

回転球殻ブシネスク熱対流の ベンチマーク

竹広 真一・佐々木洋平

2024 年 4 月 25 日

Christensen *et al.*(2001) による回転球殻ブシネスク熱対流のベンチマーク実験 (Case0) を再試行するための方程式と実験設定を記述する.

1 支配方程式

回転する球殻内の流体の熱対流を考える. 設定は

- ブシネスク近似を適用する.
- 外側・内側境界の温度は T_o と $T_o + \Delta T$ に固定されている.
- 外球半径 r_o に対する内球半径 r_i の比 $\xi = r_i/r_o$ は 0.35.
- 重力加速度 g は半径に比例する.

支配方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \alpha g T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

ここで \mathbf{u} , T は速度場と温度場である. p は圧力, ρ は密度であり一定である. α は熱膨張率, Ω は球殻の回転角速度, \mathbf{k} は回転軸方向の単位ベクトル, ν, κ は粘性拡散率, 熱拡散率である.

1.1 粘性拡散時間による無次元化

Christensen *et al.* (2001) にしたがったスケーリングは

- 長さスケールを球殻の厚さ $D = r_o - r_i$ とする. したがって無次元化された内外球の半径はそれぞれ $7/13$ と $20/13$.
- 時間スケールを粘性拡散時間 D^2/ν
- 速度スケールを粘性速度 ν/D
- 温度スケールを温度差 ΔT , 外側境界の温度を 0 とする
- 非静水圧力 P のスケールは $\rho\nu\Omega$

スケーリングされた方程式系は

$$E \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right) + 2\mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla P = R_a \frac{\mathbf{r}}{r_o} T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (6)$$

ここで

$$R_a = \frac{\alpha g_o \Delta T D}{\nu \Omega}, \quad E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (7)$$

はそれぞれ修正レイリー数, エクマン数, プランドル数である. ただし α, g_o は膨張率と外側球での重力加速度, κ は熱拡散率である.

境界での速度は粘着条件で与える. すなわちそれぞれの境界に相対的な速度が 0 となる.

1.2 回転角速度による無次元化

回転時間で無次元化したスケーリングは

- 長さスケールを球殻の厚さ $D = r_o - r_i$ とする. したがって無次元化された内外球の半径はそれぞれ $7/13$ と $20/13$.
- 時間スケールを粘性拡散時間 $1/\Omega$
- 速度スケールを粘性速度 ΩD
- 温度スケールを温度差 ΔT , 外側境界の温度を 0 とする
- 非静水圧力 P のスケールは $\rho\Omega^2 D^2$

スケーリングされた方程式系は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - E \nabla^2 \mathbf{u} + 2\mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla P = R_a^* \frac{\mathbf{r}}{r_o} T, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = E_\kappa \nabla^2 T, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (10)$$

ここで

$$R_a = \frac{\alpha g_o \Delta T}{\Omega^2 D}, \quad E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad E_\kappa = \frac{\kappa}{\Omega D^2} = \frac{E}{P_r}, \quad (11)$$

はそれぞれ修正レイリー数, エクマン数, 熱エクマン数であり, $P_r = \nu/\kappa$ はプラントル数である. 修正レイリー数 R_a^* とオリジナルのダイナモベンチマーク (Christensen *et al.* 2001) の修正レイリー数 $R_a = \alpha g_o \Delta T D / \nu \Omega$ との関係は $R_a^* = R_a E$ である.

境界での速度は粘着条件で与える. すなわちそれぞれの境界に相対的な速度が 0 となる.

2 実験設定

ベンチマーク実験に用いられた無次元数は以下の通り.

E	R_a	R_a^*	P_r
10^{-3}	100	0.1	1

表 1: ベンチマーク実験の無次元数.

3 初期条件

初期条件は, 静止状態 $\mathbf{u} = 0$ であり, 温度場は

$$T = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{210A}{\sqrt{17920\pi}} \times (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) \sin^4 \theta \cos 4\phi, \quad (12)$$

ここで θ は余緯度, ϕ は経度, $x = 2r - r_i - r_o$ である. 振幅は $A = 0.1$ に設定する.

4 実際に解くべき式

非発散の速度場と磁場を表現するために、トロイダル・ポロイダルポテンシャルを次のように導入する.

