

ソリトンの数理

—逆散乱法による KdV 方程式の解法—

Mathematical theory of solitons
— Inverse scattering method for solving the KdV
equation —

北海道大学理学部地球科学科地球流体力学研究室 4 年

Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, Department of Earth Sciences, Faculty of
Science, Hokkaido University

山下 達也

YAMASHITA Tatsuya

2007 年 1 月 26 日

要旨

本論文では非線形偏微分方程式の代表例である Korteweg - de Vries 方程式 (KdV 方程式) を逆散乱法と呼ばれる方法で解析的に解くことができることを確かめた。逆散乱法によって得られる解はソリトン解と呼ばれ、主に次の2つの性質を有する。第一に単独では一定の速さ、形状を保ったまま伝播する。第二に複数個のソリトンが衝突したとき、その前後で個々のソリトンの形状は一定に保たれる。これらのソリトンの性質について、解析的な方法を用いて考察し、さらにスペクトルモデルを用いて簡単な数値計算を行なった。

目次

第1章 序論	4
1.1 ソリトンとは	4
1.2 ソリトン研究の歴史	5
1.3 本論文の構成	7
第2章 散乱理論	8
2.1 KdV 方程式と散乱の関係	8
2.2 散乱問題の一般的手法	13
2.2.1 基本解	13
2.2.2 反射係数と透過係数	19
2.2.3 反射係数, 透過係数の極	22
2.2.4 透過係数の留数	32
2.2.5 2.2 節のまとめ	34
2.3 Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式	36
第3章 逆散乱理論	44
3.1 ポテンシャル $u(x)$ と関数 $A_R(x, y)$, $A_L(x, y)$ との関係	44
3.2 無反射ポテンシャル	48
第4章 逆散乱法による KdV 方程式の解法	55
4.1 散乱データの時間依存性	55

2	ソリトンの数理	目次
4.2	N=1 の無反射ポテンシャル (1 ソリトン解)	59
4.3	N=2 の無反射ポテンシャル (2 ソリトン解)	64
4.4	N=3 の無反射ポテンシャル (3 ソリトン解)	80
4.5	数値計算の結果とその考察	109
第 5 章	まとめ	125
付録 A	5 階 KdV 方程式	126
付録 B	(2.2.17) , (2.2.21) の積分の $\text{Im } k > 0$ での収束性	130
付録 C	sech^2 型の無反射ポテンシャル	134
付録 D	双曲線関数に関する公式集	141
	謝辞	143
	参考文献	144

目次

1.1	Zabusky , Kruskal の数値実験の再現	6
4.1	$p_1 = 1 , \delta = 0$ の場合のソリトンの伝播	62
4.2	2ソリトン解 (4.3.31) の図 (1)	73
4.3	2ソリトン解 (4.3.31) の図 (2)	74
4.4	$p_1 = 1 , p_2 = 2 , p_3 = 0 , \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ の場合の3ソリトンの 伝播 (1)	107
4.5	$p_1 = 1 , p_2 = 2 , p_3 = 0 , \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ の場合の3ソリトンの 伝播 (2)	108
4.6	初期条件 $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解	110
4.7	初期条件 $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解	112
4.8	初期条件 $u(x, 0) = -12 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解	114
4.9	厳密な初期条件 $u(x, 0) = -12 \frac{4 \cosh(2x+3.2) + \cosh(4x+25.6) + 3}{[3 \cosh(x+11.2) + \cosh(3x+14.4)]^2}$ を与えた場 合の数値解	116
4.10	近似解に基づいた初期条件 $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x+1.05) - 8 \operatorname{sech}^2(2x+$ $13.35)$ を与えた場合の数値解	117
4.11	初期条件 $u(x, 0) = -4 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解	119
4.12	初期条件 $u(x, 0) = -8 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解	120
4.13	初期条件 $u(x, 0) = -10 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解	121
4.14	初期条件 $u(x, 0) = -\frac{2}{x^2+1}$ を与えた場合の数値解	123
4.15	初期条件 $u(x, 0) = -xe^{-x^2}$ を与えた場合の数値解	124

第1章 序論

1.1 ソリトンとは

この世界には様々な性質を持った波が存在する．これから本論文で議論するソリトン(soliton) はきわめて特殊な性質をそなえた波である．ソリトンとは，時間がどれだけ経過しても，あるいは衝突してもその形が崩れない，極めて安定な孤立波(solitary wave) のことである．孤立波とは山または谷を一つしか持たない波のことを指す¹．

現在，ソリトンを記述する方程式は複数存在することが知られている．その中で歴史的に最も古く，最も有名なものは Korteweg and de Vries (1895) によって導き出された Korteweg-de Vries 方程式 (KdV 方程式) である．空間座標を x ，時間座標を t ，ソリトンの変位を $u(x, t)$ とすると，KdV 方程式は以下の形で表現できる．

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1.1)$$

ただし， u に関する下付き添字はその変数で 1 回偏微分することを意味するものとする．(1.1.1) から分かるとおり，KdV 方程式は非線形方程式である．したがって，線形方程式のように重ね合わせの原理を用いて解を構成することはできず，一見解くことは困難であるように思われる．しかし，有難いことに私達はこの KdV 方程式を厳密に解くことができるのである．現在では，KdV 方程式の解法は幾つも存在することが知られている．本論文ではその解法の 1 つである逆散乱法(inverse scattering method) について考察し，得られた解，すなわちソリトン解の興味深い特徴について議論する．

¹ 孤立波に対して，山谷が複数存在し，連続的に分布している波のことを連続波または連成波と呼ぶ．

1.2 ソリトン研究の歴史

本論に入る前に、この節ではソリトン研究の歴史を概観することとしよう。ソリトンの発見は意外にも古い。1834年、イギリスの Scott Russell はスコットランドのグラスゴー運河で船の先端から発した孤立波が形状を全く変えずに上流へと伝播していくのを偶然発見した。その後、彼は水槽で実験を行い、孤立波の性質について研究を行なった (Russell, 1844)。Russell の研究を受けて、Boussinesq (1871)、Rayleigh (1876) は孤立波が物理的に存在可能であることを解析的に示した。更に、Korteweg and de Vries (1895) は水面の孤立波の時間発展を記述する KdV 方程式を導出することに成功した。KdV 方程式は 1.1 節で見たとおり非線形方程式であり、この時点ではその解法が見出されることはなかった。

その後、孤立波や KdV 方程式はほとんど忘れ去られていたが、20 世紀に入り再び注目されることとなった。Zabusky and Kruskal (1965) は非線形格子の振舞いが KdV 方程式で近似的に記述できることを見出した。そこで彼らは、当時発達し始めた計算機を使って、KdV 方程式を数値的に解いた。その結果、孤立波の伝播速度は大きさによって異なること、そして複数の孤立波は互いに衝突を繰り返すものの、通過後は元の形に戻ることを発見した。図 1.1 に Zabusky, Kruskal の数値実験をスペクトルモデルによって再現したものを示す。彼らはこれらの孤立波がまるで粒子のように個々のアイデンティティを保つという意味で、これらの孤立波にソリトンという名前を付けた。この再発見を契機としてソリトンの研究は急速に発展することとなった。そしてそのわずか 2 年後、Gardner et al. (1967) によって KdV 方程式を厳密に解くための方法、逆散乱法が発見されたのだ²。

このように、ソリトンの理論は解析的方法と数値計算的方法とがともに十分に機能して成功を収めた代表例とすることができる。

²その後、1971 年には広田良吾によって逆散乱法を経由しないで KdV 方程式を解く方法が発見された。この解法は直接法(direct method)または 広田の方法(Hirota's method) と呼ばれる。詳細については Hirota(1971)、広田 (1992) などを参照されたい。

