線形波動

竹広真一、林祥介　著

2020-09-04 版　　発行

目次

第 1 章

ロスビー波

ここではロスビー波をつかさどるもっとも単純な方程式を取り上げ, ロスビー波のイメージをつかむことにする.

1.1　基礎方程式, 線型化

系として β 面上の 2 次元非発散系を考察する. 支配方程式は次のように書きくだせる.

式 1.1:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

式 1.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{du}{dy} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

式 1.3:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{dv}{dy} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

ただし $f(y) = f_0 + \beta y$, $\rho = \mathrm{const.}$ である[*1].

基本場が $u = U(y)$ である流れに対する線型化された擾乱の方程式は,

式 1.4:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

式 1.5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{dU}{dy} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

式 1.6:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

式 1.1 より流れ関数 $u = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ を導入することができる. 式 1.4 〜 式 1.6 より渦度方程式を作ると

式 1.7:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + \left(\beta - \frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

この方程式は, もともとのポテンシャル渦度保存則において, 基本場のポテンシャル渦度を $Q(y) = f(y) - \dfrac{dU}{dy}$, 擾乱のポテンシャル渦度は $q' = \nabla^2\psi$, 速度 $v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ とした場合に相当する.

特に $U(y) \equiv 0$ のとき, 線型化された方程式は

[*1] この導出についてはシリーズ '2 次元非圧縮流体の支配方程式' を参照せよ

式 1.8:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

式 1.9:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

式 1.10:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

また, 式 1.7 は次のようになる.

式 1.11:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

1.2 分散関係

分散関係式をもとめるために β を一定とし, 解として平面波の形 $\psi = \psi_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$ を支配方程式に代入し整理すると,

式 1.12:

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}.$$

これが 2 次元非発散ロスビー波の分散関係である.

1.3 位相速度

式 1.13:

$$c_{px} \equiv \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2}, \quad c_{py} \equiv \frac{\omega}{l} = -\frac{\beta k}{l(k^2 + l^2)}.$$

$c_{px} < 0$ より, 位相は常に x 軸負方向 (西向き) に進む.

1.4 群速度

式 1.14:

$$c_{gx} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \quad c_{gy} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta k l}{(k^2 + l^2)^2}.$$

$k > l$ の波束は x 軸正方向 (東向き), $k < l$ の波束は x 軸負方向 (西向き) にエネルギーを伝播する.

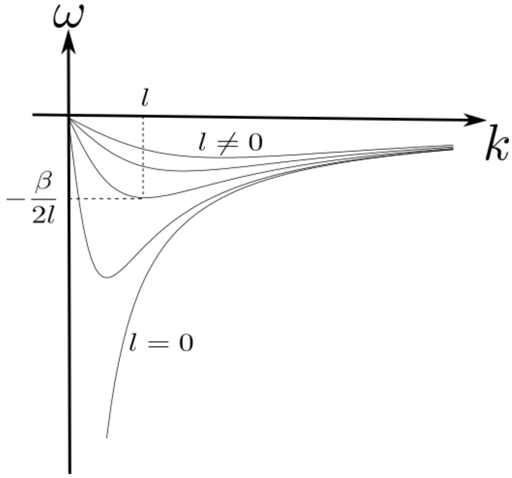

図 1.1: 2 次元非発散ロスビー波の分散関係 ($k-\omega$ 面)

1.5　$k-l$ 面での分散関係の表現

式 1.12 を変型することにより

式 1.15:

$$\left(k+\frac{\beta}{2\omega}\right)^2 + l^2 = \frac{\beta}{4\omega^2}.$$

ω =const. である k, l を $k-l$ 面で表すと円になる (図 1.2). また群速度は $k-l$ 面での ω の gradient ($\boldsymbol{c}_g = \nabla_k \omega,\ \nabla_k = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial k} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial l}$) であるから, その向きは式 1.15 の円の中心から円周上の点に向かう向きとなる.

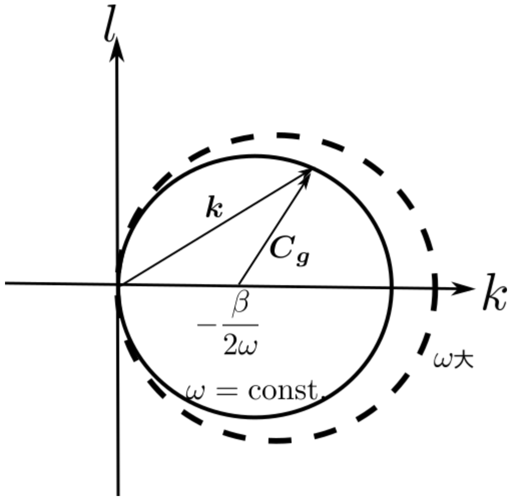

図 1.2: ロスビー波の分散関係 ($k - l$ 面)

1.6　初期値問題〜ロスビー波の分散

2 次元 β 面内に初期擾乱を与えたときの時間変化の計算例を図 1.3 に示す. 与えられた擾乱がロスビー波として伝播し, 分散していく. 図 1.3(c), (d) において下図のような位相と群速度の関係が見られる.

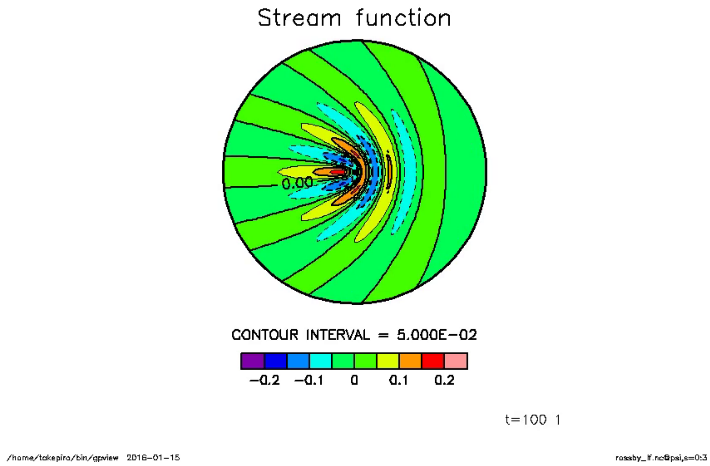

図 1.3: 初期点擾乱を与えたときの流線の時間変化. トーンの塗り方は全て同じだが, 振幅の大きいところは塗っていない.

線形波動

2020 年 9 月 4 日　初版第 1 刷　発行

著　者　　竹広真一、林祥介