta = \sqrt{2\nu/\sigma}$$

分散関係  $\sigma = \sqrt{gk}$

# 粘性減衰で生じるシア流と仮想波応力

Longuet-Higgins [1953], Weber [2018]



Longuet-Higgins [1969]

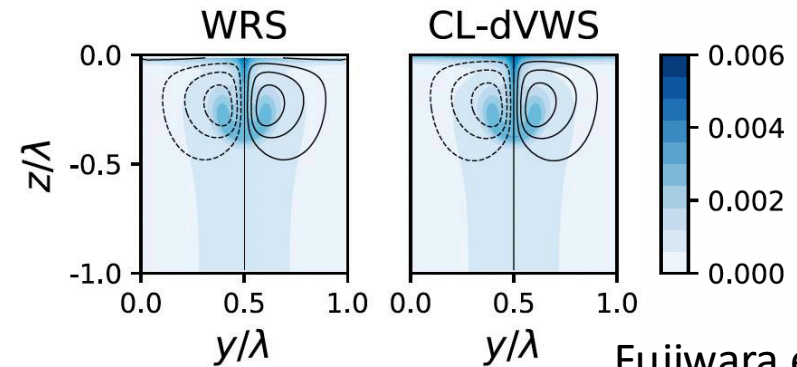
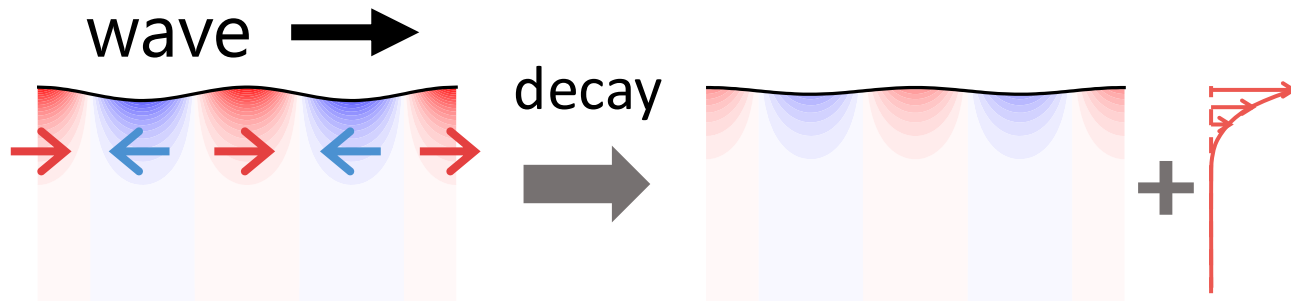
応力を精査：粘性境界層直下のオイラー流は  $\rho\gamma\sigma a^2$  の平均接線応力を受ける → **仮想波応力** (virtual wave stress)

●運動量保存とも整合：
$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho a^2 \sigma \right) = \rho\gamma\sigma a^2$$
  

$$\partial_t \bar{M} \quad \quad \quad -\partial_t M^{St}$$

●シア流 ( $\partial_z \bar{u} > 0$ ) + ストークスドリフト ( $\partial_z u^{St} > 0$ ) → **CL2不安定**

「波のみによる混合」を説明？ [Tsai et al. 2017, Fujiwara et al. 2020, Imamura et al. 2025]



Fujiwara et al. [2020]

# ストークスドリフトに対するオイラー流 $\bar{u}$ の応答

風波、うねりの分布や波群構造に由来する $u^{St}$ に対し、  
オイラー平均流 $\bar{u}$  ( $u_{ocean}$ ) はどう応答するか？

|                  | 水平一様な $u^{St}(z)$ | 水平非一様な $u^{St}(x, y, z)$ |
|------------------|-------------------|--------------------------|
| 非回転<br>$f = 0$   |                   |                          |
| 回転<br>$f \neq 0$ |                   |                          |

# コリオリ・ストークスカと局所反流

コリオリ力は  $\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{St}$  に対して作用

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{St}) = -\mathbf{f} \times (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{St}) + \dots$$

- 波平均方程式の理論によると、  
オイラー流  $\bar{\mathbf{u}}$  が  $-\mathbf{f} \times (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{St})$  を受け取る  
(レイノルズ応力  $-\overline{v'w'}$  の鉛直収束)

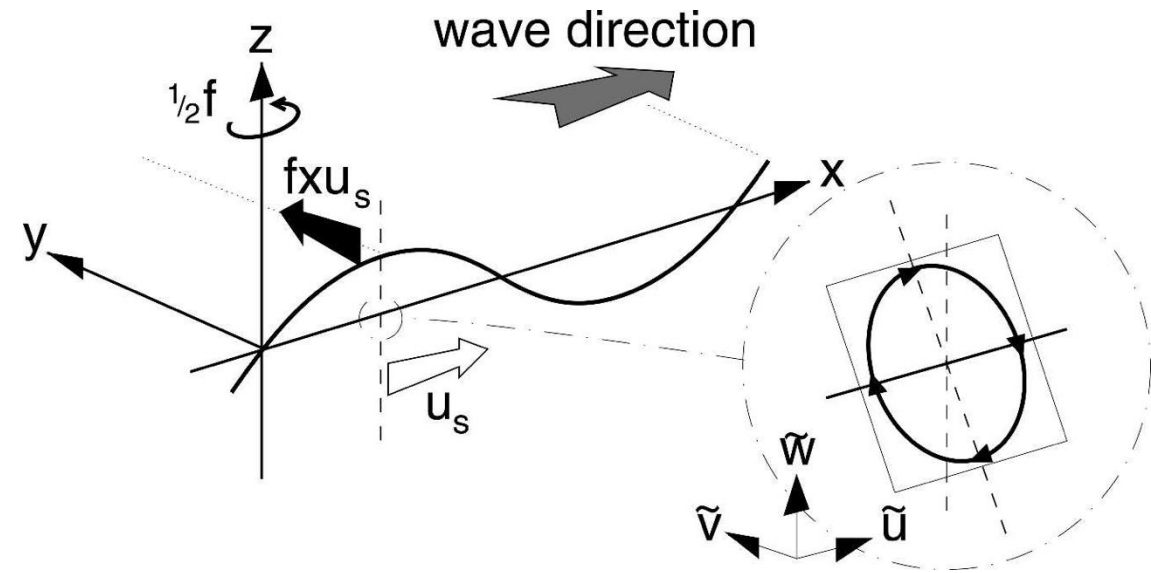
[Huang 1979, Leibovich 1980 etc.]

