

## 1.1 地衡流調節

中緯度における総観規模の運動は近似的に地衡風平衡である。では、このバランスがずれたとき、どのようなことが起こるのであろうか。この節では、バランスからずれた状態からどのようにして再びバランスした状態になるのかという過程について述べる。ここで、このバランスした状態に戻ろうとする過程は調節 (adjustment) と呼ばれる。

考える系は以前にも登場した (??参照) 浅水系流体である。また、簡単化のため、コリオリは一定の  $f$  面近似を用いる。この条件は連続的に成層した大気にも適用できる。静止状態を基本場として線形化すると、擾乱についての水平方向の運動方程式、連続の式は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - f_0 v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1.4)$$

となる。ここで、 $h'$  は平均的な深さ  $H$  からの変位である\*1。上の方程式系は未知変数が  $u', v', h'$  の3つで方程式が3つなので、閉じた系である。この系の物理的な性質を考えるため、まず  $\partial(1.1.2)/\partial x + \partial(1.1.3)/\partial y$  を計算して発散の時間変化を求めると、

$$\frac{\partial D}{\partial t} - f_0 \zeta' = -g \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right), \quad D \equiv \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}, \quad \zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (1.1.5)$$

となる。さらに、 $\partial(1.1.4)/\partial t$  を計算すると、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} + H \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \quad (1.1.6)$$

となるので、これに (1.1.5) を代入すると、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = \underbrace{c^2 \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right)}_{(A)} - \underbrace{f_0 H \zeta'}_{(B)} \quad (1.1.7)$$

となる。ここで、 $c^2 \equiv gH$  である。次に、この式を少し考察してみよう。

\*1 計算を簡単にするため、ここでは静止状態を基本場とおいたが、一般化するには、任意の地衡風バランスした速度場を基本場として設定すればよい。実際、熱帯低気圧における傾度風調節では、傾度風バランスに対する調節を一般化して述べている (??参照)。

## (1.1.7) の考察

項 A 波動方程式の項 (??) で述べたが、この項のみを取り出すと、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right)$$

という形になり、純粋な線形波動方程式となる。つまり、この項は  $h'$  が時間とともに波として振る舞うことを記述した項である。位相速度に対応する  $c$  が重力に比例するので、この波は特に重力波の性質を有していることが伺える。

項 B この項のみ取り出すと、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = -f_0 H \zeta'$$

となる。つまり、 $\zeta'$  が正となるとき（低気圧性渦が存在するとき）、 $h'$  の加速度は負となる。この項が存在することにより、力学場（渦度場）がポテンシャル場（ $h'$ ）に影響を与える。この効果は  $f_0$  が存在することからわかるように、系が回転していることによるユニークな効果である。

(1.1.7) について、 $f_0 \neq 0$  となるので、 $h'$  だけでなく  $\zeta'$  の場も変動する。このとき、惑星規模の現象のような、 $1/f_0$  より長い時間スケールをもった運動に対して、(1.1.7) における最初の 2 項の比は

$$\frac{|\partial^2 h' / \partial t^2|}{|c^2 (\partial^2 h' / \partial x^2 + \partial^2 h' / \partial y^2)|} \lesssim \frac{f_0^2 L^2}{gH}$$

によって与えられる<sup>\*2</sup>。これは、 $H \gg 1\text{km}$  としたとき、 $L \sim 1000\text{ km}$  というスケールの運動に対して時間微分の項は相対的に小さい<sup>\*3</sup>。この場合、(1.1.7) の時間微分項は、ほかの 2 項にくらべて小さい。つまり、

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right) = f_0 H \zeta' \quad (1.1.8)$$

が近似的に成り立つ。この式は、渦度  $\zeta'$  がポテンシャルエネルギー  $gh'$  のラプラシアンに比例するというを表す式である。以前みたように（??参照）、相対渦度がジオポテンシャルのラプラシアンで表されるなら、そのときの速度場は地衡風バランスしていることがわかる。ゆえに、(1.1.7) の時間微分項がほぼゼロとみなされる定常状態では、速度場は地衡風バランスしていることになる。

