

13.2.5 セミラグランジアン積分法

— 数値スキームの分類 —

オイラー的スキーム

- 空間に固定した格子点で時間積分を行う。
- 13.2.2,3,4 で議論された差分方法。

ラグランジュ的スキーム

- 流体パーセルの塊に印をつけて、各パーセルについて時間積分を行う。
- パーセルごとに評価するため、保存量そのまま保存される (水蒸気やエアロゾルの移流問題などに有効)。
- 理論的には可能であるが、現実的ではない。
- シアーと伸長による変形によって、狭い領域にパーセルを集中させるから、予報領域にわたって一様な解像度を維持できない (図 13.1 参照)。

図 13.1 は順圧非発散系における渦度の時間変化の図である。この図から、オイラー座標系では評価点が空間座標に固定されているので、時間に関わらず解像度は一様である。一方、ラグランジュ座標系では評価点が流体粒子に固定されているので、粒子の時間的な移動に伴い評価点も移動する。結果、収束発散が全くない順圧非発散系においても、時間経過とともにシアーと変形によって評価点の偏在が見られる。これは、ラグランジュ的スキームにおいて、評価点の解像度が時間とともに変化することを意味しており、解像度の一様性を担保できない一つの例となる^{*1}。

それでは、オイラー座標系で各物理量をラグランジュ的に評価すればよい。

— セミラグランジアン法 —

- オイラー座標系 (空間に固定された格子点) でラグランジュ微分を近似的に積分する。
- 解像度を維持しながら、ラグランジアンスキームの保存量を利用することができる。
- 数値的な安定性と高い精度を維持しながら、オイラースキームに比べて長い時間ステップをとれる (後述)。

^{*1}評価点の密度が薄い部分は周りの流体との混合による寄与も混ざっているため、この点に関してはシアーと変形のみによるものではないことに注意。しかし、評価点の密度が濃い部分は初期状態より集中しているのでシアーと変形に起因する評価点の局在化であるといえる。