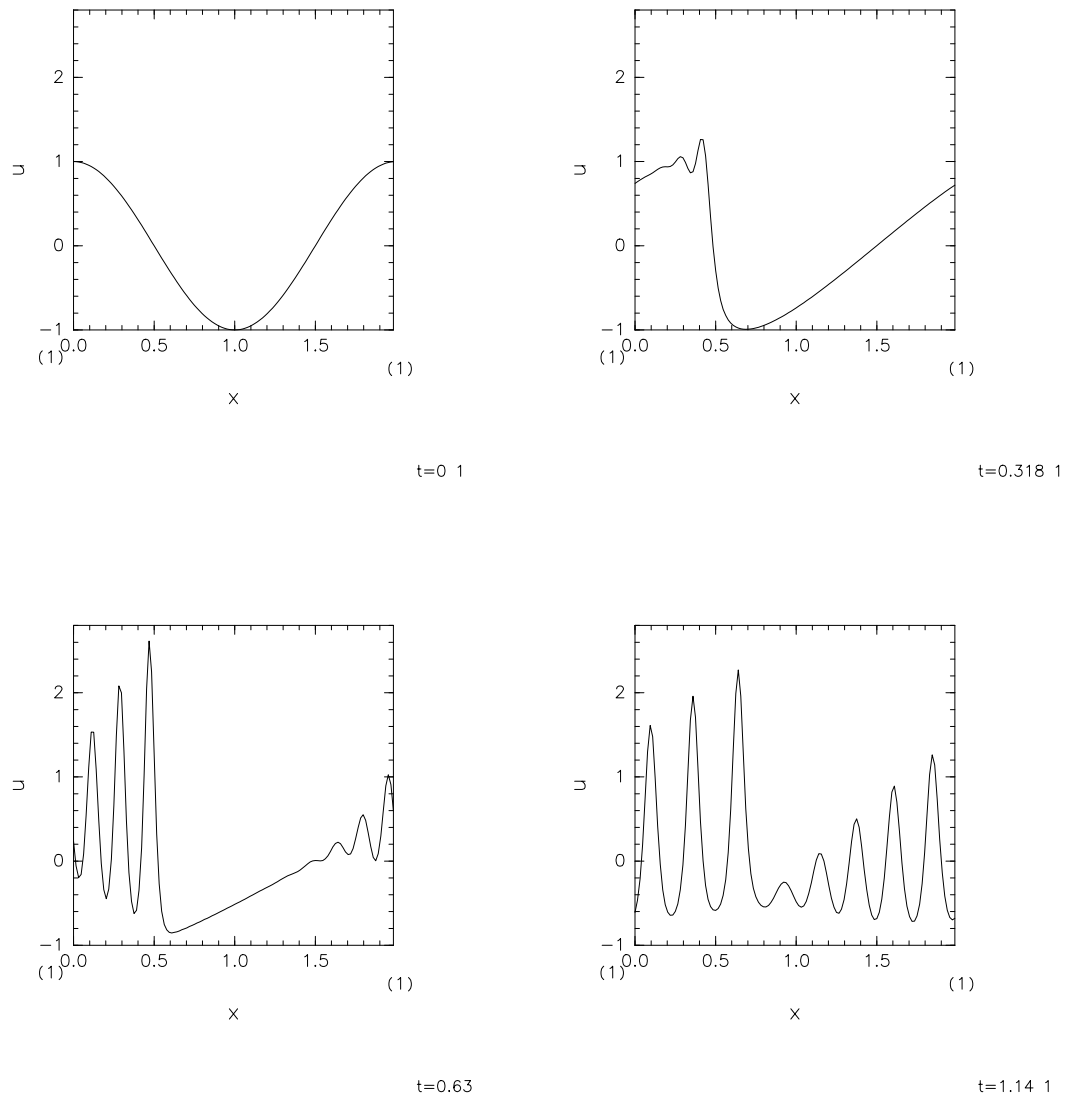


図 1.1: Zabusky , Kruskal の数値実験の再現 . 一般的な KdV 方程式 $u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$ で $\delta = 0.022$ として初期条件 $u(x, 0) = \cos(\pi x)$, 周期条件 $u(x, t) = u(x + 2.0, t)$ を課して計算した . 左上 , 右上 , 左下 , 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.318, 0.636, 1.140$ における $u(x, t)$ の空間分布を示す . $x = 0.5$ 付近で徐々に勾配が急となり , 時刻 $t = 0.316$ でほとんど突っ立った状態になる . その後 , $x = 0.5$ の突っ立ちから孤立した波が現れ , 時間とともにその数が増え , $t = 1.140$ になると 8 つの孤立波を確認することができる .

1.3 本論文の構成

一般に1次元の場合，障害物に対して波が入射するとき，反射する波と透過する波とが発生する．このような物理過程を散乱(scattering)と呼んでいる．波の散乱の問題を考えると，どこが出発地点で何を目標とするのかという観点で問題を大きく2つに分類することができる．散乱の原因となる障害物の形(ポテンシャルと呼ぶことにする)が分かっている，それをもとに散乱した波がどうなるのかを求める問題を単に散乱問題(scattering problem)と呼ぶ．また，散乱した波のデータが分かっている，その情報をもとにポテンシャルを求める問題を逆散乱問題(inverse scattering problem)と呼ぶ．逆散乱法とは逆散乱問題を利用した解法であると言える．したがって逆散乱法を理解するには，散乱の知識をある程度必要とすることになる．そこで，少々まわりくどいように思われるかもしれないが，まず第2章では波の散乱理論について議論することにしよう．そしてその次の第3章で逆散乱理論を議論しよう．第4章では逆散乱理論を利用して，実際にKdV方程式を解いてみることにする．さらに数値計算の結果も考慮しながらソリトンの性質を議論する．最後に第5章で全体のまとめを行なう．

第2章 散乱理論

2.1 KdV 方程式と散乱の関係

逆散乱問題を考えるときに、KdV 方程式と散乱との間にはどのような関係があるのだろうかという疑問を抱く人は少なくないはずである。そこでこの節では散乱を記述する Sturm-Liouville 方程式と KdV 方程式の関係をも Lax (1968) が考案した方法で探っていくことにしよう。

波の散乱の基本方程式である Sturm-Liouville 方程式は 1 次元の場合

$$y_{xx} + [\lambda - u(x)]y(x) = 0 \quad (2.1.1)$$

と表現できる。\$y(x)\$ は固有関数(変位)、\$\lambda\$ は固有値、\$u(x)\$ はポテンシャルを表す¹。本論文では 1 次元の場合のみを考えることとする。ここで、\$y(x)\$、\$u(x)\$、\$\lambda\$ が任意のパラメータ \$t\$ にも依存している場合を考えよう。このとき、(2.1.1) は単純に

$$y_{xx} + [\lambda(t) - u(x, t)]y(x, t) = 0 \quad (2.1.2)$$

と書き換えられる。Lax は (2.1.2) で \$\lambda\$ がパラメータ \$t\$ に依存しないとき、つまり \$d\lambda/dt = 0\$ を満たすとき、\$u\$ の \$t\$ に関する微分方程式は無数に存在し、その中の 1 つが KdV 方程式となっていることを発見した²。以下、Lax の着想した方法にしたがって KdV 方程式を導出する。

まず、微分演算子 \$D\$ を

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.1.3)$$

と定義する。このとき (2.1.2) は

$$Ly = \lambda y \quad (2.1.4)$$

¹(2.1.1) は量子力学の「定常状態における Schrödinger 方程式」と同じ表式である。量子力学では \$y(x)\$ を定常状態の波動関数(wave function)と呼ぶ。

²\$d\lambda/dt = 0\$ を満たす別の方程式として例えば 5 階 KdV 方程式(fifth-order KdV equation)が挙げられる。付録 A では Lax の方法による 5 階 KdV 方程式の導出を行なった。

と書き換えられる．ただし， L は微分演算子であり，

$$L \equiv -D^2 + u(x, t) \quad (2.1.5)$$

と定義した．ここで演算子 L を t の関数とみなして (2.1.4) を t について偏微分すると，

$$(Ly)_t = \lambda_t y + \lambda y_t \quad (2.1.6)$$

となる．ここで $(Ly)_t$ を計算すると，

$$\begin{aligned} (Ly)_t &= (-y_{xx} + uy)_t \\ &= -y_{xxt} + u_t y + u y_t \\ &= -D^2 y_t + u_t y + u y_t \\ &= Ly_t + u_t y \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

となる．(2.1.7) を (2.1.6) に代入すると，

$$Ly_t + u_t y = \lambda_t y + \lambda y_t \quad (2.1.8)$$

となる．いま線形微分演算子 B によって y_t が

$$y_t = B y \quad (2.1.9)$$

と表現できると仮定すると，(2.1.8) は形式的に

$$L B y + u_t y = \lambda_t y + B \lambda y = \lambda_t y + B L y \quad (2.1.10)$$

と書き換えられる．ただし式変形において (2.1.4) を用いた．さらに (2.1.10) を整理すると，

$$[u_t + LB - BL]y = \lambda_t y \quad (2.1.11)$$

が得られる．いま $\lambda_t = 0$ が満たされていると仮定すると，(2.1.11) より

$$[u_t + LB - BL]y = 0 \quad (2.1.12)$$

が満たされることになる．逆に，(2.1.12) をうまく満たすように演算子 B を決めると，任意の t について $\lambda_t = 0$ が成立することになる．

ここで，天下りの的であるが a を定数， f, g を x, t の関数として演算子 B が

$$B = aD^3 + fD + g \quad (2.1.13)$$

という形で書ける場合について考えよう．ここでの我々の目標は (2.1.13) を (2.1.12) に代入して f, g を定め，KdV 方程式を導くことである．まず， $L B y$ を計算すると，

$$\begin{aligned} L B y &= (-D^2 + u)(aD^3 + fD + g)y \\ &= -D^2(aD^3 + fD + g)y + u(aD^3 + fD + g)y \\ &= -D(aD^4 + f_x D + fD^2 + g_x + gD)y + u(aD^3 + fD + g)y \\ &= -(aD^5 + f_{xx} D + 2f_x D^2 + fD^3 + g_{xx} + 2g_x D + gD^2)y + u(aD^3 + fD + g)y \end{aligned}$$

となる．一方， BLy を計算すると，

$$\begin{aligned}
BLy &= (aD^3 + fD + g)(-D^2 + u)y \\
&= -aD^5y + aD^3(uy) - fD^3y + fD(uy) - gD^2y + gu y \\
&= -aD^5y + a(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2 + uD^3)y - fD^3y + f(u_x + uD)y \\
&\quad - gD^2y + gu y \\
&= -aD^5y - fD^3y + gu y \\
&\quad + a(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2 + uD^3)y + f(u_x + uD)y - gD^2y
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
LBy - BLy &= -(aD^5 + f_{xx}D + 2f_xD^2 + fD^3 + g_{xx} + 2g_xD + gD^2)y + u(aD^3 + fD + g)y \\
&\quad + aD^5y + fD^3y - gu y - a(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2 + uD^3)y \\
&\quad - f(u_x + uD)y + gD^2y \\
&= -(f_{xx}D + 2f_xD^2 + g_{xx} + 2g_xD)y \\
&\quad - a(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2)y - fu_xy \\
&= -(2f_x + 3au_x)D^2y - (f_{xx} + 2g_x + 3au_{xx})Dy - (g_{xx} + au_{xxx} + fu_x)y
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