もし流れが初期につりあっていなければ、方程式 (1.1.7) の時間微分項を復活させることで地衡風バランスしていない場がどのようにバランスした状態に向かうかを記述するこ

<sup>\*2</sup>時間のスケールを  $1/f_0$  とすると容易に導出できる。

<sup>\*3</sup>この場合の比は  $H \gg 1\text{ km}$  であるので、

$$\frac{f_0^2 L^2}{gH} \ll 10^{-10+12-1-3} = 10^{-2}$$

となる。

とができる。しかし、(1.1.7) には未知変数が 2 つ ( $h', \zeta'$ ) あるので、もう 1 つ別の関係式を持ってこなければならぬ。そこで、

$$\partial(1.1.3)/\partial x - \partial(1.1.2)/\partial y$$

をとることで、

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + f_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.1.9)$$

を得る。これに (1.1.4) を合わせると、線形化されたポテンシャル渦度保存則：

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} - \frac{f_0}{H} \frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \quad (1.1.10)$$

が得られる。今、プライムのついた変数は基本場に比べて微小であるので、非線形移流項について任意の変数  $\varphi$  は

$$u' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \approx 0, \quad v' \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \approx 0$$

という近似が可能である。ゆえに、(1.1.10) は

$$\frac{d}{dt} \left[ \zeta' - \frac{f_0}{H} h' \right] = 0 \quad (1.1.11)$$

と表記することができる。??でみたように、この関係が成り立つとき、物理量

$$\zeta' - \frac{f_0}{H} h'$$

は保存量であることがわかる。つまり、任意の流体パーセルについて、上の物理量は時間変化しないことになる。これは以下にみるように非常に強力な制限を与えることになる。この物理量は  $f$  面におけるロスビーのポテンシャル渦度<sup>\*4</sup>と呼ばれる。

ロスビーのポテンシャル渦度が保存量であるという性質を用いると、ポテンシャル渦度の擾乱  $Q'$  について、(1.1.11) から保存関係式

$$Q'(x, y, t) = \zeta'/f_0 - h'/H = \text{Const.} \quad (1.1.12)$$

が得られる。これが表すことは、もし初期に  $Q'$  の擾乱がわかっているなら、任意の流体パーセルの任意の時間で  $Q'$  は一定であるので、初期の  $Q'$  と任意の時刻の  $Q'$  は同じ値となる。すなわち、

$$Q'(x, y, t) = Q'(x, y, 0)$$

である。これは、最終的に調節された状態（定常状態）が、時間依存問題を解くことなく、（初期のポテンシャル渦度の分布から）決定することができるということを表している。

この問題は 1930 年代にロスビーによってはじめて求められ、ロスビーの調節問題と呼ばれる。以下では、この調節過程の簡単な例を考えることで、調節作用の具体的なプロセ

<sup>\*4</sup>以前に述べたが、ロスビーのポテンシャル渦度は浅水流体において定義される物理量であり、連続成層した流体において、これに相当する物理量として、エルテルのポテンシャル渦度という物理量が存在する。

スを見ていくことにする。

まず、初期条件が

$$u', v' = 0, \quad h' = -h_0 \text{sgn}(x) \quad (1.1.13)$$

となる理想化された回転浅水系を考える。ここで、符号関数  $\text{sgn}$  は

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x > 0) \end{cases}$$

となる関数である。したがって、(1.1.12) から

$$(\zeta'/f_0) - (h'/H) = (h_0/H) \text{sgn}(x) \quad (1.1.14)$$

となる。(1.1.7) に上式を代入して  $\zeta'$  を消すと、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right) + f_0^2 h' = -f_0^2 h_0 \text{sgn}(x) \quad (1.1.15)$$

を得る。これが調節過程を直接記述する方程式である。ただし、この問題の場合は初期に  $h'$  は  $y$  に依存しないので、すべての時間で  $y$  に依存しない。つまり、