$-\mathbf{f} \times \mathbf{u}^{St}$  は **コリオリ・ストークスカ (CSF)** と呼ばれる

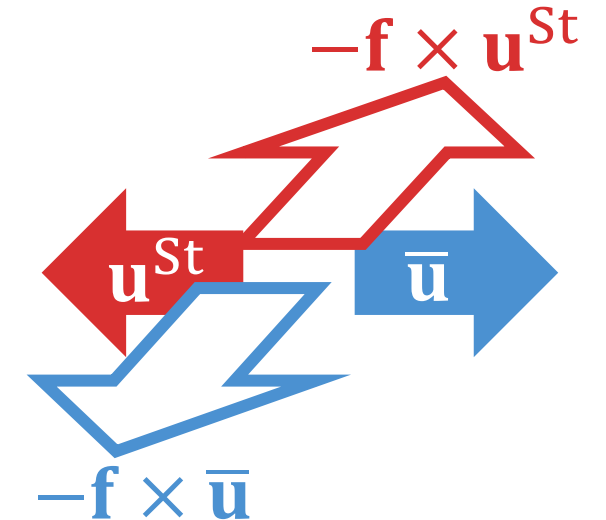
- 水平一様・定常・非粘性流では、

$$-\mathbf{f} \times (\bar{\mathbf{u}}(z) + \mathbf{u}^{St}(z)) = 0 \rightarrow \bar{\mathbf{u}}(z) = -\mathbf{u}^{St}(z): \text{局所的反流}$$

[Ursell and Deacon 1950]



Polton et al. [2005]



# エクマン・ストークス流 [Polton et al. 2005]

## エクマン流問題 + CSF

$$-\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{u}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial z^2} = \mathbf{f} \times \mathbf{u}^{\text{St}}, \quad \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho}$$

- 斉次応答 ( $\propto e^{z/\sqrt{2\nu/f}}$ ) + 非斉次応答 ( $\propto e^{2kz}$ )

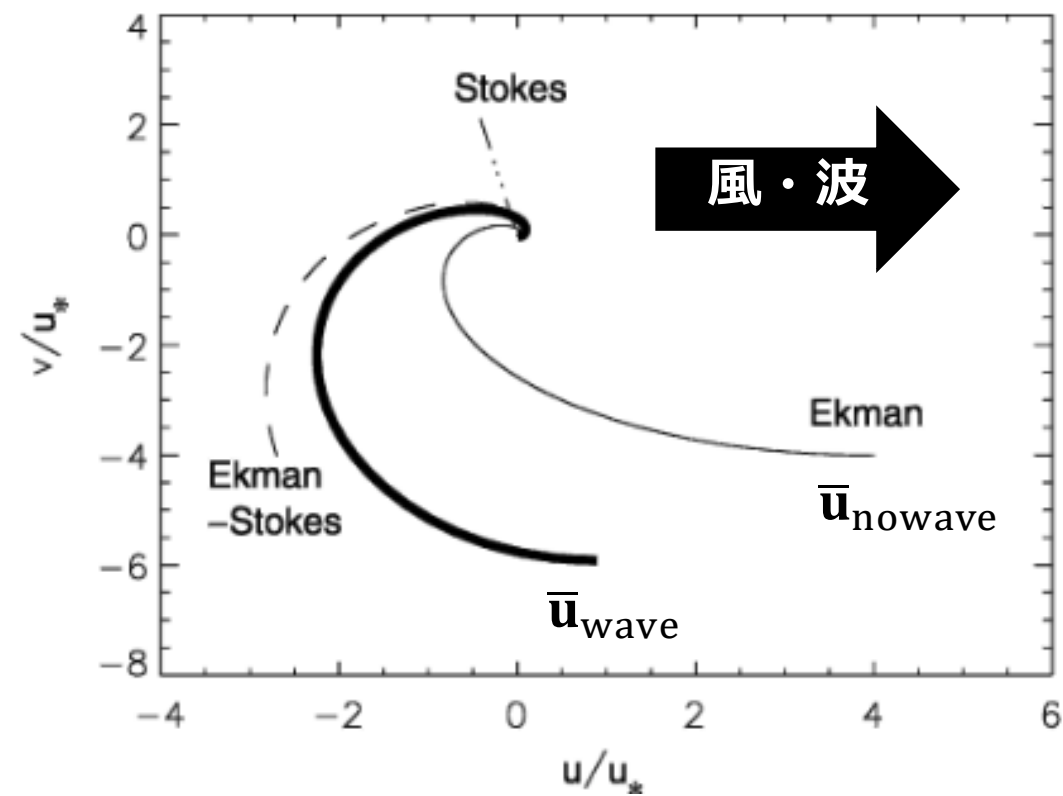
- 粘性により、波はエクマン層全体に影響
- エクマン螺旋を風上側に移す効果

- 鉛直積分：

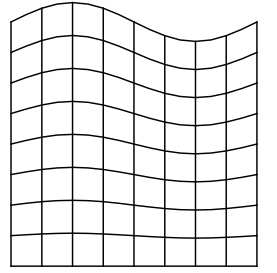
$$-\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\tau}/\rho = \mathbf{f} \times \mathbf{M}^{\text{St}} \rightarrow \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{M}^{\text{St}} = (\boldsymbol{\tau} \times \hat{\mathbf{e}}_z)/\rho f$$