と書ける．ここで， D^2y と Dy の係数がゼロになると仮定すると，

$$2f_x + 3au_x = 0, \tag{2.1.15}$$

$$f_{xx} + 2g_x + 3au_{xx} = 0 \tag{2.1.16}$$

の2式が得られる．(2.1.15) を x について積分すると，

$$f = -\frac{3}{2}au + c_1 \tag{2.1.17}$$

となる． c_1 はパラメータ t の任意関数である．さらに(2.1.17) を(2.1.16) に代入し， x について積分すると，

$$g = -\frac{3}{4}au_x + c_2 \tag{2.1.18}$$

が得られる．ここで c_2 は t の任意関数である．(2.1.17) , (2.1.18) を(2.1.14) に代入

すると,

$$\begin{aligned}
 LBy - BLy(g_{xx} + au_{xxx} + fu_x)y & \\
 &= \left[-\frac{3}{4}au_{xxx} + au_{xxx} + \left(-\frac{3}{2}au + c_1\right)u_x \right] y \\
 &= \left[\frac{1}{4}au_{xxx} - \frac{3}{2}auu_x + c_1u_x \right] y \\
 &= \left[\frac{1}{4}a(u_{xxx} - 6uu_x) + c_1u_x \right] y \tag{2.1.19}
 \end{aligned}$$

となる．したがって，固有値 λ が t に依存しないためには，(2.1.12) 及び (2.1.19) より，

$$u_t + \frac{1}{4}a(u_{xxx} - 6uu_x) + c_1u_x = 0 \tag{2.1.20}$$

でなければならない．ここで新しい変数 \hat{x} , \hat{t} を

$$\hat{x} \equiv x + c_1t, \tag{2.1.21}$$

$$\hat{t} \equiv t \tag{2.1.22}$$

と定義する³．このとき，それぞれの変数の微分演算子の間の関係は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{t}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}}, \tag{2.1.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} = c_1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \tag{2.1.24}$$

と書ける．(2.1.23) 及び (2.1.24) の関係を用いて (2.1.20) を \hat{x} , \hat{t} に関する偏微分方程式に書き換えると，

$$u_{\hat{t}} + \frac{1}{4}a(u_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} - 6uu_{\hat{x}}) = 0 \tag{2.1.25}$$

となり， c_1 は消去される⁴．最後に変数 \hat{x} , \hat{t} を x , t と置き直して， $a = 4$ の場合を考えると，

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1.26}$$

となり，KdV 方程式が得られた．また，このときの y_t は (2.1.9), (2.1.13), (2.1.17), (2.1.18) より，

$$\begin{aligned}
 y_t &= (aD^3 + fD + g)y \\
 &= \left[aD^3 - \frac{3au}{2}D - \frac{3au_x}{4} \right] y \\
 &= (-4D^3 + 6uD + 3u_x)y \\
 &= -4y_{xxx} + 6uy_x + 3u_xy \tag{2.1.27}
 \end{aligned}$$

³ t が時間座標であり， c_1 が速さである場合，(2.1.21), (2.1.22) のような座標変換はガリレイ変換 (Galilei transformation) と呼ばれる．

⁴任意の場合について変数変換により c_1 が消去することができるので，(2.1.20) で $c_1 = 0$ と考えても結果的には同じである．

と表される．ここで， c_2 は $\hat{y} = y \exp(\int c_2 dt)$ という変数変換によって消去できるので，ゼロとみなした．

以上より，波の散乱を記述する Sturm-Liouville 方程式のポテンシャル $u(x, t)$ が KdV 方程式を満たすとき，固有値 λ がパラメータ t に依存しないことが分かった．次節以降，KdV 方程式と密接な関係を有する Sturm-Liouville 方程式を中心として，散乱理論を考察していくこととしよう．

2.2 散乱問題の一般的手法

2.2.1 基本解

本節では Faddeev (1967) の手法にしたがって、散乱問題についてやや詳しく議論していくことにしよう。まずこの小節では Sturm-Liouville 方程式の 1 対の基本解が満たすべき積分方程式を求め、無限遠でのそれぞれの漸近的な振るまいを調べる。ここで考えるべき方程式は 2.1 節で述べた Sturm-Liouville 方程式

$$y_{xx} + [\lambda - u(x)]y(x) = 0 \quad (2.2.1)$$

である。いま、後の便宜のために $\lambda = k^2$ と置くと、(2.2.1) は

$$y_{xx} + [k^2 - u(x)]y(x) = 0 \quad (2.2.2)$$

と書き換えられる。(2.2.2) は y に関する x の 2 階の線形微分方程式である。したがって、 y は 2 つの基本解の線形結合として表される。本節以降、特に断りの無い限りポテンシャル $u(x)$ は実数であり、無限遠でゼロに収束すると仮定する。この仮定のもとで $|x| \rightarrow \infty$ の極限を考えると、方程式 (2.2.2) は

$$y_{xx} + k^2 y(x) = 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

となる。したがって、無限遠において全ての解 y は $e^{\pm ikx}$ の線形結合として記述することができる。本来 (2.2.2) の基本解の選び方には任意性があるが、ここでは x が $+\infty$ に近づくとときに e^{ikx} となる基本解を $f_1(x, k)$ 、 x が $-\infty$ に近づくとときに e^{-ikx} となる基本解を $f_2(x, k)$ として、両者の線形結合で $y(x, k)$ を表すこととしよう。これは Faddeev によって考え出された手法であり、散乱理論、並びに逆散乱理論では一般的に行なわれる手法である。

方程式 (2.2.2) において、任意のポテンシャルに対して基本解 $f_1(x, k)$ 、 $f_2(x, k)$ を陽に決定することは難しい。しかし、(2.2.2) から求められる $f_1(x, k)$ 、 $f_2(x, k)$ に関する積分方程式を考察することによって、これらの基本解の様々な性質を理解することができる。以下、2 つの基本解に対する積分方程式を求める。

(2.2.2) 式において、左辺第 3 項 $u(x)y(x)$ を非斉次項とみなし

$$y_{xx} + k^2 y = u(x)y \quad (2.2.3)$$

と書く。一般に、線形非斉次方程式は定数変化法によって解を求めることができる。そこで、この場合について定数変化法を適用してみよう。いま (2.2.3) の解が

$$y(x) = A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx} \quad (2.2.4)$$

という形で書けるものと仮定する．このとき $y(x)$ の 1 次導関数 y_x は (2.2.4) より

$$y_x = A_x e^{ikx} + A(e^{ikx})_x + B_x e^{-ikx} + B(e^{-ikx})_x \quad (2.2.5)$$

となる．(2.2.5) 式を x について微分すると，

$$\begin{aligned} y_{xx} &= (A_x e^{ikx} + B_x e^{-ikx})_x + (A(e^{ikx})_x + B(e^{-ikx})_x)_x \\ &= (A_{xx} e^{ikx} + B_{xx} e^{-ikx})_x + A_x (e^{ikx})_x + A(e^{ikx})_{xx} + B_x (e^{-ikx})_x + B(e^{-ikx})_{xx} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

と書ける．(2.2.4) 及び (2.2.6) より

$$\begin{aligned} y_{xx} + k^2 y &= (A_x e^{ikx} + B_x e^{-ikx})_x + A_x (e^{ikx})_x + A(e^{ikx})_{xx} + B_x (e^{-ikx})_x + B(e^{-ikx})_{xx} \\ &\quad + k^2 (A e^{ikx} + B e^{-ikx}) \\ &= (A_{xx} e^{ikx} + B_{xx} e^{-ikx})_x + A_x (e^{ikx})_x + A(-k^2) e^{ikx} + B_x (e^{-ikx})_x + B(-k^2) e^{-ikx} \\ &\quad + k^2 (A e^{ikx} + B e^{-ikx}) \\ &= (A_{xx} e^{ikx} + B_{xx} e^{-ikx})_x + A_x (e^{ikx})_x + B_x (e^{-ikx})_x \end{aligned}$$

となるので，(2.2.3) は

$$(A_{xx} e^{ikx} + B_{xx} e^{-ikx})_x + A_x (e^{ikx})_x + B_x (e^{-ikx})_x = u(x)y(x) \quad (2.2.7)$$

と書き換えられる．ここで

$$A_x e^{ikx} + B_x e^{-ikx} = 0 \quad (2.2.8)$$

が成り立つと仮定すると，(2.2.7) より

$$A_x (e^{ikx})_x + B_x (e^{-ikx})_x = u(x)y(x) \quad (2.2.9)$$

となる．(2.2.8)，(2.2.9) を A_x ， B_x に関する連立方程式とみなして解くと，

$$A_x = \frac{1}{2ik} u(x)y(x)e^{-ikx}, \quad (2.2.10)$$

$$B_x = -\frac{1}{2ik} u(x)y(x)e^{ikx} \quad (2.2.11)$$

が得られる．(2.2.10)，(2.2.11) を区間 $[0, x]$ で積分すると，

$$A(x) = \frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')y(x')e^{-ikx'} dx' + C_1, \quad (2.2.12)$$

$$B(x) = -\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')y(x')e^{ikx'} dx' + C_2 \quad (2.2.13)$$