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + f_0^2 h' = -f_0^2 h_0 \text{sgn}(x) \quad (1.1.16)$$

が実際の式となる。この式の考察は後回しにしよう。

先に調節が終了した定常状態において場がどのようになっているかを考える。定常状態のとき、(1.1.16) は

$$-c^2 \frac{d^2 h'}{dx^2} + f_0^2 h' = -f_0^2 h_0 \text{sgn}(x) \quad (1.1.17)$$

となる。この方程式は 2 回の線形常微分方程式であるため、容易にとくことが出来、その解は

$$\frac{h'}{h_0} = \begin{cases} -1 + \exp(-x/\lambda_R) & \text{for } x > 0 \\ +1 - \exp(+x/\lambda_R) & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (1.1.18)$$

となる。ここで、 $\lambda_R \equiv f_0^{-1} \sqrt{gH}$  はロスビー変形半径と呼ばれる。なぜ、「変形半径」という名称がついているのであろうか？今までに何回か出てきたと思うが、流体力学を初めとする物理学は、ある基準量に対して  $1/e$  となる時間・空間スケールをその現象の代表的なスケールとして扱う慣例がある。大気の代表的な厚さがスケールハイトで代表されたのと同じである。図??は  $h'$  の初期の分布と (1.1.18) から得られる定常状態での分布である。これから明らかなように、調節過程の前後で  $h'$  は座標原点を中心とした左右のある範囲までが調節によって顕著に変化していることがわかる。この場における原点から測ったロスビー変形半径は黒線で示してある。したがって、変形半径という量は高度場が変動をうけた際、地衡風平衡に戻ろうとする調節作用の効果が有効に効く水平長さスケールと考えられる。つまり、調節によって「変形」の効果を顕著にうける「半径」ということになる。

逆に、 $|x| \gg \lambda_R$  では、 $h'$  はほとんど変化せずにそのままとなる。

このように得られた調節後の  $h'$  の場からそのときの速度場などは、(1.1.18) を (1.1.2) から (1.1.4) に代入することで求められる。つまり、

$$u' = 0, \quad v' = \frac{g}{f_0} \frac{\partial h'}{\partial x} = -\frac{gh_0}{f_0 \lambda_R} \exp(-|x|/\lambda_R) \quad (1.1.19)$$

である。この定常解 (1.1.19) を示したものが図 1.1 である。

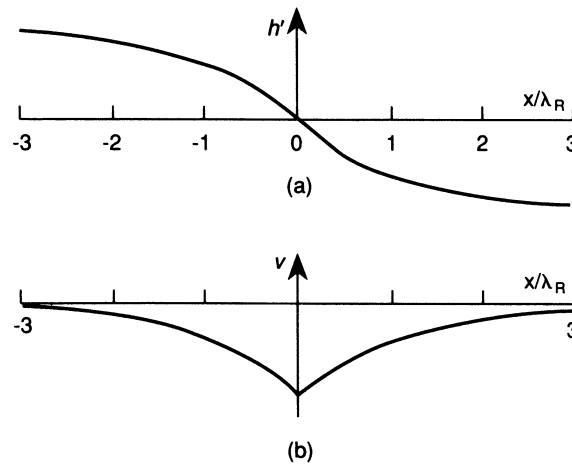


図 1.1: (1.1.13) で定義される初期状態からの調節に対応する地衡風平衡解。(a) 最終的な表面高度分布、(b) 最終状態における地衡風分布。( Gill 1982 )

さらに重要なことは、(1.1.19) は (1.1.2) から (1.1.4) について、 $\partial/\partial t = 0$  とするだけでは求められなかったことにある。この方法で得られる事実はただ単に、すべての擾乱が非発散の地衡風バランスを得て、

$$f_0 u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad f_0 v' = g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