正味輸送は古典的なエクマン輸送と同じ！

粘性は混合層内の流速再分配を担う



# 数値実験 - コリオリ・ストークスカ



自由表面モデル [Fujiwara et al., 2020] を用いて、波解像・波平均の比較実験

## 共通の設定

波数  $k$ , 深水波分散関係に基づく周波数  $\sigma = \sqrt{gk}$  で無次元化

$Ro_T = \sigma/f = 10^4$ ,  $Re = \sigma k^{-2}/\nu = 10^5$  のもと単色深水波が伝播し続ける想定

### 波解像実験

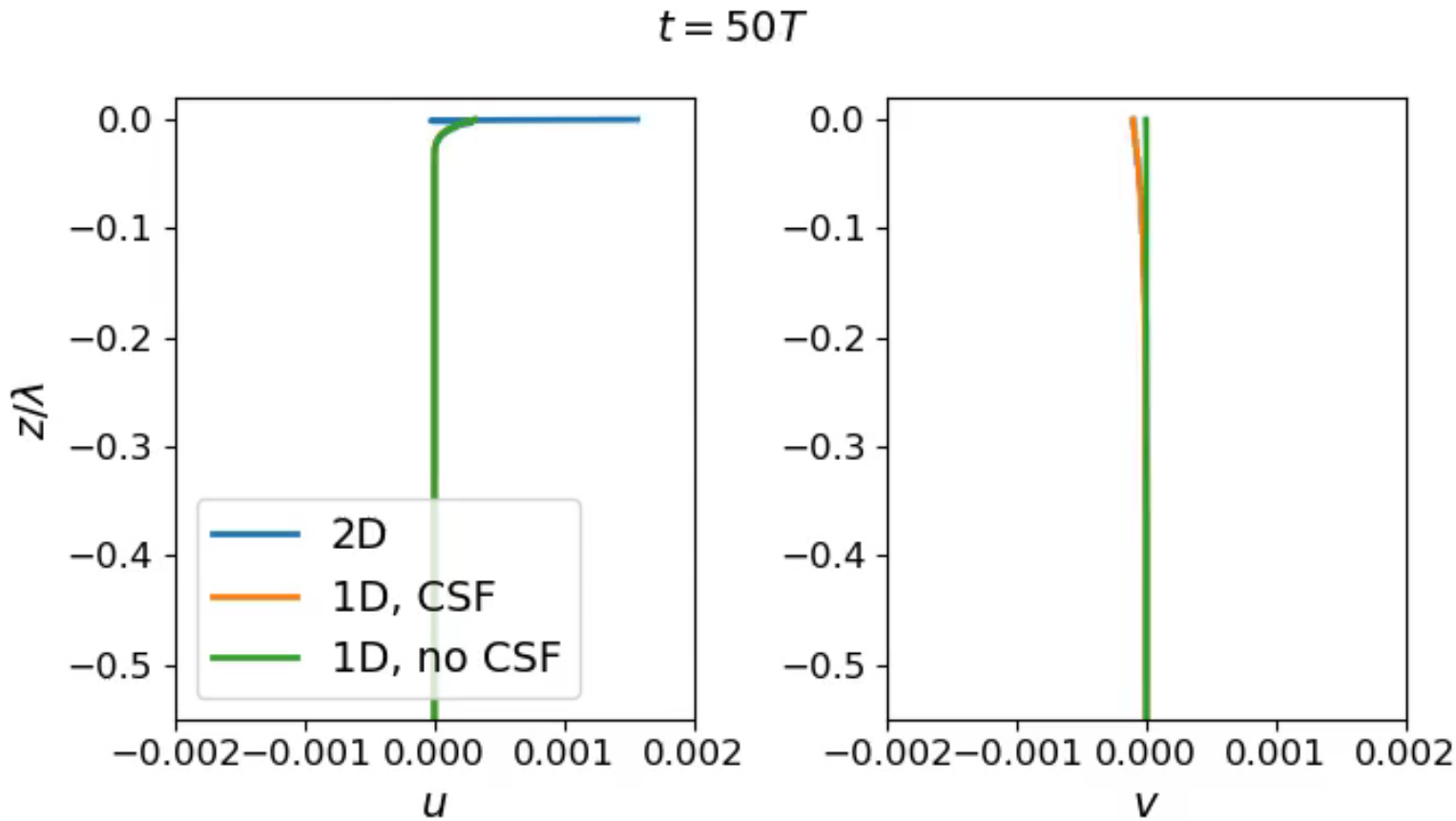
- 鉛直二次元、水平1波長周期境界
- 非圧縮N-S方程式 + 自由表面条件
- 初期条件：  $ak = 0.05$  の深水波運動  
粘性減衰しながら自由伝播
- 水平オイラー平均流速を評価

### 波平均実験

- 鉛直一次元の波平均方程式  
$$\partial_t \mathbf{u} = -f \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{u} + \mathbf{u}^{St}) + \nu \partial_z^2 \mathbf{u}$$
- $\mathbf{u}^{St}$  は  $ak = 0.05$  から粘性減衰する  
深水波のストークス速度分布
- 上端境界： 仮想波応力  $\boldsymbol{\tau} = \nu \partial_z \mathbf{u}^{St}$



# 数値実験 – コリオリ・ストークスカ



$u(z, t), v(z, t)$ の時間発展

- CSFありの波平均計算は、波解像計算のオイラー流をよく再現
- $\bar{\mathbf{M}} = -\mathbf{M}^{\text{St}}$ のまわりを慣性振動

# ストークスドリフトに対するオイラー流 $\bar{u}$ の応答

風波、うねりの分布や波群構造に由来する $u^{St}$ に対し、  
オイラー平均流 $\bar{u}$  ( $u_{ocean}$ ) はどう応答するか？

|                  | 水平一様な $u^{St}(z)$ | 水平非一様な $u^{St}(x, y, z)$ |
|------------------|-------------------|--------------------------|
| 非回転<br>$f = 0$   |                   |                          |
| 回転<br>$f \neq 0$ |                   |                          |

## 回転系・水平非一様な $u^{St}$ に対する流れの応答

慣性周期程度の経過 → コリオリ・ストークス力に対する局所反流 $\bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{u}^{St}$   
(混合層内プロファイルの変化を除き)  $\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{St}$ は波なしの力学を変えない... ?