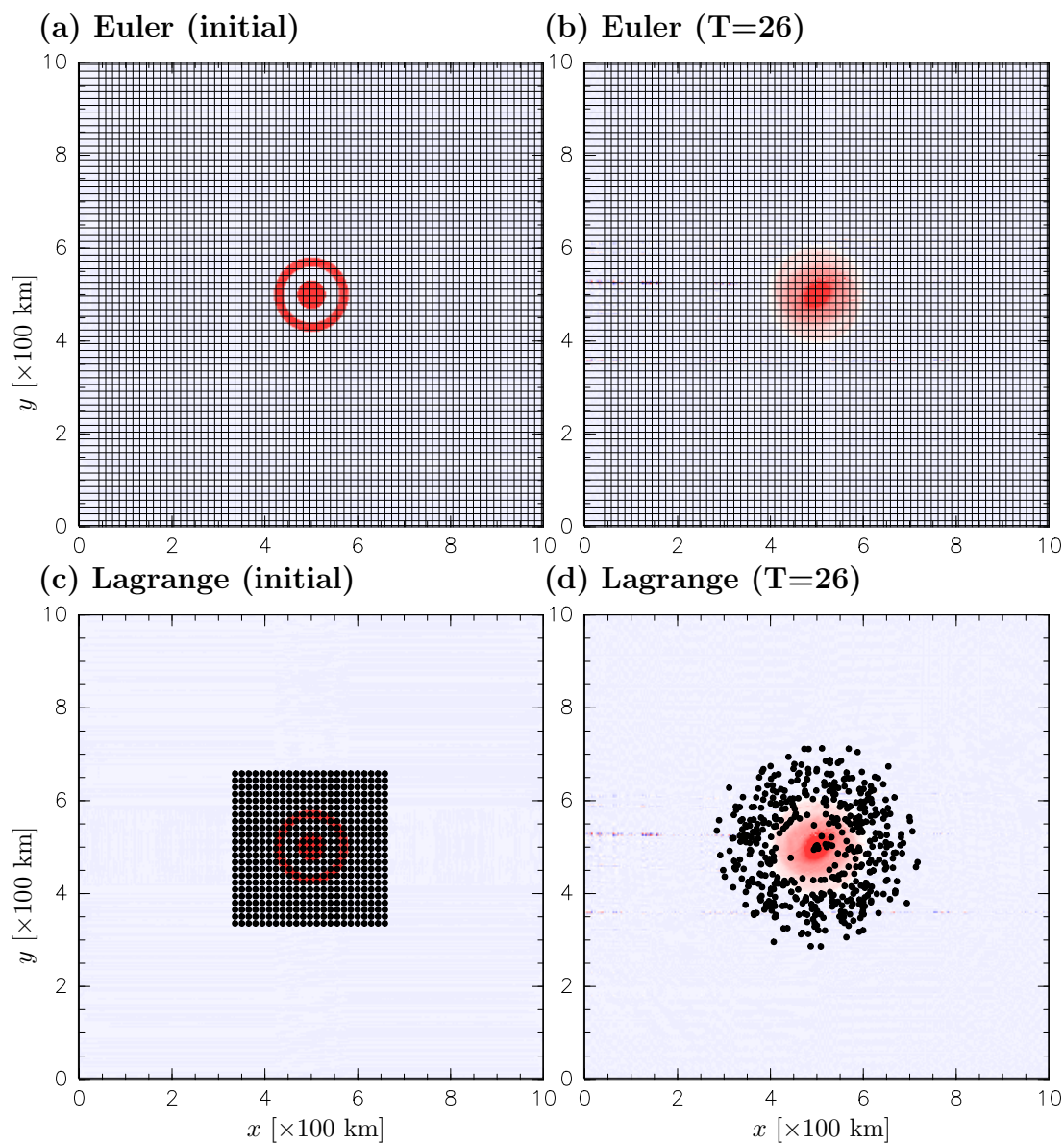


図 13.1: オイラー的スキームとラグランジュ的スキームにおける解像度の時間依存性. カラーはオイラー座標系で計算された順圧非発散系での相対渦度. 数値計算の評価点は (a), (b) がオイラー座標系で定義されており, (c), (d) はラグランジュ座標系で定義されている. (a), (c) および (b), (d) は同じ時刻を表している. (a), (b) の実線の交点がオイラー座標系での評価点, (c), (d) の各点がラグランジュ系での評価点をそれぞれ表している.

— 移流方程式 (13.6) による例 —

微分方程式

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (13.6)$$

q は速度 c で保存しながら移流する.

離散化方程式

$$\begin{aligned} q(x_m, t_s + \delta t) &= q(\tilde{x}_m^s, t_s), \\ \text{格子点 } x_m &= m\delta x, \text{ 時刻 } t_s = s\delta t, \\ \tilde{x}_m^s &= x_m - c\delta t, \quad (\text{時間方向に線形内挿の場合}). \end{aligned} \quad (13.24)$$

$\tilde{x}_m^s =$ 時刻 $t_s + \delta t$ で位置 x_m にいる気塊が時刻 t_s にいた位置. 通常この位置はオイラー格子点上にない (図 13.2).

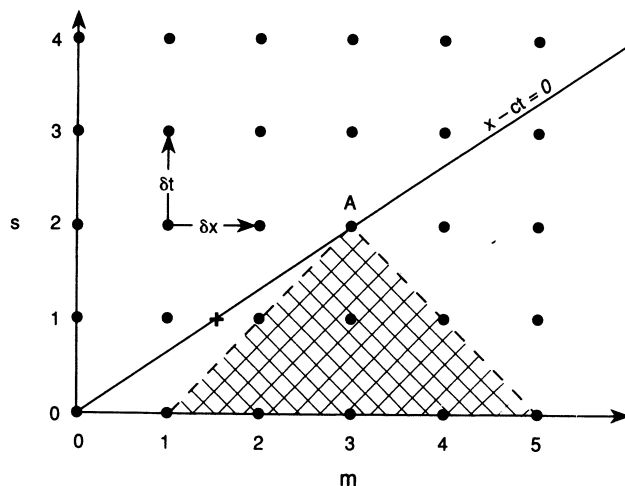


図 13.2: $x-t$ 空間における格子点に, 1次元線形移流方程式に対して, $m = 3$, $s = 2$ での陽的有限差分の依存領域を示したもの. 黒点は格子点. 斜めの直線は $q(x, t) = q(0, 0)$ に沿った特徴的な曲線, 交点はセミラグランジアン差分スキームに対して内挿された点 \tilde{x}_m^s である.

— 内挿による格子点外補間 —

- (13.24) の右辺の評価には時刻 t での格子点値による補間が必要.
- $c > 0$ に対して, 位置 \tilde{x}_m^s は格子点 x_{m-p} と x_{m-p-1} の間に存在 (p は図 13.2 参照).
- 補間として線形内挿を用いると,

$$q(\tilde{x}_m^s, t_s) = \alpha q(x_{m-p-1}, t_s) + (1-\alpha)q(x_{m-p}, t_s), \quad \alpha = \frac{x_{m-p} - \tilde{x}_m^s}{\delta x}. \quad (\text{AP.1})$$

したがって, 図 13.2 の場合, 点 A での q を予報するためには, $p = 1$ であり, 実際の解 (特性曲線) を挟む隣接 2 点, $m = 1$ と $m = 2$ の間で内挿される.