という式を満足するということがわからない。この方法では、ポテンシャル渦度の保存という制約が考慮されていないからである。(1.1.2) - (1.1.4) からポテンシャル渦度方程式を得て、過渡期の任意の時間で流れに、ポテンシャル渦度を保存させるように制限をかけることではじめて、調節後の最終的な地衡風状態が得られる。この結果から明らかのように、最初静止状態であった風速の場は定常状態に到達すると原点を中心にある程度速度をもつことがわかる。また、その速度は地衡風バランスを満たすように吹くということもわかるであろう。エネルギーが保存するのであれば、この運動エネルギーは一体どこから発生したのであるだろうか？次に、調節の前後でのエネルギー論を考える。

調節過程の間におけるエネルギーがどのように変化するかは、初期状態と最終状態間のエネルギー変化を計算することで求めることができる。波動の章(??)で述べたが、単

位水平面あたりの波のポテンシャルエネルギーは

$$\int_0^{h'} \rho g z dz = \rho g h'^2 / 2$$

で計算できるので、調節している間の  $y$  についての単位長さあたりに<sup>\*5</sup>解放されるポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} & [\text{調節の始まりに持っていたポテンシャル}] - [\text{調節の後のポテンシャル}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho g h_0^2}{2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho g h'^2}{2} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\rho g h_0^2}{2} \left[ 1 - \left( 1 - e^{-x/\lambda_R} \right)^2 \right] dx = \boxed{\frac{3}{2} \rho g h_0^2 \lambda_R} \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

となる。ポテンシャルエネルギーが調節の前後でこれだけ減少しているので、この分が運動エネルギーに変化したと考えるのが妥当である。つまり、この運動エネルギーが静止状態の風速の場を駆動したのである。

では、この減少したポテンシャルエネルギーがすべて風速を駆動する運動エネルギーとして使われるのであろうか？これに関しても同様にエネルギーを計算することで求めることができる。つまり、ポテンシャルエネルギーの変化分と同様に、今度は運動エネルギーの変化分を計算すればよいのである。具体的に計算すると、

$$2 \int_0^{+\infty} \rho H \frac{v'^2}{2} dx = \rho H \left( \frac{g h_0}{f \lambda_R} \right)^2 \int_0^{+\infty} e^{-2x/\lambda_R} dx = \boxed{\frac{1}{2} \rho g h_0^2 \lambda_R} \quad (1.1.21)$$

となる。この結果と (1.1.20) から実は、ポテンシャルエネルギーの変化分が全て運動エネルギーに変換されるわけではなく、変換されるのはそのうちの 1/3 しかないということがわかる。つまり、調節の後、ポテンシャルエネルギーは 1/3 が運動エネルギーに変換され、2/3 がそのまま重力波の形で遠方まで放射されるということになる<sup>\*6</sup>。

上では時間依存問題を解かずに最終的な状態を議論できた。しかし、調節過程の時間発展を求めたいなら、初期条件 (1.1.13) から (1.1.15) をやっぱり解かなければならない。ロスビーの調節問題は線形で簡単な方程式であるので解析的に計算することも可能であるが、ここでは数値モデルを用いてその時間発展を考えてみることにしよう。実際にこの問題で設定されている状況で時間発展問題を計算する数値モデルを用いた結果は以下に述べる。

図 1.1 は初期時刻における  $h'$  の分布である。先に導入した初期条件と同様にステップ関数型の不連続な  $h'$  を与える。ここで、解析的な計算では無限領域を考えているが、数値計算を行う場合は無限領域に渡る計算ができないので、有限領域（ここでは 10 km）の計算を行う。境界条件はノイマン型と呼ばれる運動量フラックスがゼロとなる境界条件にしておく。

<sup>\*5</sup>  $y$  については一様な場として考えられるので、単位長さで代表させる。

<sup>\*6</sup> この問題ではエネルギーの変換量の 1/3 が運動エネルギーに変換されたが、この値は問題に依存するので 1/3 という数値に本質的な意味はないことに注意。