### McWilliams and Restrepo [1999]

惑星地衡スケーリングのもと $u^{St}$ が大規模海流に及ぼす寄与を考察

ラグランジュ輸送についてスベルドラップ関係が成立：
$$\beta \int (\bar{v} + v^{St}) dz = \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla \times \left( \frac{\tau}{\rho} \right)$$

一方で、渦度力・CSFを入れた海洋モデルの利用は広がりつつある

[Uchiyama et al. 2010, Breivik et al. 2015, Guérin et al. 2018, Pianezze et al. 2018, Cao et al. 2019 ...]

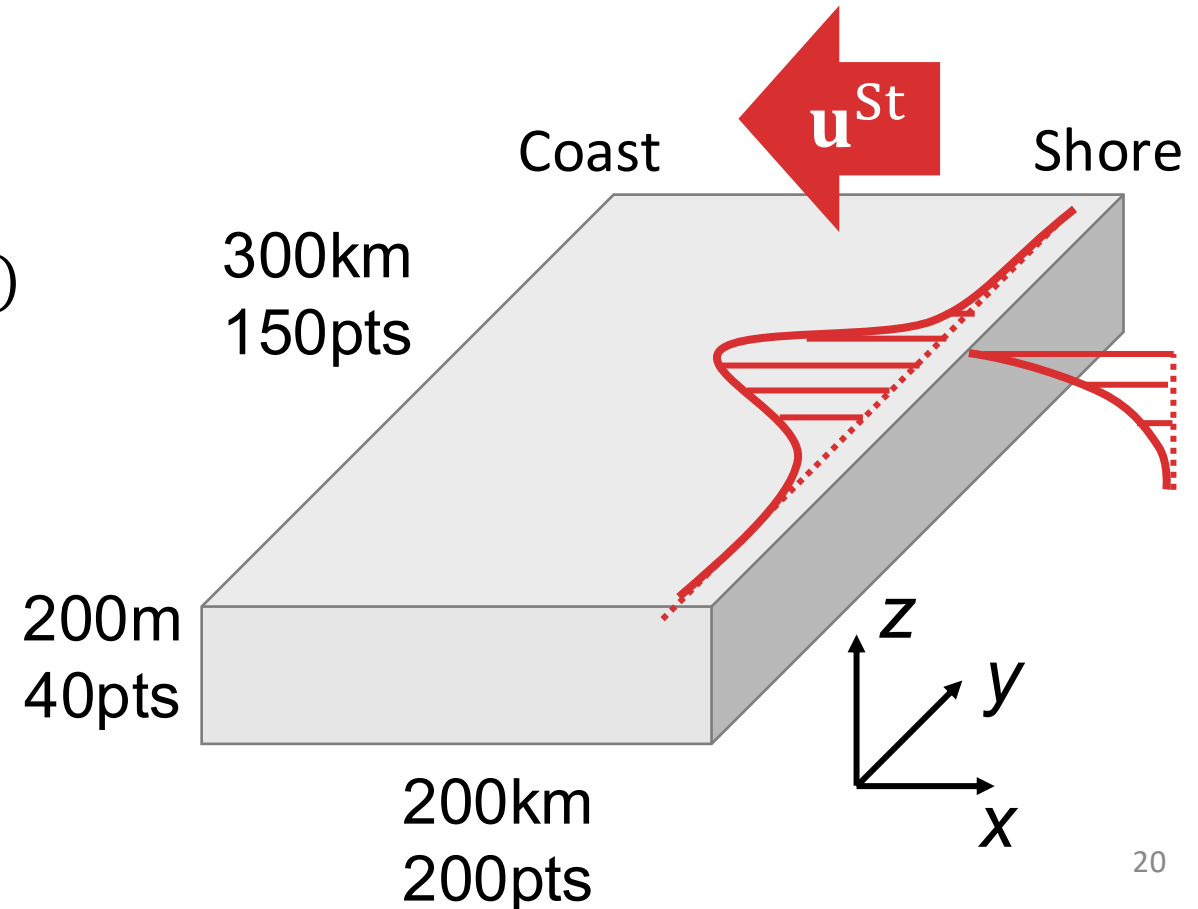
波が大規模海流に及ぼす寄与は結局どう理解できる？ 波平均数値計算から考察

Fujiwara, Y., Matsumura, Y., & Tamura, H. (2026). Wave-driven ocean currents: how the conservative effects of Stokes transport induce large-scale currents. *Progress in Earth and Planetary Science*, 13(1), 16.