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\Psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\Phi \mathbf{r}), \quad \mathbf{B} = \nabla \times (g \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (h \mathbf{r}). \quad (13)$$

4.1 粘性拡散時間による無次元化

Christensen *et al.* (2001) にしたがったスケーリングで運動方程式に $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$, $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させて,

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 \Psi = \mathbf{r} \cdot \nabla \times \left[\left(\frac{2}{E} \mathbf{k} + \boldsymbol{\zeta} \right) \times \mathbf{u} \right], \quad (14)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 \Phi - \frac{R_a}{Er_o} L_2 T = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \left[\left(\frac{2}{E} \mathbf{k} + \boldsymbol{\zeta} \right) \times \mathbf{u} \right], \quad (15)$$

と表される¹. ここで $\boldsymbol{\zeta} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度である.

温度の式はかわらない.

$$\left(\frac{1}{Pr} \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) T = \mathbf{u} \cdot \nabla T. \quad (18)$$

¹コリオリ項を陽に微分で表すと (Zhang and Busse 1987)

$$\begin{aligned} \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \frac{2}{E} \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \Psi - \frac{2}{E} Q \Phi &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \\ \left[\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \frac{2}{E} \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \Phi + \frac{2}{E} Q \Psi - \frac{R_a}{Er_o} L_2 T &= -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}). \end{aligned}$$

ここで微分演算子 L_2, Q は次式で定義される:

$$L_2 \equiv -r^2 \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}, \quad (16)$$

$$Q \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \mathbf{k} \cdot \nabla + \mathbf{k} \cdot \nabla L_2). \quad (17)$$

(14), (15) の右辺非線形項は恒等式

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$$

を用いて変形した.

温度境界条件は

$$T = 1 \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad T = 0 \text{ at } r = \frac{1}{1-\xi}. \quad (19)$$

速度境界条件は

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \Psi = 0 \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, \frac{1}{1-\xi}. \quad (20)$$

4.2 回転角速度による無次元化

回転角速度による時間スケールリングでの運動方程式に $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$, $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させて、トロイダル、ポロイダルポテンシャルの式が得られる。

$$\left(E \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 \Psi = \mathbf{r} \cdot \nabla \times [(2\mathbf{k} + \boldsymbol{\zeta}) \times \mathbf{u}], \quad (21)$$

$$\left(E \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 \Phi = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times [(2\mathbf{k} + \boldsymbol{\zeta}) \times \mathbf{u}]. \quad (22)$$

ここで $\boldsymbol{\zeta} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度である。温度の式はかわらない。

$$\left(E_\kappa \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) T = \mathbf{u} \cdot \nabla T. \quad (23)$$

温度境界条件は

$$T = 1 \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad T = 0 \text{ at } r = \frac{1}{1-\xi}. \quad (24)$$

速度境界条件は

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad \Psi = 0 \text{ at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, \frac{1}{1-\xi}. \quad (25)$$

5 ベンチマーク結果

比較する数値は,

$$E_{kin} = \frac{1}{2V_s} \int_{V_s} |\mathbf{u}|^2 dV, \quad (26)$$

$$T, u_\phi \text{ at } r = \frac{r_i + r_o}{2}, \theta = \frac{\pi}{2} \text{ and } u_r = 0, \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} > 0, \quad (27)$$

$$(28)$$

	粘性時間無次元化	回転時間無次元化
E_{kin}	58.348 ± 0.050	$(5.8348 \pm 0.50) \times 10^{-5}$
T	0.42812 ± 0.00012	0.42812 ± 0.00012
u_ϕ	-10.1571 ± 0.0020	$(-1.01571 \pm 0.020) \times 10^{-2}$
ω	0.1824 ± 0.0050	$(1.824 \pm 0.0050) \times 10^{-4}$

表 2: ベンチマーク論文 (Christensen et al. 2001) でのレファレンス値.

解像度 (N_ϕ, N_θ, N_r)	T42L21 (64, 32, 32)	T170L32 (256, 128, 48)	T511L64 (1152, 768, 64)
E_{kin}	5.896041×10^{-5}	5.834621×10^{-5}	5.834621×10^{-5}
T	0.4286896	0.4280588	0.4280875
u_ϕ	-1.030605×10^{-2}	-1.015505×10^{-2}	-1.015712×10^{-2}
ω	1.833218×10^{-4}	1.81211×10^{-4}	1.821857×10^{-4}

表 3: SPMODEL 球殻対流プログラムのベンチマーク.