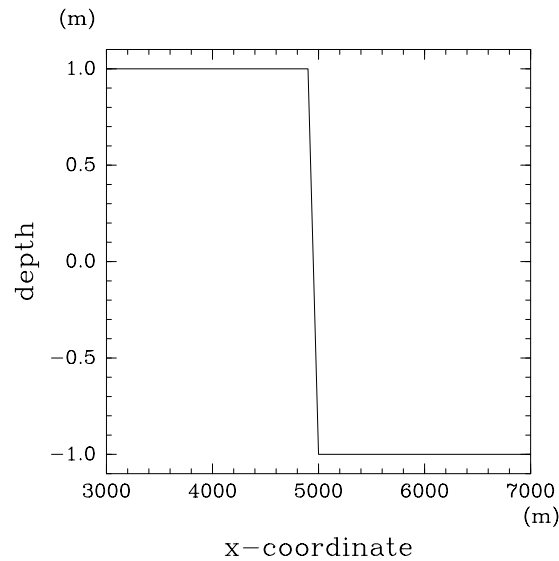


図 1.2: 初期における  $h'$  の分布。

図 1.1 は  $h'$  と  $v'$  のシミュレーションの時系列である。図 1.3(b) の黒線は領域中心から測ったロスビー変形半径であり、 $h'$  が調節を受けて変形する領域と変形半径の位置はほぼ一致している。この結果から、ある程度時間が経過すると、 $h', v'$  の場はともに定常状態に到達し、最初に静止していた場合は  $v'$  の速度をもった運動量を獲得していることがわかる。

さらに、図 1.1 はほぼ定常状態に到達したときの  $h', v'$  の分布を表している。この図から、定常状態の分布は理論から得られる結果 (図 1.1) とほぼ一致していることがわかる。

最後に、図 1.5 は計算開始初期における  $h'$  の時系列図である。この図から明らかなように、領域の中央から左右方向に  $h'$  の波が重力波という形で伝播し、その伝播速度は理論的な重力波の位相速度と一致していることもわかる。このことは、先に議論した重力波による調節過程を証明している。実際に重力波が外向きに伝播する様子をアニメーションにしたものは Web ページに gif 動画として掲載しているので参考にされたい。

以上、地衡風調節過程をまとめた図が 1.6 である。また、文章で記述すると以下のようになる。

## — 地衡風調節まとめ —

1. ある大気場が地衡風バランスからずれる。
2. 地衡風バランスからのずれが大きいところから、周囲にむけて重力波の放射が行われる。
3. 重力波のエネルギーは非バランスしている大気場のエネルギーから供給されているので、大気場のエネルギーは重力波の放射前後で変化する。
4. 一部は

ポテンシャルエネルギー → 重力波 → 運動エネルギー

という過程を通じて運動エネルギーを増加させる。

5. この運動エネルギーの増加によって大気場は非バランスにおける大気場と異なる状態で再びバランスするようになる。

なお、ここではポテンシャルエネルギーの場が非バランスしている状況を仮定したが、運動エネルギーの場が非バランスしている状況を考えても構わない。その場合も重力波の放射を伴って、エネルギーの変換が行われるが、先とは逆に運動エネルギーをエネルギー源として重力波が伝播し、一部がポテンシャルエネルギーへと変換される。