となる． C_1, C_2 は積分定数である．(2.2.12), (2.2.13) を (2.2.4) に代入すると，

$$y(x) = \left(\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')y(x')e^{-ikx'} dx' + C_1 \right) e^{ikx} + \left(-\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')y(x')e^{ikx'} dx' + C_2 \right) e^{-ikx} \quad (2.2.14)$$

と書き表される．

(2.2.14) において， $f_1(x, k), f_2(x, k)$ に課された条件を考慮することによって，それぞれに対する定数 C_1, C_2 を決定することができる．その結果， $f_1(x, k), f_2(x, k)$ が満たすべき積分方程式が得られる．

まず， $f_1(x, k)$ に関する積分定数を決定する． $y = f_1(x, k)$ の場合を考えよう．このとき $f_1(x, k)$ の定義から

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x, k) = e^{ikx}$$

が成立する．したがって，(2.2.14) において $x \rightarrow +\infty$ なる極限をとると，

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')f_1(x', k)e^{-ikx'} dx' + C_1 \right) e^{ikx} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')f_1(x', k)e^{ikx'} dx' + C_2 \right) e^{-ikx} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2ik} \int_0^\infty u(x')f_1(x', k)e^{-ikx'} dx' + C_1 \right) e^{ikx} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2ik} \int_0^\infty u(x')f_1(x', k)e^{ikx'} dx' + C_2 \right) e^{-ikx} \end{aligned}$$

となる．ここで左辺と右辺の e^{ikx}, e^{-ikx} の係数を比較すると，

$$C_1 = 1 - \frac{1}{2ik} \int_0^\infty u(x')f_1(x', k)e^{-ikx'} dx', \quad (2.2.15)$$

$$C_2 = \frac{1}{2ik} \int_0^\infty u(x')f_1(x', k)e^{ikx'} dx' \quad (2.2.16)$$

の2式が得られる．(2.2.15), (2.2.16) を (2.2.14) に代入すると，

$$\begin{aligned} y &= f_1(x, k) \\ &= \left(\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')f_1(x', k)e^{-ikx'} dx' + 1 - \frac{1}{2ik} \int_0^\infty u(x')f_1(x', k)e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x')f_1(x', k)e^{ikx'} dx' + \frac{1}{2ik} \int_0^\infty u(x')f_1(x', k)e^{ikx'} dx' \right) e^{-ikx} \\ &= e^{ikx} - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(x')f_1(x', k)e^{ik(x-x')} dx' + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(x')f_1(x', k)e^{-ik(x-x')} dx' \\ &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(x-x')u(x')f_1(x', k)dx' \quad (2.2.17) \end{aligned}$$

となり, $f_1(x, k)$ に関する積分方程式が得られる. 最後の式変形で三角関数の公式

$$e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')} = 2i \sin k(x-x') \quad (2.2.18)$$

を用いた.

同様の手順で $f_2(x, k)$ に関する積分方程式を求めよう. $y = f_2(x, k)$ の場合を考えると, $f_2(x, k)$ の定義より

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x, k) = e^{-ikx}$$

が成り立つ. したがって (2.2.14) で $x \rightarrow -\infty$ なる極限を考えると,

$$\begin{aligned} e^{-ikx} &= \left(\frac{1}{2ik} \int_0^{-\infty} u(x') f_2(x', k) e^{-ikx'} dx' + C_1 \right) e^{ikx} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2ik} \int_0^{-\infty} u(x') f_2(x', k) e^{ikx'} dx' + C_2 \right) e^{-ikx} \end{aligned}$$

となり, この場合

$$C_1 = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^0 u(x') f_2(x', k) e^{-ikx'} dx', \quad (2.2.19)$$

$$C_2 = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^0 u(x') f_2(x', k) e^{ikx'} dx' \quad (2.2.20)$$

が得られる. (2.2.19), (2.2.20) を (2.2.14) に代入し, (2.2.18) を用いると,

$$\begin{aligned} f_2(x, k) &= \left(\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x') f_2(x', k) e^{-ikx'} dx' + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^0 u(x') f_2(x', k) e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2ik} \int_0^x u(x') f_1(x', k) e^{ikx'} dx' + 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^0 u(x') f_2(x', k) e^{ikx'} dx' \right) e^{-ikx} \\ &= e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^x \sin k(x-x') u(x') f_2(x', k) dx' \quad (2.2.21) \end{aligned}$$

となり, $f_2(x, k)$ に関する積分方程式が得られた.

(2.2.17) や (2.2.21) のような形式の積分方程式は Volterra の第2種積分方程式 (Volterra integral equation of the second kind) と呼ばれる⁵. Volterra の第2種積分方程式の中の積分は $\text{Im } k > 0$ のときに収束することが知られている⁶. また, 関数 $f_1(x, k)$ 及び $f_2(x, k)$ は複素 k 平面の $\text{Im } k > 0$ を満たす領域 (上半面) で解析的となる. この

⁵(2.2.17), (2.2.21) を満たす解はしばしば Jost の解 (Jost solution) と呼ばれる.

⁶積分が $\text{Im } k > 0$ で収束することの証明については付録 B を参照のこと.

章では k に関する複素積分に何度も出会うことになるが、その場合、上の理由によって上半面に経路を設定することになる。

ここまで x が $+\infty$ に近づくときに e^{ikx} となる基本解 $f_1(x, k)$ と、 x が $-\infty$ に近づくときに e^{-ikx} となる基本解 $f_2(x, k)$ について考えてきた。基本解の選び方には任意性があるので、 x が $+\infty$ に近づくときに e^{-ikx} となる基本解 $f_1(x, -k)$ や、 x が $-\infty$ に近づくときに e^{ikx} となる基本解 $f_2(x, -k)$ を考えることもできる。以下、 $k \neq 0$ のときに $f_1(x, k)$ と $f_1(x, -k)$ が線形独立であること、そして $f_2(x, k)$ と $f_2(x, -k)$ が線形独立であることを示そう。2つの基本解が線形独立であるかどうかを診断するにはロンスキアンを計算すればよい。ロンスキアンがゼロとなれば両者は線形従属であり、ゼロでなければ両者は線形独立であるということになる。

一般に関数 $p(x)$, $q(x)$ に対するロンスキアン $W(p, q)$ は

$$W(p, q) \equiv pq_x - p_xq \quad (2.2.22)$$

と定義される。いま各基本解の具体的な関数形は分からないので、ロンスキアンを計算することは難しいように思われる。しかし、我々は各基本解の無限遠での振舞いを知っているので、無限遠でのロンスキアンの値は計算することができる。実際に f_1, f_2 に関する無限遠でのロンスキアンをそれぞれ計算してみると、(2.2.22) より

$$W(f_1(x, k), f_1(x, -k))|_{x=\infty} = e^{ikx}(-ik)e^{-ikx} - ik e^{ikx} e^{-ikx} = -2ik, \quad (2.2.23)$$

$$W(f_2(x, k), f_2(x, -k))|_{x=-\infty} = e^{-ikx} ik e^{ikx} - (-ik) e^{-ikx} e^{ikx} = 2ik \quad (2.2.24)$$

となる。ここで任意の x に関するロンスキアン $W(f_1(x, k), f_1(x, -k))$ に着目する。 $W(f_1(x, k), f_1(x, -k))$ を x で一回微分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} W(f_1(x, k), f_1(x, -k)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, k)] \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, -k)] + f_1(x, k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_1(x, -k)] \\ & \quad - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_1(x, k)] f_1(x, -k) - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, k)] \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, -k)] \\ &= f_1(x, k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_1(x, -k)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_1(x, k)] f_1(x, -k) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

となる。ここで $f_1(x, k)$, $f_1(x, -k)$ はともに Sturm-Liouville 方程式の解であるので、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_1(x, k)] + [k^2 - u(x)] [f_1(x, k)] = 0, \quad (2.2.26)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_1(x, -k)] + [k^2 - u(x)] [f_1(x, -k)] = 0 \quad (2.2.27)$$

が成り立つ。(2.2.26), (2.2.27) を (2.2.25) に代入して2階微分の項を消去すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} W(f_1(x, k), f_1(x, -k)) &= f_1(x, k)[-k^2 + u(x)][f_1(x, -k)] \\ &\quad - [-k^2 + u(x)][f_1(x, k)]f_1(x, -k) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

が得られる。(2.2.28) より $W(f_1(x, k), f_1(x, -k))$ は x に依存しないことが分かる。 $W(f_2(x, k), f_2(x, -k))$ についても同様の計算によって x に依存しないことが示される。したがって, (2.2.23), (2.2.24) で求めた無限遠でのロンスキアンの値は任意の x について有効であることが分かる。すなわち,

$$W(f_1(x, k), f_1(x, -k)) = e^{ikx}(-ik)e^{-ikx} - ik e^{ikx} e^{-ikx} = -2ik, \quad (2.2.29)$$

$$W(f_2(x, k), f_2(x, -k)) = e^{-ikx} ik e^{ikx} - (-ik)e^{-ikx} e^{ikx} = 2ik \quad (2.2.30)$$