— セミラグランジアンスキームの特徴 —

- 数値解の影響領域 (1 ステップ先を求めるのに必要な情報点) が実際の解として
いる影響領域に対応.
- (図 13.2 に示されるリープフロッグのような) 陽的オイラースキームを用いるよりも, はるかに長い時間ステップに対して数値的に安定. 点 A での値を求めるためには, 必ず実際の解の隣接 2 点のオイラー座標系を用いるため.
- 精度よく保存量の値を保存し, **水蒸気のような保存量の移流**を計算することに対して特に有益.
- 移流速度が $O(100 \text{ m s}^{-1})$ となるジェット気流を扱う成層圏でのモデルなどにも有益.
- ただし, 物理量を保存する精度は**内挿方法に大きく依存**. 例えば, 線形内挿 (AP.1) では他のオイラースキームほどの精度はない (付録参照).
- もともとセミラグランジアン法には数値分散性が存在する (露木 1994; <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0880-09.pdf>).

— 2次元への拡張 —

$$q(x, y, t + \delta t) = q(x - u\delta t, y - v\delta t, t). \quad (13.25)$$

ここで, 速度 u, v は時刻 t での x, y 方向の流速成分.

付録

セミラグランジアンスキームの保存精度に対する内挿方法依存性

ここでは、格子点間内挿の手法の違いによるセミラグランジアンスキームの保存精度に対する依存性を検証し、オイラー系スキームに対する精度を比較する。

基礎方程式および初期・境界条件

基礎方程式

一定速度 c で移流する任意のスカラー量 q の時間発展方程式

$$\begin{aligned} \frac{Dq}{Dt} &= 0, & (\text{セミラグランジアンスキーム}) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, & (\text{オイラースキーム}). \end{aligned} \quad (\text{ap13.3.1})$$

初期条件

$$q_0 = q(x, t = 0) = \sin x.$$

境界条件

$$x_{m=1} = x_{m=M}, \quad M = \text{空間格子点数}.$$

厳密解

$$q = q(x, t) = \sin(x - ct).$$

この厳密解を真値として、以下に示す数値計算スキームを用いて移流方程式 (ap13.3.1) の数値解を求め、厳密解との誤差を比較する。スペクトル法による結果はオイラースキームで実現される数値解の精度の限界 (参照値) として併記する。

スキーム名	スキームの分類	時間方向の評価	空間方向の評価
Leap-Frog	陽的オイラー	リープフロッグ法 (13.8)	2次精度中央差分近似
Crank-Nicol	陰的オイラー	クランク・ニコルソン法 (13.19)	2次精度中央差分近似
Semi-Lag-L	セミラグランジアン	一定速度 c で線形内挿 (13.24)	線形内挿 (AP.1)
Semi-Lag-S	セミラグランジアン	一定速度 c で線形内挿 (13.24)	3次スプライン内挿
Spectrum	陰的オイラー	クランク・ニコルソン法	スペクトル法

ここで、計算領域の大きさ (L) は $L = 2\pi$ 、格子点数 (M) は $M = 101$ 、時間間隔 (δt) は $\delta t = 0.005$ で 4000 ステップ計算する。移流速度 (c) は $c = 1.0$ で固定しており、このときの σ は $\sigma = c\delta t/\delta x \approx 0.08$ となり、Leap-Frog の CFL 条件を満たしている。

図 13.3 は各スキームの初期値での q の分布 (a) とある時刻経過したときの q の分布 (b)

を表す. また, 図 13.4 は各スキームの厳密解からの空間平均絶対誤差 $E(t)$:

$$E(t) = \frac{1}{L} \int_0^L |q_N(x, t) - q_A(x, t)| dx$$

の時間変化を表す. ここで, L は領域の大きさ, q_N, q_A はそれぞれ各スキームでの数値解と厳密解を表す.

共通の性質として, いずれのスキームも時間とともに解析解との誤差がほぼ線形で増加していることがわかる. これは, 主に時間方向の数値的評価に由来するものである. セミラグランジアン法も移流速度 c で線形内挿しているので, その精度の時間変化は他のオイラースキームとほぼ同じである.

各スキーム間の特徴

線形内挿セミラグ (Semi-Lag-L) v.s. スプライン内挿セミラグ (Semi-Lag-S)

- 3 次スプライン内挿によって空間補間を行うと, 精度が 2 桁以上向上.

陽的オイラー (Leap-Frog) v.s. 陰的オイラー (Crank-Nicol)

- 空間微分および時間微分の数値的な評価方法がほぼ同じ精度のため, 誤差の時間変化およびその大きさはほとんど同じ.

オイラー v.s. 線形内挿セミラグ (Semi-Lag-L)

- 2 次精度の空間微分 (Leap-Frog, Crank-Nicol) と比較すると 1 桁以上精度が悪い.
- スペクトル法による空間微分 (Spectrum) と比較すると 4 桁も精度が悪い.