この調節という過程が存在することで大気場は地衡風バランスからずれても重力波を放射することで再びバランスさせようとする。



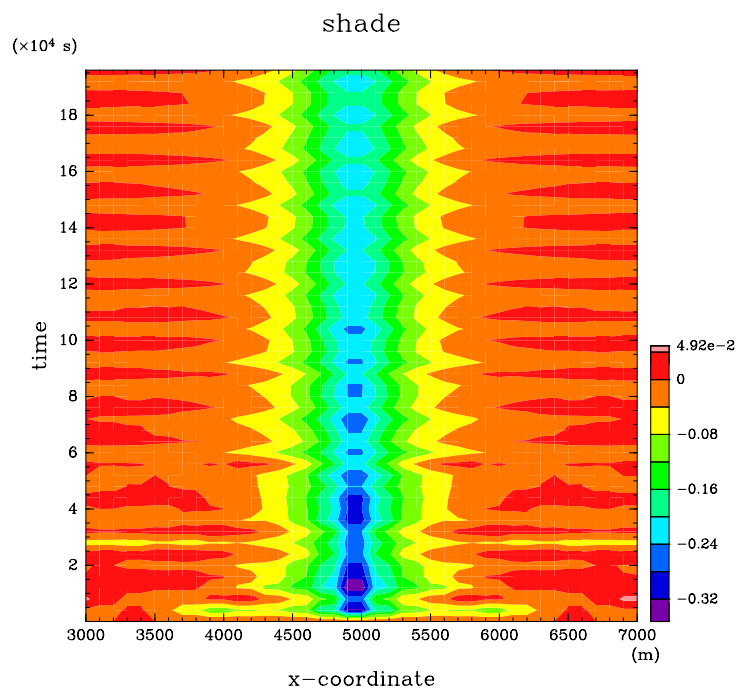