が得られる。(2.2.29), (2.2.30) より $k \neq 0$ のとき, $W(f_1(x, k), f_1(x, -k))$ および $W(f_2(x, k), f_2(x, -k))$ はゼロとはならないことが分かる。したがって, このとき $f_1(x, k), f_1(x, -k)$ は線形独立であり, かつ $f_2(x, k), f_2(x, -k)$ が線形独立であることが示された。

2階の線形微分方程式において, 第3の基本解は2つの独立な基本解の線形結合によって表されることが知られている。したがって, (2.2.29), (2.2.30) より

$$f_2(x, k) = c_{11}(k)f_1(x, k) + c_{12}(k)f_1(x, -k), \quad (2.2.31)$$

$$f_1(x, k) = c_{21}(k)f_2(x, -k) + c_{22}(k)f_2(x, k) \quad (2.2.32)$$

と表現することができる。このとき (2.2.31), (2.2.32) の $|x| \rightarrow \infty$ での漸近的振舞いはそれぞれ

$$f_2(x, k) = \begin{cases} e^{-ikx} & (x \rightarrow -\infty) \\ c_{11}(k)e^{ikx} + c_{12}(k)e^{-ikx} & (x \rightarrow \infty) \end{cases}, \quad (2.2.33)$$

$$f_1(x, k) = \begin{cases} c_{21}(k)e^{ikx} + c_{22}(k)e^{-ikx} & (x \rightarrow -\infty) \\ e^{ikx} & (x \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (2.2.34)$$

となる。ただし, 4つの係数は一般に複素数となることに注意しなければならない。(2.2.33) は振幅 c_{12} を持つ波が $x = \infty$ から入射し, 反射した波が振幅 c_{11} で $x = \infty$ に届き, 透過した波が振幅 1 で $x = -\infty$ に到達すると解釈することができる。同様に (2.2.34) は振幅 c_{21} の波が $x = -\infty$ から入射し, 反射した波が振幅 c_{11} の状態で $x = -\infty$ に戻り, 透過した波が単位振幅で $x = \infty$ に到達すると解釈できる。

2.2.2 反射係数と透過係数

ここで入射波がどれほどの割合で反射し、透過したのかを表す係数を導入しておくことと便利である。この小節では透過に関する2つの係数の間の関係と、 $|k| \rightarrow \infty$ での振舞いについて調べる。いま x 軸の正の方向を右向きにとることにしよう。このとき (2.2.33) は右側から入射する場合に対応し、(2.2.34) は左側から入射する場合に対応する。いま右側からの入射に対する反射係数、透過係数をそれぞれ $R_R(k)$ 、 $T_R(k)$ とし、左側からの入射に対する反射係数、透過係数をそれぞれ $R_L(k)$ 、 $T_L(k)$ とする。このときそれぞれの反射係数、透過係数を以下のように定義する。

$$R_R(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)}, T_R(k) = \frac{1}{c_{12}(k)}, R_L(k) = \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)}, T_L(k) = \frac{1}{c_{21}(k)}. \quad (2.2.35)$$

ここで2つの透過係数 $T_R(k)$ 、 $T_L(k)$ が等しくなることを示そう。ロンスキアン $W[f_1(x, k), f_2(x, k)]$ に (2.2.31) を代入して $f_2(x, k)$ を消去すると、

$$\begin{aligned} W[f_1(x, k), f_2(x, k)] &= W[f_1(x, k), c_{11}(k)f_1(x, k) + c_{12}(k)f_1(x, -k)] \\ &= W[f_1(x, k), c_{11}(k)f_1(x, k)] + w[f_1(x, k), c_{12}(k)f_1(x, -k)] \\ &= c_{11}(k)W[f_1(x, k), f_1(x, k)] + c_{12}(k)W[f_1(x, k), f_1(x, -k)] \\ &= -2ikc_{12}(k) \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

となる。ただし式変形の途中でロンスキアンの線形性

$$W[p(x), aq(x) + br(x)] = aW[p(x), q(x)] + bW[p(x), r(x)]$$

を利用した⁷。また、 $W[f_1(x, k), f_1(x, k)] = 0$ 、 $W[f_1(x, k), f_1(x, -k)] = -2ik$ となることも用いた。(2.2.36) を $c_{12}(k)$ について整理すると、

$$c_{12}(k) = -\frac{W[f_1(x, k), f_2(x, k)]}{2ik} \quad (2.2.37)$$

⁷ロンスキアンについて線形性が成り立つことを導く。 $p(x)$ 、 $q(x)$ 、 $r(x)$ を x の任意の関数、 a 、 b を x に依存しない定数とする。このとき、ロンスキアンの定義に基づいて $W[p(x), aq(x) + br(x)]$ を計算すると、

$$\begin{aligned} W[p(x), aq(x) + br(x)] &= p(x)[aq(x) + br(x)]_x - [p(x)]_x[aq(x) + br(x)] \\ &= ap(x)[q(x)]_x + bp(x)[r(x)]_x - a[p(x)]_xq(x) - b[p(x)]_xr(x) \\ &= a\{p(x)[q(x)]_x - [p(x)]_xq(x)\} + b\{p(x)[r(x)]_x - [p(x)]_xr(x)\} \\ &= aW[p(x), q(x)] + bW[p(x), r(x)] \end{aligned}$$

となり、確かにロンスキアンが線形性をそなえていることが示された。

が得られる．同様に $W[f_1(x, k), f_2(x, k)]$ に (2.2.32) を代入して $f_1(x, k)$ を消去すると，

$$\begin{aligned} W[f_1(x, k), f_2(x, k)] &= W[c_{21}(k)f_2(x, -k) + c_{22}(k)f_2(x, k), f_2(x, k)] \\ &= c_{21}(k)W[f_2(x, -k), f_2(x, k)] + c_{22}(k)W[(k)f_2(x, k), f_2(x, k)] \\ &= -2ikc_{21}(k) \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

となる．ここでロンスキアンに関する恒等式

$$W[p(x), q(x)] = -W[q(x), p(x)]$$

及び $W[f_2(x, k), f_2(x, -k)] = 2ik$ となることを用いた．(2.2.38) を $c_{21}(x)$ について整理すると，

$$c_{21}(k) = -\frac{W[f_1(x, k), f_2(x, k)]}{2ik} \quad (2.2.39)$$

が得られる．(2.2.37) , (2.2.39) より

$$c_{12}(k) = c_{21}(k) \quad (2.2.40)$$

が成立する．したがって透過係数の定義式 (2.2.35) より

$$T_R(k) = T_L(k) \quad (2.2.41)$$

となり2つの透過係数が等しいことが示された．そこで今後は透過係数を

$$T(k) \equiv T_R(k) = T_L(k) \quad (2.2.42)$$

と書くこととしよう．

次に $k \rightarrow \pm\infty$ における反射係数，透過係数の振舞いを調べよう．これらの振舞いは各々の係数の Fourier 変換を考えるときに重要となる．まず， $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{22}(k)$ の $|x| \rightarrow \infty$ における振舞いを調べる．(2.2.21) で $x \rightarrow \infty$ の極限を考えると，

$$\begin{aligned} f_2(x, k) &= e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin k(x-x')u(x')f_2(x', k)dx' \\ &= e^{-ikx} + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}]u(x')f_2(x', k)dx' \\ &= e^{ikx} \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'}u(x')f_2(x', k)dx' \\ &\quad + e^{-ikx} \left[1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'}u(x')f_2(x', k)dx'\right] \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

となる．また，(2.2.33) より

$$f_2(x, k) = c_{11}(k)e^{ikx} + c_{12}(k)e^{-ikx} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (2.2.44)$$

となるので, (2.2.43), (2.2.44) を比較することによって

$$c_{11}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} u(x') f_2(x', k) dx', \quad (2.2.45)$$

$$c_{12}(k) = \left[1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} u(x') f_2(x', k) dx' \right] \quad (2.2.46)$$

の2式を得る. 同様に (2.2.17) で $x \rightarrow -\infty$ の極限を考えると,

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \sin k(x-x') u(x') f_1(x', k) dx' \\ &= e^{ikx} \left[1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} u(x') f_1(x', k) dx' \right] \\ &\quad + e^{-ikx} \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} u(x') f_1(x', k) dx' \quad (x \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

となる. また (2.2.34) より

$$f_1(x, k) = c_{12}(k) e^{ikx} + c_{22}(k) e^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (2.2.48)$$

となるので (2.2.47), (2.2.48) を比較することにより

$$c_{22}(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} u(x') f_1(x', k) dx' \quad (2.2.49)$$

が得られる. (2.2.45), (2.2.46), (2.2.49) において, それぞれの積分は $|k| \rightarrow \infty$ の極限で発散せずに有限の値をとると考えられる. したがって

$$c_{11}(k) \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty),$$

$$c_{12}(k) \rightarrow 1 \quad (|k| \rightarrow \infty),$$

$$c_{22}(k) \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty)$$

となる. 以上の3式を (2.2.35) に適用すると

$$R_R(k) = \frac{c_{11}(k)}{c_{12}(k)} \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty), \quad (2.2.50)$$

$$R_L(k) = \frac{c_{22}(k)}{c_{12}(k)} \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty), \quad (2.2.51)$$

$$T(k) = \frac{1}{c_{12}(k)} \rightarrow 1 \quad (|k| \rightarrow \infty) \quad (2.2.52)$$

となり, $|k| \rightarrow \infty$ における各係数の振舞いが得られた.