スプライン内挿セミラグ v.s. オイラー

- 2 次精度の空間微分 (Leap-Frog, Crank-Nicol) と比較すると精度が 1 桁よくなる.
- スペクトル法による空間微分 (Spectrum) と比較すると未だに 1 桁程度精度が悪い.
- ただし, 計算速度に関しては FFT 処理を必要とする Spectrum に比べて Semi-Lag-S は高速に動作することに注意. ^a.

^aただし, セミラグランジアン法がスペクトル法より高速に動作するのは方程式が非線形移流項を含む場合のみであることに注意する. 純線形移流方程式の場合, スペクトル法は時間積分の間に波数空間と物理空間の変換を必要としないので, セミラグランジアン法より高速に動作する.

以上より, セミラグランジアンスキームは内挿方法によって精度が大きく依存していることが示された. また, 内挿方法の選択によって, オイラースキームよりはるかに高精度となることが示された.

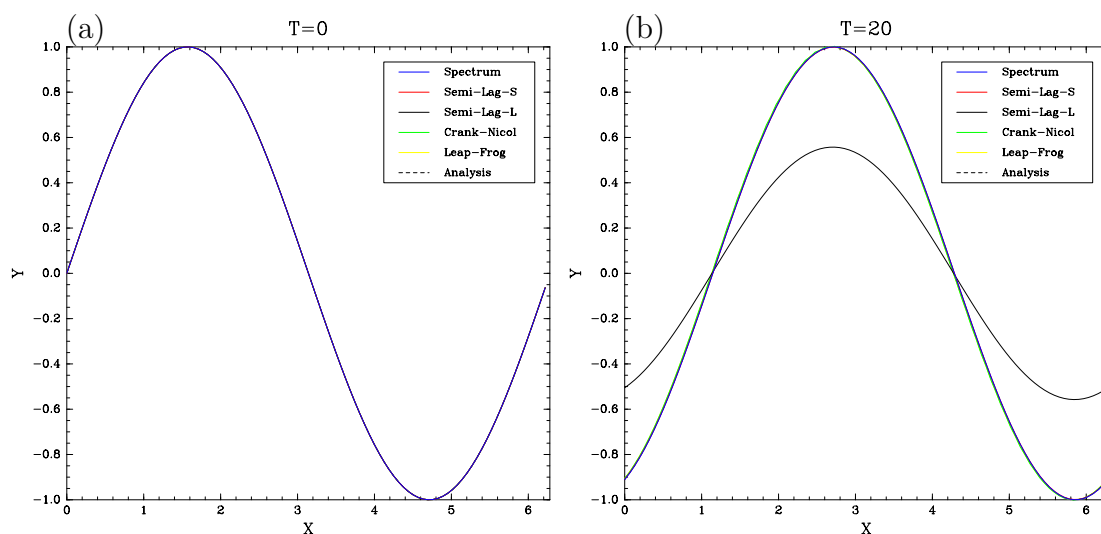


図 13.3: 各スキームごとの初期値における q の分布 (a), ある時刻経過したときの q の分布 (b).

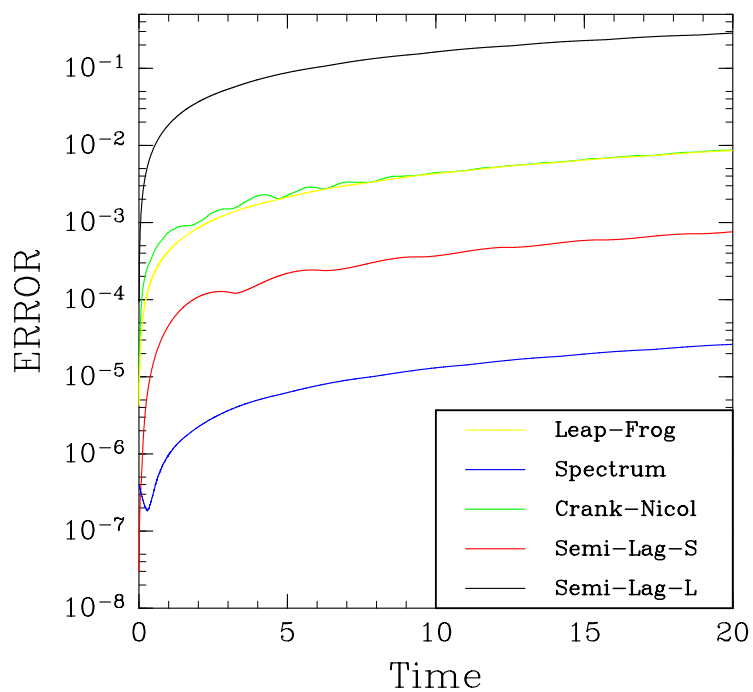


図 13.4: 各スキームごとの解析解からの空間平均誤差 $E(t)$. 縦軸は見やすいように対数表記になっていることに注意する. 大きな目盛り 1 つ分で誤差は 1 桁変わる.