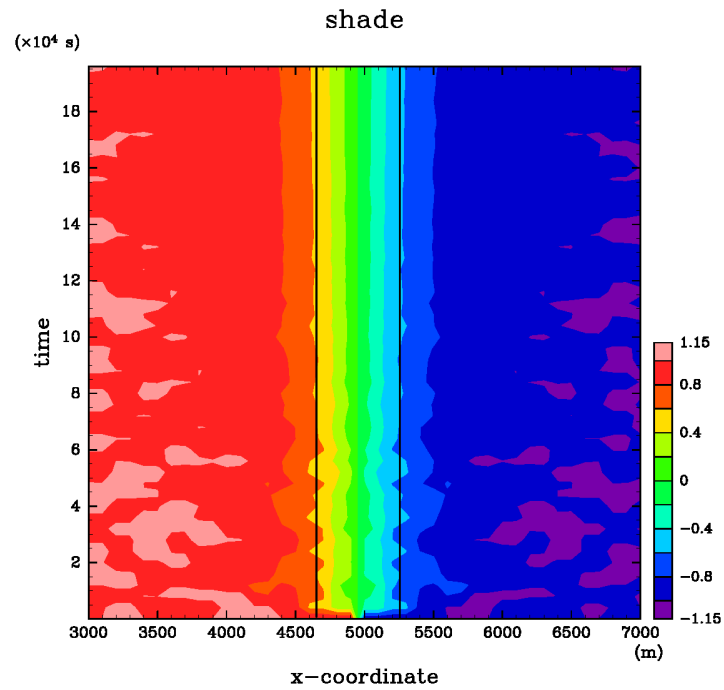
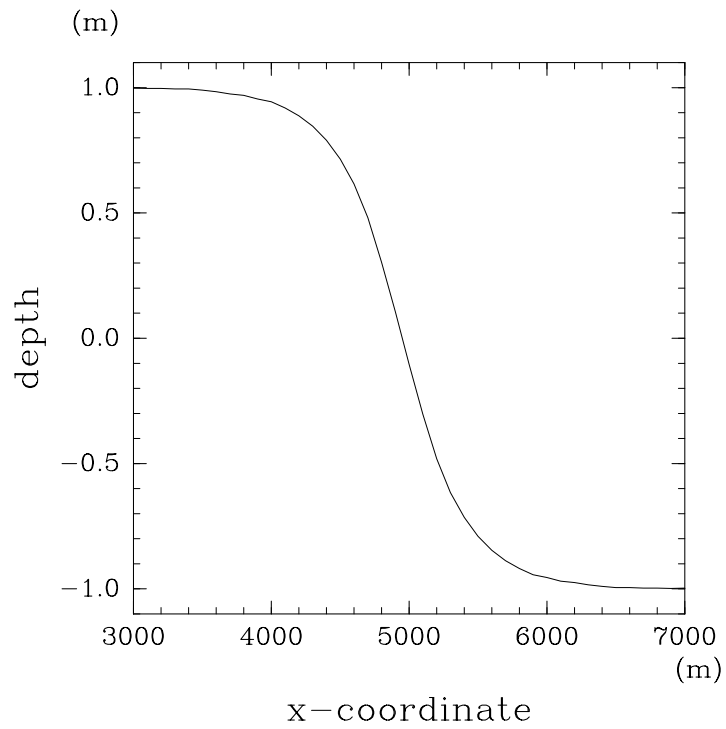
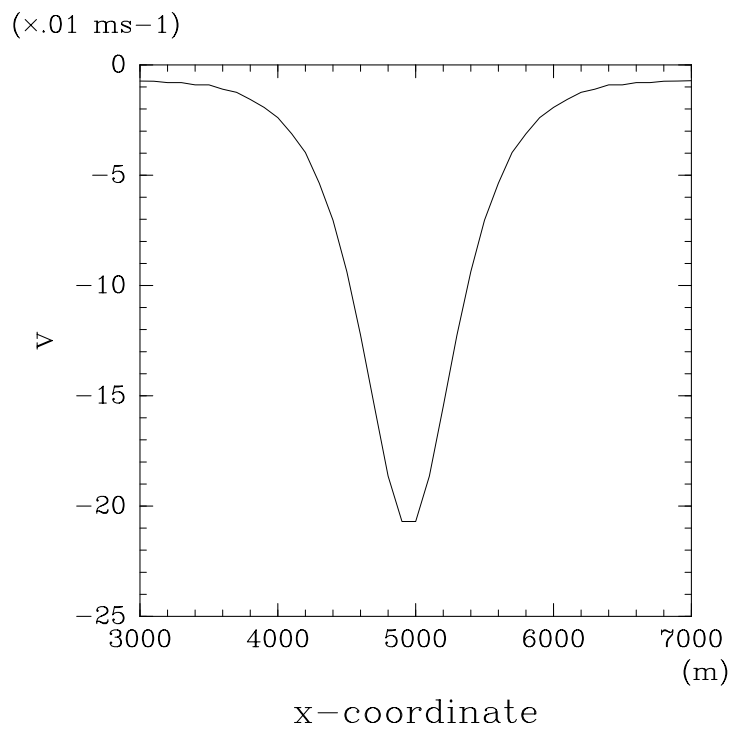