2.2.3 反射係数，透過係数の極

この小節では反射係数，透過係数が極を持つ場合に，それらの極が複素 k 平面の上半分の虚軸上に位置し，全て 1 位となることを示す．(2.2.50)，(2.2.51) より反射係数 $R_R(k)$ ， $R_L(k)$ は， k に関して Fourier 変換可能であることが分かる．一方 (2.2.52) から透過係数 $T(k)$ は Fourier 変換できないことが分かる．しかしながら， $T(k) - 1$ という量を考えると $|k| \rightarrow \infty$ でゼロに収束するので，Fourier 変換可能である．そこで $R_R(k)$ ， $R_L(k)$ ， $T(k) - 1$ の 3 つの係数に関する Fourier 変換を次のように定義する．

$$r_R(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} R_R(k) dk, \quad (2.2.53)$$

$$r_L(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} R_L(k) dk, \quad (2.2.54)$$

$$\Gamma(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} [T(k) - 1] dk. \quad (2.2.55)$$

基本解の線形結合の式 (2.2.31)，(2.2.32) において，基本解は全て $\text{Im } k > 0$ で解析的であるので，係数 $c_{11}(k)$ ， $c_{12}(k)$ ， $c_{22}(k)$ もまた $\text{Im } k > 0$ で解析的であることが分かる．したがって，反射係数，透過係数の Fourier 変換を k に関する複素周回積分を利用して求める場合，その経路は複素 k 平面の上半面内に設定すればよいということになる．複素積分を計算するときに反射係数，透過係数が上半面のどの位置にどれだけの極を持つかが問題となる．(2.2.35) より反射係数，透過係数の極の位置は $c_{12}(k)$ の零点によって決まることが分かる．以下，それらの零点は全て k が純虚数となるときに実現されることを示そう．

まず，固有値 k^2 が実数となることを示す．そのために量子力学の概念を少しばかり導入する．量子力学の基本方程式である Schrödinger 方程式は，非定常の場合

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.2.56)$$

と記述される． \hbar は Planck 定数， m は注目している粒子の質量， V は粒子のポテンシャルエネルギー， ψ は波動関数をそれぞれ表している．(2.2.56) の左辺の微分演算子はもともとハミルトニアン \mathcal{H} を表しているので

$$\mathcal{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.2.57)$$

と記述することもできる⁸．(2.2.56) において

$$\psi(x, t) = e^{-i\omega t} y(x) \quad (2.2.58)$$

⁸ハミルトニアンを演算子として扱う場合，これを Hamilton 演算子と呼ぶことがある．

と変数分離できると仮定すると,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega e^{-i\omega t} y(x)$$

となるので (2.2.56) は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} y_{xx} + V(x)y = \hbar\omega y \quad (2.2.59)$$

と書き換えられる．ここで $2mV(x)/\hbar^2 = u(x)$, $2m\omega/\hbar = k^2$ と置くと,

$$y_{xx} + [k^2 - u(x)]y(x) = 0$$

となり, Sturm-Liouville 方程式と一致する．つまり Sturm-Liouville 方程式は (2.2.56) 式の特別な場合とみなすことができる．ここではより一般的な Schrödinger 方程式 (2.2.56) に焦点を当てて議論を進めよう．

量子力学において, 波動関数の絶対値の 2 乗 $|\psi|^2$ は粒子の存在確率密度を表し, $|\psi|^2 dx$ は時刻 t において微小区間 dx の間に見出せる確率を表すものと解釈される．粒子は空間のどこかには必ず存在するはずなので, 全空間にわたって確率密度 $|\psi|^2 dx$ を積分すると 1 となることが期待される．すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

となる．したがって上式を t で微分すると,

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 0 \quad (2.2.60)$$

が得られる．一般に波動関数は複素数となることに注意すると, $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ となる．また, 時間微分と積分の順序を入れ替えても計算結果は変わらないので, (2.2.60) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [\psi\psi^*] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] dx = 0 \end{aligned} \quad (2.2.61)$$

と書き換えられる．ここで (2.2.57) 式を用いて時間微分を消去すると,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}\psi \right) \psi^* + \psi \left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}\psi \right)^* \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}\psi \right) \psi^* + \psi \frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}\psi)^* \right] dx \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\mathcal{H}\psi) \psi^* - \psi (\mathcal{H}\psi)^* \right] dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}\psi)\psi^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathcal{H}\psi)^* dx \quad (2.2.62)$$

が得られる⁹ . (2.2.62) で改めて $\psi(x, t) = e^{-i\omega t}y(x)$ と置くと ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}y)y^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} y(\mathcal{H}y)^* dx \quad (2.2.63)$$

となる .

以下 , (2.2.63) を用いて k^2 が実数となることを示そう . Sturm-Liouville 方程式 (2.2.2) の両辺に $-\hbar^2/2m$ を掛けると ,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{u(x)\hbar^2}{2m} \right) y - \frac{2mk^2}{\hbar^2} y = \mathcal{H}y - \frac{2mk^2}{\hbar^2} y = 0,$$

すなわち

$$\mathcal{H}y = \frac{2mk^2}{\hbar^2} y \quad (2.2.64)$$

が得られる . (2.2.64) の両辺に y^* を掛け , $x = -\infty$ から $x = \infty$ まで積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}y)y^* dx = \frac{2mk^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} yy^* dx \quad (2.2.65)$$

となる . ここで (2.2.64) を (2.2.65) に適用すると ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}y)^* y dx = \frac{2mk^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} yy^* dx \quad (2.2.66)$$

となる . 更に (2.2.66) に (2.2.64) を代入して $\mathcal{H}y$ を消去すると ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2mk^2}{\hbar^2} y \right)^* y dx = \frac{2mk^{2*}}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^* y dx = \frac{2mk^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} yy^* dx$$

が得られる . 上式が常に成り立つためには

$$k^2 = (k^2)^* \quad (2.2.67)$$

でなければならない . つまり , k^2 は実数でなければならないことが分かる .

⁹ x の関数 $p(x)$, $q(x)$ に対して演算子 A が

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Ap)q^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} (Ap)^* q dx$$

という関係を満たすとき , 演算子 A を Hermite 演算子と呼ぶ . ハミルトニアン \mathcal{H} は Hermite 演算子の代表例の一つである .

k^2 が実数であることから, k は実数か純虚数のどちらかであると言える. しかし, k が実数のときの $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{22}(k)$ の間の関係式を調べることによって, $c_{12}(k) = 0$ における k の値は実数となり得ないことが導かれる. このことを導く前に, 導出で必要となる以下の4つの数式を証明しておこう.

$$c_{11}(k) = -\frac{W[f_2(x, k), f_1(x, -k)]}{2ik}, \quad (2.2.68)$$

$$c_{22}(k) = -\frac{W[f_2(x, -k), f_1(x, k)]}{2ik}, \quad (2.2.69)$$

$$f_1^*(x, k) = f_1(x, -k) \quad (\text{ただし } k \text{ は実数}), \quad (2.2.70)$$

$$f_2^*(x, k) = f_2(x, -k) \quad (\text{ただし } k \text{ は実数}). \quad (2.2.71)$$

まず(2.2.68)式を導く. ロンスキアの定義式(2.2.22)より, 同一の関数に関するロンスキアはゼロとなるので, $W[f_2(x, k), f_2(x, k)] = 0$ が成り立つ. ここで(2.2.31)より $f_2(x, k) = c_{11}(k)f_1(x, k) + c_{12}(k)f_1(x, -k)$ と表されるので,

$$\begin{aligned} W[f_2(x, k), f_2(x, k)] &= W[f_2(x, k), c_{11}(k)f_1(x, k) + c_{12}(k)f_1(x, -k)] \\ &= c_{11}(k)W[f_2(x, k), f_1(x, k)] + c_{12}(k)W[f_2(x, k), f_1(x, -k)] \\ &= c_{11}(k)2ikc_{12}(k) + c_{12}(k)W[f_2(x, k), f_1(x, -k)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.72)$$

となる. ただし式変形の途中で(2.2.36)を用いた. したがって,

$$c_{11}(k) = -\frac{W[f_2(x, k), f_1(x, -k)]}{2ik}$$

となり, (2.2.68) が得られた.

同様の手順で(2.2.69)式を導く. 恒等式 $W[f_1(x, k), f_1(x, k)] = 0$ で(2.2.32)を代入し, (2.2.37)を適用すると,

$$\begin{aligned} W[f_1(x, k), f_1(x, k)] &= W[f_1(x, k), c_{12}(k)f_2(x, -k) + c_{22}(k)f_2(x, k)] \\ &= c_{12}(k)W[f_1(x, k), f_2(x, -k)] + c_{22}(k)W[f_1(x, k), f_2(x, k)] \\ &= c_{12}(k)W[f_1(x, k), f_2(x, -k)] + c_{22}(k)(-2ik)c_{12}(k) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.73)$$

となる. (2.2.73)を整理すると, (2.2.69) が得られる.