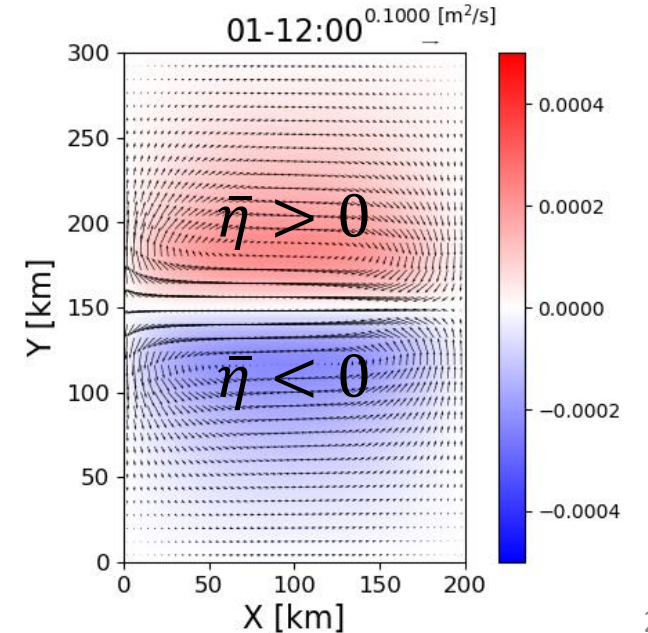
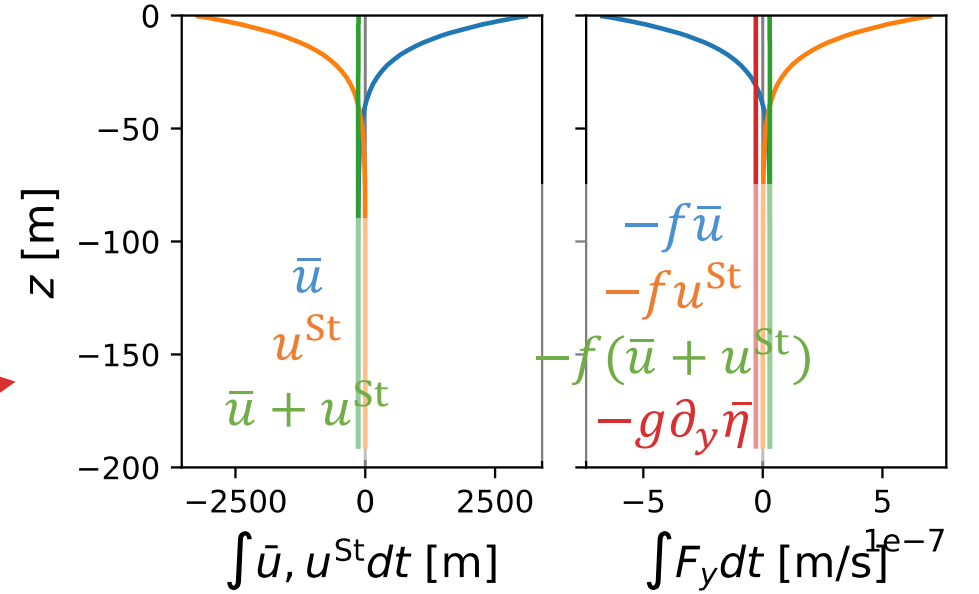
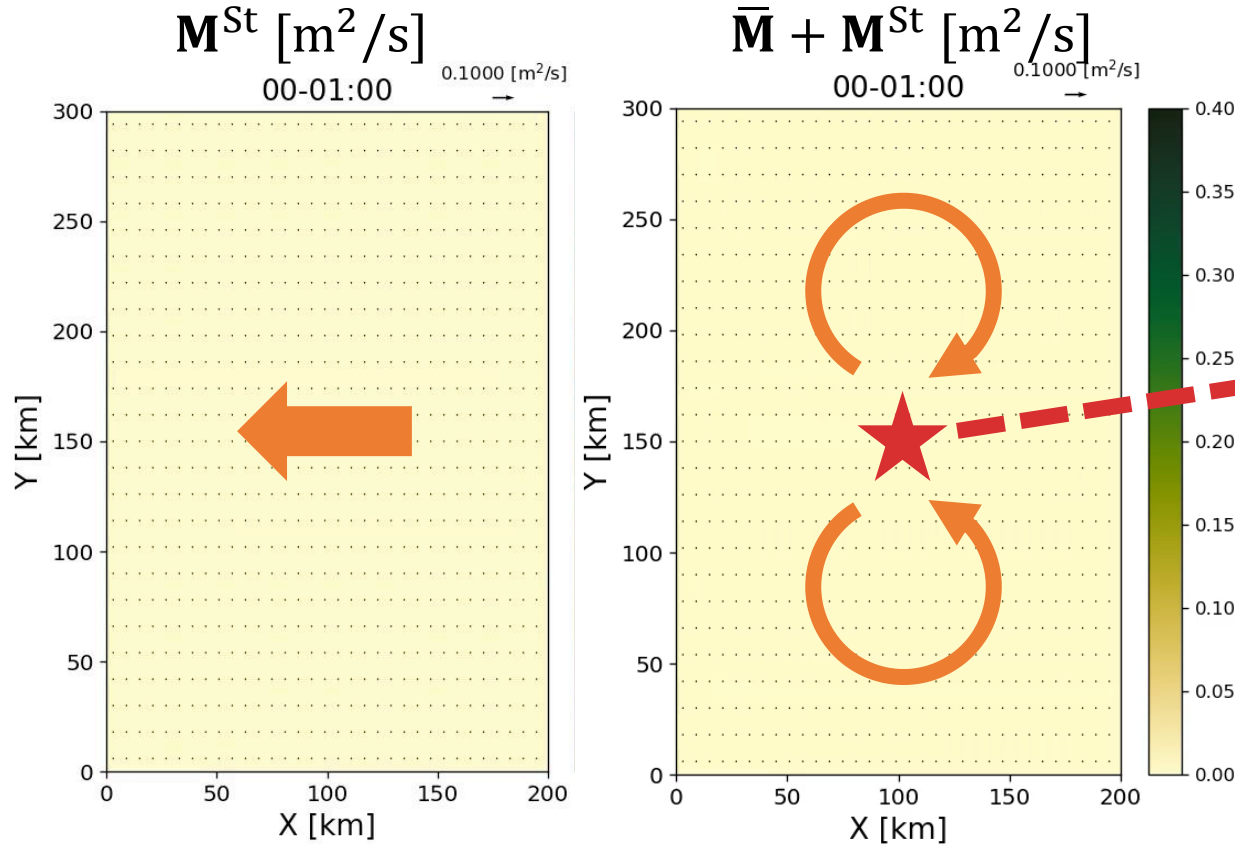
# 理想化数値計算設定

Uchiyama et al. [2010]を簡素化した波平均方程式（渦度力・CSF・ストークス輸送項）を実装した非静力学海洋モデル kinaco [Matsumura and Hasumi 2008]

- 矩形領域、自由表面、 $y$ 方向周期境界
- $f = 9.37 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$  ( $40^\circ\text{N}$ )
- 粘性・成層なし
- 波の条件：単色深水波 ( $T = 10\text{s}$ ,  $\lambda = 156\text{m}$ )
  - 振幅  $a(t)$ : 3-day cosine hill