図 1.3: (a) 深さの時系列変化。黒線がロスビー変形半径。(b)  $v'$  の時系列変化



(a)



(b)

図 1.4: 定常状態での (a)  $h'$  と (b)  $v'$  の分布。

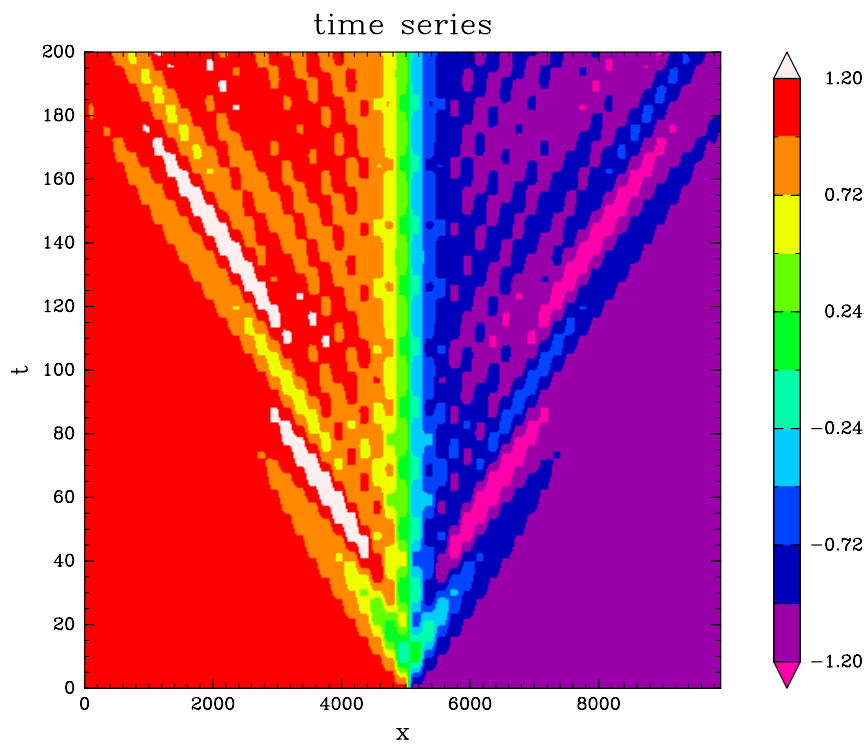
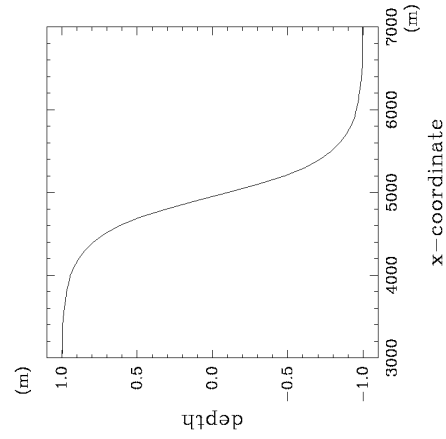


図 1.5: モデル初期における重力波の外側伝播.



バランス状態

地衡風調節作用



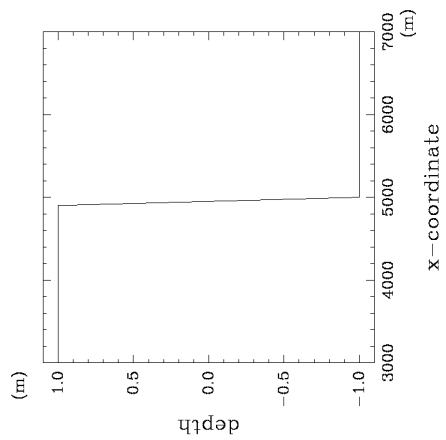
ポテンシャルエネルギー



地衡風運動エネルギー



重力波の外向き放射



非バランス状態

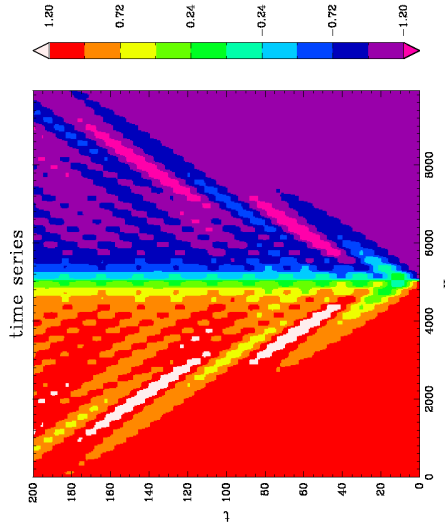


図 1.6: 地衡風調節の概念図.

調節過程の力学は、数値予報データの初期化とデータ同化について重要な役割を果たす。たとえば、高層気象観測によって得られるある点での物理量は一般に初期値における大気の場合について不釣り合い(バランスしていない)である。この不釣り合いがそのまま残っていると、このデータを元に作成された初期値を用いて行われる数値シミュレーションは計算初期に、まさに図 1.6 のような状態になる。つまり、初期の観測データによる不釣り合いが重力波を発生させる。この重力波は我々が興味のある現象の特徴的な速度スケールより一般に速いため、数値シミュレーションにおいて計算を不安定にさせる要因となる。

図??は実際の熱帯低気圧のシミュレーション開始付近における重力波の外向き伝播を表す図である。この図の時間変化のアニメーションは Web ページに掲載している。

#### 参考文献