次に(2.2.70)を証明しよう. $f_1(x, k)$ に関する積分方程式

$$f_1(x, k) = e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(x - x')u(x')f_1(x', k)dx' \quad (2.2.17)$$

で k を $-k$ に置き換えると,

$$f_1(x, -k) = e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(x-x')u(x')f_1(x', -k)dx' \quad (2.2.74)$$

となる. いま k が実数の場合を考えているので, $(e^{ikx})^* = e^{-ikx}$ が成り立つ. したがって (2.2.73) の複素共役を考えると, ポテンシャルが実数であることに注意して

$$\begin{aligned} f_1^*(x, k) &= e^{-ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin^* k(x-x')u(x')f_1^*(x', k)dx' \\ &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \left[\frac{1}{2i}(e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}) \right]^* u(x')f_1^*(x', k)dx' \\ &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \left[-\frac{1}{2i}(e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}) \right] u(x')f_1^*(x', k)dx' \\ &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(x-x')u(x')f_1^*(x', k)dx' \end{aligned} \quad (2.2.75)$$

となる. (2.2.74) と (2.2.75) を比較すると, 全く同じ形の積分方程式を満たしていることが分かる. したがって, $f_1(x, -k)$ と $f_1^*(x, k)$ は等しいとみなすことができ, (2.2.70) が導かれる. (2.2.71) についても同様の手順で証明することができる.

以上のことを踏まえて, $c_{12}(k) = 0$ を満たす k が純虚数となることを導こう. まず, 基本解の線形結合の式 (2.2.31), (2.2.32) に着目する. (2.2.32) で k を $-k$ に置き換えると,

$$f_1(x, -k) = c_{21}(-k)f_2(x, k) + c_{22}(-k)f_2(x, -k) \quad (2.2.76)$$

となる. (2.2.32) および (2.2.76) を (2.2.31) に代入して $f_1(x, k)$, $f_1(x, -k)$ を消去すると,

$$\begin{aligned} f_2(x, k) &= c_{11}(k)f_1(x, k) + c_{12}(k)f_1(x, -k) \\ &= c_{11}(k)[c_{21}(k)f_2(x, -k) + c_{22}(k)f_2(x, k)] \\ &\quad + c_{12}(k)[c_{21}(-k)f_2(x, k) + c_{22}(-k)f_2(x, -k)] \\ &= f_2(x, k)[c_{11}(k)c_{22}(k) + c_{12}(k)c_{21}(-k)] \\ &\quad + f_2(x, -k)[c_{11}(k)c_{21}(k) + c_{12}(k)c_{22}(-k)] \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

となる. ここで $f_2(x, k)$, $f_2(x, -k)$ が独立であることから, $f_2(x, k)$, $f_2(x, -k)$ の各係数は両辺で一致していなければならない. したがって,

$$1 = c_{11}(k)c_{22}(k) + c_{12}(k)c_{21}(-k), \quad (2.2.78)$$

$$0 = c_{11}(k)c_{21}(k) + c_{12}(k)c_{22}(-k) \quad (2.2.79)$$

の2式が得られる. 同様に (2.2.31) で k を $-k$ に置き換えると

$$f_2(x, -k) = c_{11}(-k)f_1(x, -k) + c_{12}(-k)f_1(x, k) \quad (2.2.80)$$

となる。(2.2.31), (2.2.80) を (2.2.32) に代入して $f_2(x, k)$, $f_2(x, -k)$ を消去すると, 次の2式が得られる.

$$1 = c_{21}(k)c_{12}(-k) + c_{22}(k)c_{11}(k), \quad (2.2.81)$$

$$0 = c_{21}(k)c_{11}(-k) + c_{22}(k)c_{12}(k). \quad (2.2.82)$$

いま (2.2.37) の複素共役を考えると, (2.2.70), (2.2.71) より

$$\begin{aligned} c_{12}^*(k) &= -\frac{W^*[f_1(x, k), f_2(x, k)]}{2ik} \\ &= -\frac{\left(f_1(x, k)[f_2(x, k)]_x - [f_1(x, k)]_x f_2(x, k)\right)^*}{2ik} \\ &= -\frac{\left(f_1^*(x, k)[f_2^*(x, k)]_x - [f_1^*(x, k)]_x f_2^*(x, k)\right)}{2ik} \\ &= -\frac{\left(f_1(x, -k)[f_2(x, -k)]_x - [f_1(x, -k)]_x f_2(x, -k)\right)}{2ik} \\ &= -\frac{W[f_1(x, -k), f_2(x, -k)]}{2ik} \\ &= -c_{12}(-k) \end{aligned} \quad (2.2.83)$$

が得られる. 同様に (2.2.69) の複素共役をとり, (2.2.70), (2.2.71) を適用すると,

$$\begin{aligned} c_{22}^*(k) &= -\frac{W^*[f_2(x, -k), f_1(x, k)]}{2ik} \\ &= -\frac{W[f_2^*(x, -k), f_1^*(x, k)]}{2ik} \\ &= -\frac{W[f_2(x, k), f_1(x, -k)]}{2ik} \\ &= c_{22}(-k) \end{aligned} \quad (2.2.84)$$

を得る. また, (2.2.68), (2.2.69) より $c_{11}(k) = -c_{22}(-k)$ が成立するので, (2.2.84) より

$$c_{11}(k) = -c_{22}(-k) = -c_{22}^*(k) \quad (2.2.85)$$

が得られる. 以上で得られた (2.2.83), (2.2.85) を (2.2.78) に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= c_{11}(k)c_{22}(k) + c_{12}(k)c_{21}(-k) \\ &= -c_{22}^*(k)c_{22}(k) + c_{12}(k)c_{12}^*(k) \\ &= -|c_{22}(k)|^2 + |c_{12}(k)|^2 \end{aligned} \quad (2.2.86)$$

となる. また (2.2.83), (2.2.84) を (2.2.81) に代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= c_{21}(k)c_{12}(-k) + c_{22}(k)c_{11}(k) \\ &= c_{12}(k)c_{12}^*(k) - c_{11}^*(k)c_{11}(k) \\ &= |c_{12}(k)|^2 - |c_{11}(k)|^2 \end{aligned} \quad (2.2.87)$$

を得る。(2.2.86), (2.2.87) をまとめると,

$$|c_{12}(k)|^2 = 1 + |c_{11}(k)|^2 = 1 + |c_{22}(k)|^2 \quad (2.2.88)$$

となる。つまり k が実数のときには $|c_{12}(k)| \geq 1$ となり, $c_{12}(k) \neq 0$ となることが分かる。したがって, $c_{12}(k)$ の零点が存在するとすれば, それは複素 k 平面の上半分虚軸上に存在することが導かれる。

次に複素上半面虚軸上に存在する $c_{12}(k)$ の零点, すなわち透過係数 $T(k)$ の極が全て1位の極となることを示そう。いま虚軸上に $c_{12}(k)$ の零点が N 個存在するものとし, 原点に近い順から零点の位置を k_1, k_2, \dots, k_N とする。 $T(k) = 1/c_{12}(k)$ が $c_{12}(k)$ の零点で1位の極になるとすれば, $c_{12}(k)$ は

$$c_{12}(k) = (k - k_1)(k - k_2) \dots (k - k_N) \quad (2.2.89)$$

のような形で書けるはずである。 $c_{12}(k)$ を k で微分し, $k = k_l$ ($l = 1, 2, \dots, N$) を代入すると,

$$\left. \frac{dc_{12}(k)}{dk} \right|_{k=k_l} \equiv \dot{c}_{12}(k_l) = \left. \frac{c_{12}(k)}{k - k_l} \right|_{k=k_l} \neq 0 \quad (2.2.90)$$

となる。つまり $T(k)$ の極が1位となることを示すには $\dot{c}_{12}(k_l) \neq 0$ ($l = 1, 2, \dots, N$) を示せばよい。

$c_{12}(k)$ のロンスキアンによる表示式 (2.2.37) を k で微分し, $k = k_l$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{c}_{12}(k_l) &= \left. \frac{d}{dk} \frac{W[f_1(x, k), f_2(x, k)]}{2ik} \right|_{k=k_l} \\ &= \left. \frac{W[f_1(x, k), f_2(x, k)]}{2ik^2} \right|_{k=k_l} - \frac{1}{2ik} \left. \frac{d}{dk} W[f_1(x, k), f_2(x, k)] \right|_{k=k_l} \end{aligned} \quad (2.2.91)$$

となる。ここで $c_{12}(k_l) = 0$ となることに注意すると, (2.2.31), (2.2.32) より

$$f_2(x, k_l) = c_{11}(k_l) f_1(x, k_l), \quad (2.2.92)$$

$$f_1(x, k_l) = c_{22}(k_l) f_2(x, k_l) \quad (2.2.93)$$

となり, $f_2(x, k_l)$ と $f_1(x, k_l)$ は線形従属となる。したがって, $W[f_1(x, k), f_2(x, k)] = 0$ となり, (2.2.91) の右辺第1項はゼロとなることが分かる。また (2.2.91) の右辺第