# 波浪が引き起こす水平循環



$\bar{u}$  は  $u^{St}$  に対する局所反流 + 順圧的残差

y方向:  $f\bar{u}^L = -g\partial_y\bar{\eta}$ : 水平循環は地衡流

# 循環の励起：運動量収支の観点から

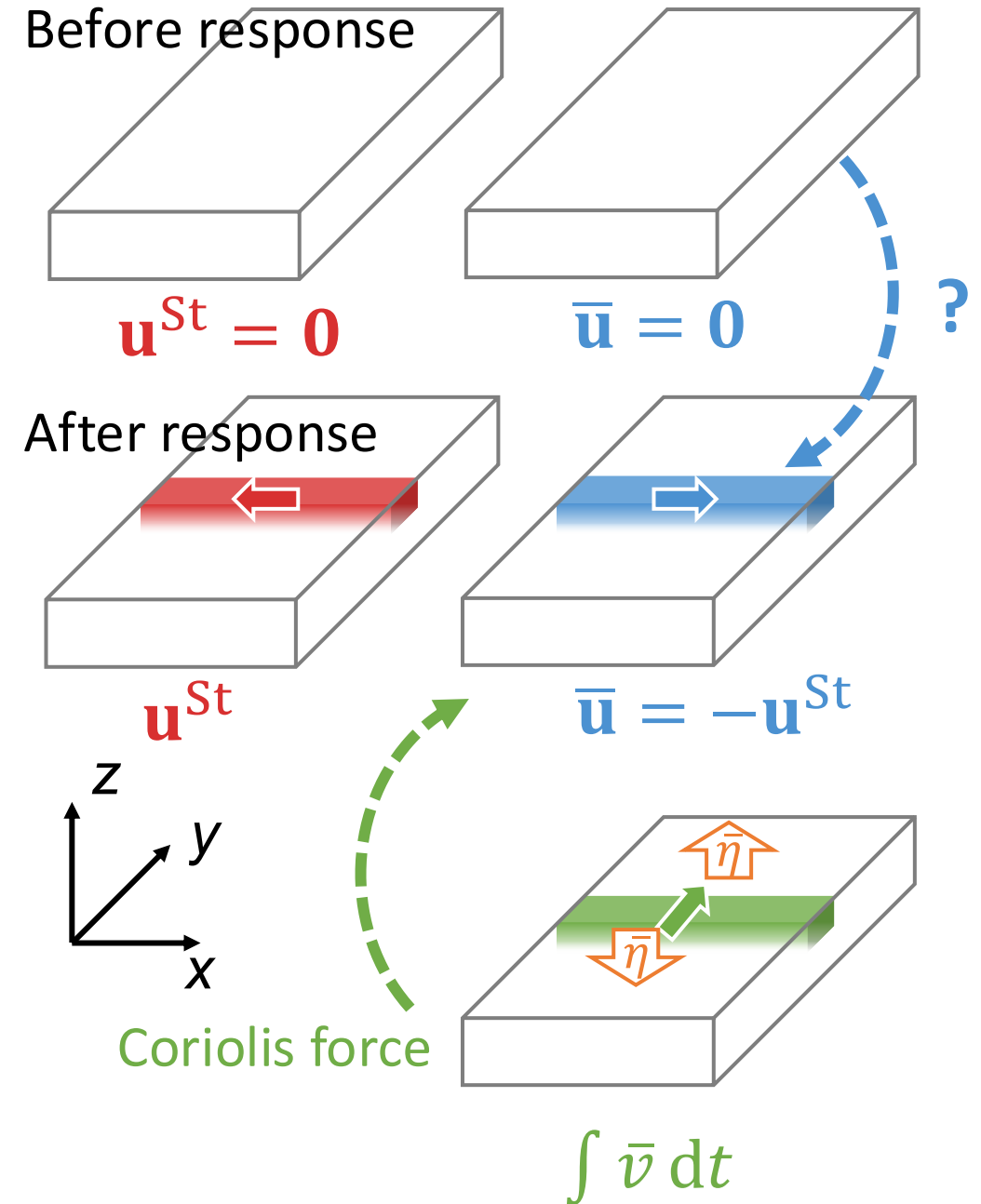
局所反流が形成：x方向の加速

$$\Delta \bar{u} = \int \left[ -\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - f \bar{v} \right] dt$$

運動量収支解析 → ほぼ  $\Delta \bar{u} = - \int f \bar{v} dt$   
 y方向変位に伴うコリオリカが主要な寄与

CSFへの慣性応答の過程でy正方向に変位  
 → y方向に水が収束発散、地衡流形成

波がなくなる時は逆プロセス、循環が消える



# 線形波平均方程式による考察 - 1

大規模な現象に注目し、低ロスビー数 ( $U/fL \ll 1$ ) かつ静力学関係を仮定  
→ オイラー平均流( $\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}$ )およびストークス流( $\mathbf{u}^{\text{St}}, w^{\text{St}}$ )について線形化

## オイラー流の方程式 [Lane+ 2007]

(以降、ベクトル表記は水平2成分)

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}} + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} = -f \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}^{\text{St}}$$

$$\partial_z \bar{p} + \bar{b} = 0$$

$$\partial_t \bar{b} + N^2 \bar{w} = -N^2 w^{\text{St}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \partial_z \bar{w} = 0, \nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{St}} + \partial_z w^{\text{St}} = 0$$

$$\partial_t \bar{\eta} + \nabla \cdot \int \bar{\mathbf{u}} dz = -\nabla \cdot \int \mathbf{u}^{\text{St}} dz$$

\*浮力鉛直拡散項は無視する

## ラグランジュ流の方程式 [Wagner+ 2021]

$(\bar{\mathbf{u}}^{\text{L}}, \bar{w}^{\text{L}}) = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) + (\mathbf{u}^{\text{St}}, w^{\text{St}})$  とする

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}^{\text{L}} + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \bar{\mathbf{u}}^{\text{L}} + \nabla \bar{p} = \partial_t \mathbf{u}^{\text{St}}$$

$$\partial_z \bar{p} + \bar{b} = 0$$

$$\partial_t \bar{b} + N^2 \bar{w}^{\text{L}} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^{\text{L}} + \partial_z \bar{w}^{\text{L}} = 0$$

$$\partial_t \bar{\eta} + \nabla \cdot \int \bar{\mathbf{u}}^{\text{L}} dz = 0$$



## 線形波平均方程式による考察 - 2

ラグランジュ流速( $\bar{u}^L, \bar{w}^L$ )を局所・非局所応答に分解 ( $\bar{u}^L = u^{\text{Ek}} + u^{\text{nl}}$  etc.)