粘性拡散時間無次元化と回転時間無次元化での量を, 上付き添え字 $(\)^\nu$ と $(\)^\Omega$ で表すと, それらの間の関係は

$$\mathbf{u}^\Omega = E\mathbf{u}^\nu, \quad E_{kin}^\Omega = E^2 E_{kin}^\nu, \quad \omega^\Omega = E\omega^\nu, \quad T^\Omega = T^\nu, \quad (29)$$

文献

Christensen, U. R., Aubert, J., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G. A., Grote, E., Honkura, Y., Jones, C., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., Zhang, K., 2001 : A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25–34.

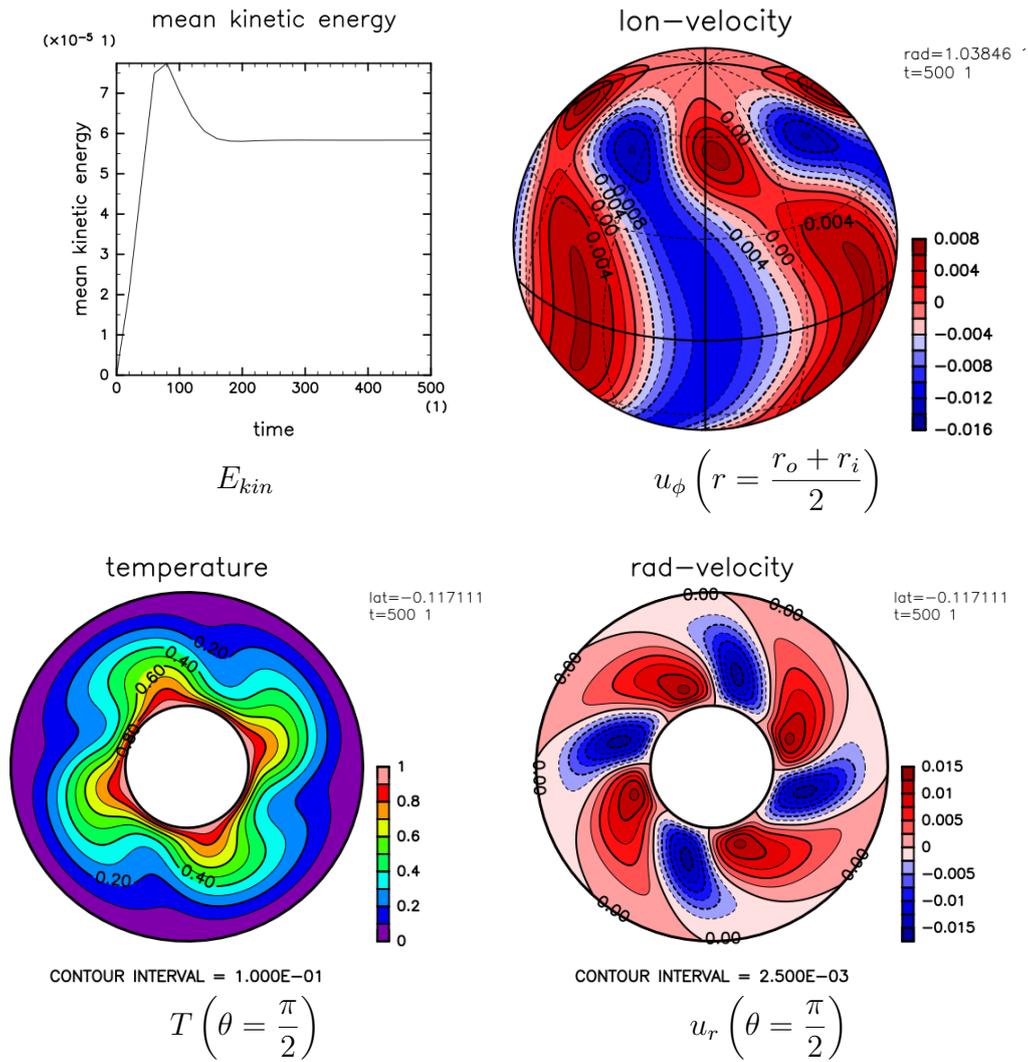


図 1: ダイナモベンチマーク Case0 の計算結果. T511L64 の場合.