[cf. Gill 1982, Chapter 9]

### 局所応答

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u}^{\text{Ek}} + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}^{\text{Ek}} &= \partial_t \mathbf{u}^{\text{St}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{Ek}} + \partial_z w^{\text{Ek}} &= 0\end{aligned}$$

これは波の時系列 $\mathbf{u}^{\text{St}}(t)$ から  
各地点で個別に時間積分可能

長期平均的に $\mathbf{u}^{\text{Ek}} = 0$

局所反流によりラグランジュ流はゼロ

### 非局所応答

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u}^{\text{nl}} + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}^{\text{nl}} + \nabla \bar{p} &= 0 \\ \partial_z \bar{p} + \bar{b} &= 0 \quad (1) \\ \partial_t \bar{b} + N^2 w^{\text{nl}} &= -N^2 w^{\text{Ek}} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{\text{nl}} + \partial_z w^{\text{nl}} &= 0 \quad (2) \\ \partial_t \bar{\eta} + \nabla \cdot \int \mathbf{u}^{\text{nl}} dz &= w^{\text{Ek}}(0)\end{aligned}$$

(1)はごく表層でのみノンゼロ

→ 非局所応答は(2)の

波成エクマンパンピングに帰着される



# 応答の特徴

- 長期平均的には波由来の流れ強制はゼロ [McWilliams and Restrepo 1999]  
風応力カールとは対照的
- しかし、左辺の斉次方程式系に**内在する波動を励起**  
(ロスビー波、慣性重力波、ケルビン波・・・)

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}^L + f \hat{\mathbf{e}}_z \times \bar{\mathbf{u}}^L + \nabla \bar{p} = \partial_t \mathbf{u}^{\text{St}}$$

$$\partial_z \bar{p} + \bar{b} = 0$$

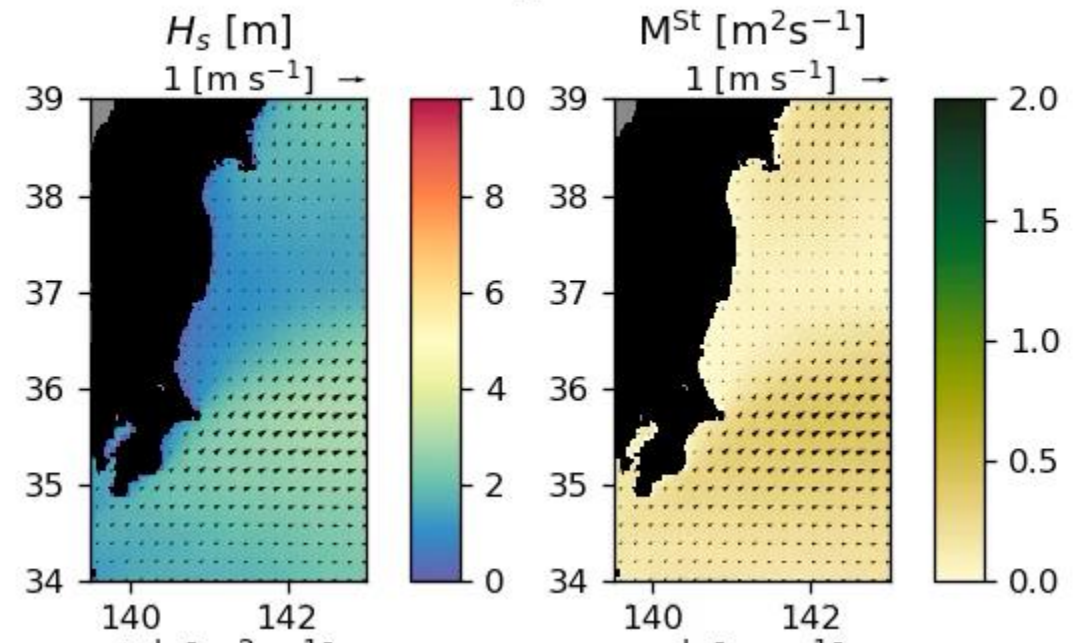
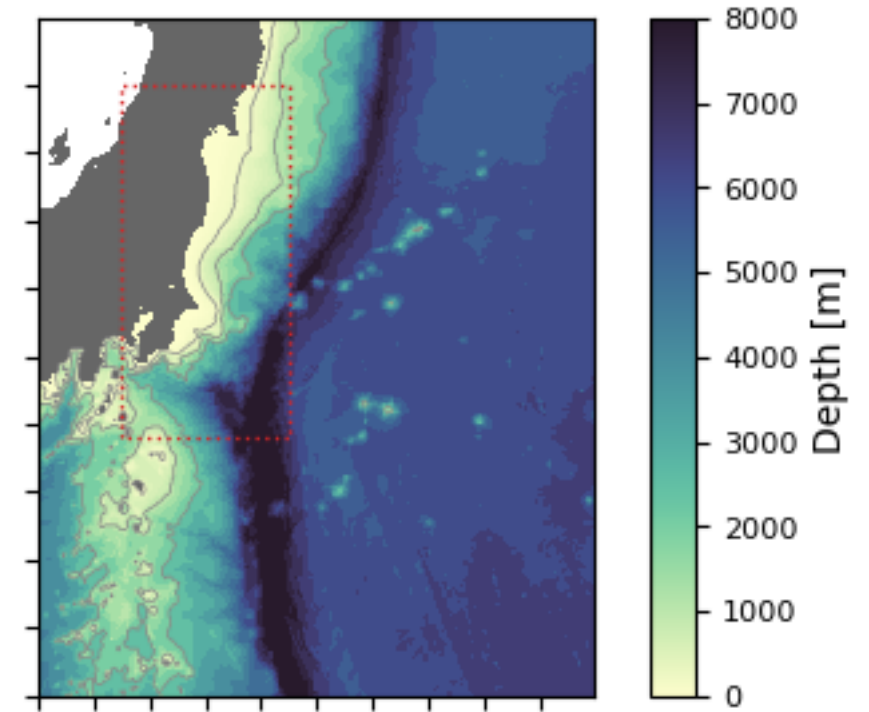
$$\partial_t \bar{b} + N^2 \bar{w}^L = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}^L + \partial_z \bar{w}^L = 0$$

$$\partial_t \bar{\eta} + \nabla \cdot \int \bar{\mathbf{u}}^L dz = 0$$

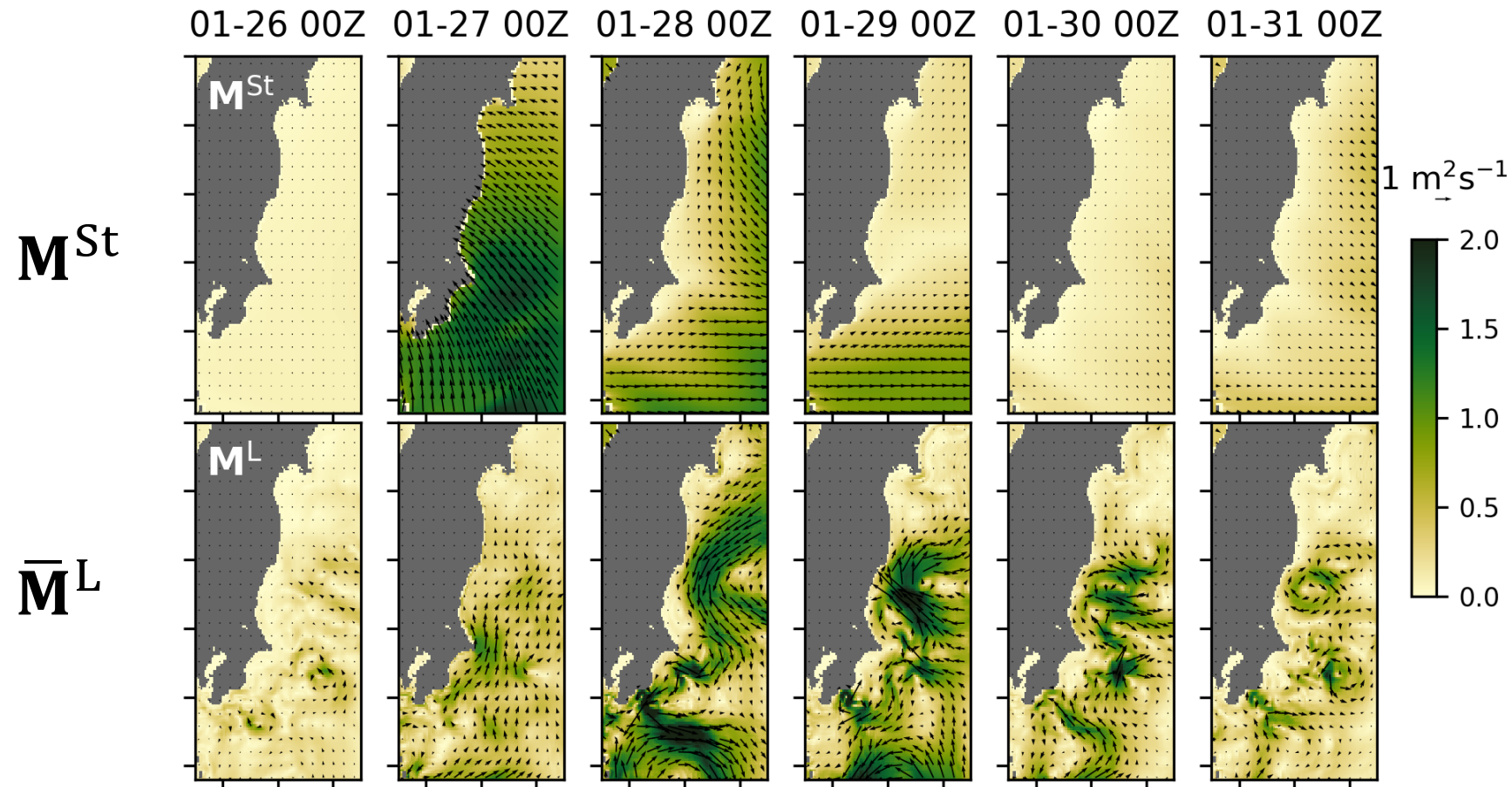
# 実海域地形・波浪強制での計算

- 太平洋側沿岸域、現実地形
- WAVEWATCH IIIによる波浪再予測データよりストークス輸送を入力値として使用
  - 3段ネスト・ $1/32^\circ$ 解像度
  - 領域大気再解析RRJ-Convで強制
- $1/32^\circ$ 解像度海洋モデル (海洋モデルkinaco)
  - 成層・粘性なし
  - ストークス輸送のみ**で強制
  - 線形緩和項 (時定数10日)



# 波浪で強制される順圧流動

- $O(1)\text{m}^2\text{s}^{-1}$  のストークス強制と同オーダーのラグランジュ流動が地形性ロスビー波として南方伝播、低気圧通過後も残存
- ストークス強制によって **正味のエネルギー入力** がなされる



# ストークスドリフトに対するオイラー流 $\bar{u}$ の応答

|                  | 水平一様な $u^{St}(z)$ | 水平非一様な $u^{St}(x, y, z)$                |
|------------------|-------------------|---|
| 非回転<br>$f = 0$   |                   | <p>van den Bremer and Taylor [2015]</p> |
| 回転<br>$f \neq 0$ |                   | <p><math>\bar{u} = -u^{St}</math></p>   |