2項を計算すると,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2ik} \frac{d}{dk} W[f_1(x, k), f_2(x, k)] \Big|_{k=k_l} \\
&= -\frac{1}{2ik} \frac{\partial}{\partial k} \left[f_1(x, k) \frac{\partial f_2(x, k)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, k)}{\partial x} f_2(x, k) \right] \Big|_{k=k_l} \\
&= -\frac{1}{2ik} \left[\frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k} \frac{\partial f_2(x, k)}{\partial x} + f_1(x, k) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2(x, k)}{\partial k} \right) \right] \Big|_{k=k_l} \\
&\quad + \frac{1}{2ik} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k} \right) f_2(x, k) + \frac{\partial f_1(x, k)}{\partial x} \frac{\partial f_2(x, k)}{\partial k} \right] \Big|_{k=k_l} \\
&= -\frac{1}{2ik} \left[\frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k} \frac{\partial f_2(x, k)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k} \right) f_2(x, k) \right] \Big|_{k=k_l} \\
&\quad - \frac{1}{2ik} \left[f_1(x, k) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2(x, k)}{\partial k} \right) - \frac{\partial f_1(x, k)}{\partial x} \frac{\partial f_2(x, k)}{\partial k} \right] \Big|_{k=k_l} \\
&= -\frac{1}{2ik} \left(W \left[\frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k}, f_2(x, k) \right] + W \left[f_1(x, k), \frac{\partial f_2(x, k)}{\partial k} \right] \right) \Big|_{k=k_l} \\
&= -\frac{1}{2ik_l} \left(W[\dot{f}_1(x, k_l), f_2(x, k)] + W[f_1(x, k_l), \dot{f}_2(x, k_l)] \right) \quad (2.2.94)
\end{aligned}$$

となる. ただし

$$\dot{f}_i(x, k_l) \equiv \frac{\partial f_i(x, k)}{\partial k} \Big|_{k=k_l} \quad (i = 1, 2)$$

と定義した. ここで (2.2.92), (2.2.3) を (2.2.94) に適用すると,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2ik} \frac{d}{dk} W[f_1(x, k), f_2(x, k)] \Big|_{k=k_l} \\
&= -\frac{1}{2ik_l} \left(W[\dot{f}_1(x, k_l), c_{11}(k_l) f_1(x, k_l)] + W[c_{22}(k_l) f_2(x, k_l), \dot{f}_2(x, k_l)] \right) \\
&= -\frac{1}{2ik_l} \left(c_{11}(k_l) W[\dot{f}_1(x, k_l), f_1(x, k_l)] + c_{22}(k_l) W[f_2(x, k_l), \dot{f}_2(x, k_l)] \right) \quad (2.2.95)
\end{aligned}$$

となる. よって (2.2.91), (2.2.95) より

$$\dot{c}_{12}(k_l) = -\frac{1}{2ik_l} \left(c_{11}(k_l) W[\dot{f}_1(x, k_l), f_1(x, k)] + c_{22}(k_l) W[f_2(x, k_l), \dot{f}_2(x, k)] \right) \quad (2.2.96)$$

が得られる.

次に (2.2.96) の右辺に現れた $W[\dot{f}_1(x, k_l), f_1(x, k)]$, $W[f_2(x, k_l), \dot{f}_2(x, k)]$ を計算する. まず $W[\dot{f}_1(x, k_l), f_1(x, k)]$ に着目する. $f_1(x, k)$ に関する Sturm-Liouville 方程式は

$$[f_1(x, k)]_{xx} + k^2 f_1(x, k) = u(x) f_1(x, k) \quad (2.2.97)$$

と書ける. また, 特に $k = k_l$ の場合について考えると

$$[f_1(x, k_l)]_{xx} + k_l^2 f_1(x, k_l) = u(x) f_1(x, k_l) \quad (2.2.98)$$

が成り立つ．(2.2.97)の両辺に $f_1(x, k_l)$ を，そして(2.2.98)の両辺に $f_1(x, k)$ を掛け，両式の差をとると，

$$\begin{aligned}
& f_1(x, k_l) \left([f_1(x, k)]_{xx} + k^2 f_1(x, k) \right) - f_1(x, k) \left([f_1(x, k_l)]_{xx} + k_l^2 f_1(x, k_l) \right) \\
&= f_1(x, k_l) [f_1(x, k)]_{xx} - f_1(x, k) [f_1(x, k_l)]_{xx} + [k^2 - k_l^2] f_1(x, k) f_1(x, k_l) \\
&= \left(f_1(x, k_l) [f_1(x, k)]_x \right)_x - [f_1(x, k_l)]_x [f_1(x, k)]_x \\
&\quad - \left([f_1(x, k_l)]_x f_1(x, k) \right)_x + [f_1(x, k_l)]_x [f_1(x, k)]_x \\
&\quad + [k^2 - k_l^2] f_1(x, k) f_1(x, k_l) \\
&= \left(f_1(x, k_l) [f_1(x, k)]_x - [f_1(x, k_l)]_x f_1(x, k) \right)_x \\
&\quad + [k^2 - k_l^2] f_1(x, k) f_1(x, k_l) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.2.99}$$

と書ける．(2.2.99)式を k で微分し， $k = k_l$ を代入する．すると第1項は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial k} \left(f_1(x, k_l) [f_1(x, k)]_x - [f_1(x, k_l)]_x f_1(x, k) \right) \Big|_{k=k_l} \\
&= \left(f_1(x, k_l) \frac{\partial [f_1(x, k)]_x}{\partial k} - [f_1(x, k_l)]_x \frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k} \right) \Big|_{k=k_l} \\
&= \left(f_1(x, k_l) \frac{d}{dx} [\dot{f}_1(x, k_l)] - \frac{d}{dx} [f_1(x, k_l)] \dot{f}_1(x, k_l) \right)_x \\
&= \frac{d}{dx} W[f_1(x, k_l), [\dot{f}_1(x, k_l)]]
\end{aligned} \tag{2.2.100}$$

となる．また第2項は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial k} [k^2 - k_l^2] f_1(x, k) f_1(x, k_l) \Big|_{k=k_l} \\
&= [2k f_1(x, k) f_1(x, k_l)]_{k=k_l} + \left[[k^2 - k_l^2] \frac{\partial f_1(x, k)}{\partial k} f_1(x, k_l) \right]_{k=k_l} \\
&= 2k_l [f_1(x, k_l)]^2
\end{aligned} \tag{2.2.101}$$

と書ける．よって(2.2.99)は

$$\frac{d}{dx} W[f_1(x, k_l), [\dot{f}_1(x, k_l)]] = -2k_l [f_1(x, k_l)]^2 \tag{2.2.102}$$

と書き換えられる．(2.2.102)を $x = \infty$ から x まで積分すると，

$$W[f_1(x, k_l), \dot{f}_1(x, k_l)] - \left[W[f_1(x, k_l), \dot{f}_1(x, k_l)] \right]_{x=\infty} = 2k_l \int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx'$$

となる．ここで k_l ($\text{Im } k_l > 0$) が純虚数となることに注意すると， $x \rightarrow \infty$ で

$f_1(x, k_l) \rightarrow e^{ik_l x} = 0$ となるので,

$$\begin{aligned} & \left[W[f_1(x, k_l), \dot{f}_1(x, k_l)] \right]_{x=\infty} \\ &= \left[W[e^{ik_l x}, ix e^{ik_l x}] \right]_{x=\infty} \\ &= [e^{ik_l x}(ie^{ik_l x} - k_l x e^{ik_l x}) - ik_l e^{ik_l x} ix e^{ik_l x}]_{x=\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。ただし、式変形の途中で l'Hospital の定理を用いた。以上より、

$$W[f_1(x, k_l), [\dot{f}_1(x, k_l)]] = 2k_l \int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' \quad (2.2.103)$$

が得られる。また $f_2(x, k)$ についても同様の計算によって

$$W[f_2(x, k_l), [\dot{f}_2(x, k_l)]] = -2k_l \int_{-\infty}^x [f_2(x, k_l)]^2 dx' \quad (2.2.104)$$

が得られる。(2.2.103), (2.2.104) を (2.2.96) を代入すると、

$$\begin{aligned} & \dot{c}_{12}(k_l) \\ &= -\frac{1}{2ik_l} \left(c_{11}(k_l) W[\dot{f}_1(x, k_l), f_1(x, k_l)] + c_{22}(k_l) W[f_2(x, k_l), \dot{f}_2(x, k_l)] \right) \\ &= -\frac{1}{2ik_l} \left(-2c_{11}(k_l)k_l \int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' - 2c_{22}(k_l)k_l \int_{-\infty}^x [f_2(x, k_l)]^2 dx' \right) \\ &= -i \left(c_{11}(k_l) \int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' + c_{22}(k_l) \int_{-\infty}^x [f_2(x, k_l)]^2 dx' \right) \end{aligned} \quad (2.2.105)$$

となる。いま (2.2.92) を (2.2.105) に代入して $f_2(x, k_l)$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \dot{c}_{12}(k_l) &= -i \left(c_{11}(k_l) \int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' + c_{22}(k_l)c_{11}(k_l)^2 \int_{-\infty}^x [f_1(x, k_l)]^2 dx' \right) \\ &= -ic_{11}(k_l) \left(\int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' + c_{22}(k_l)c_{11}(k_l) \int_{-\infty}^x [f_1(x, k_l)]^2 dx' \right) \end{aligned} \quad (2.2.106)$$

と表される。ここで (2.2.92), (2.2.3) より

$$c_{22}(k_l)c_{11}(k_l) = 1$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \dot{c}_{12}(k_l) &= -ic_{11}(k_l) \left(\int_x^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' + \int_{-\infty}^x [f_1(x, k_l)]^2 dx' \right) \\ &= -ic_{11}(k_l) \int_{-\infty}^\infty [f_1(x, k_l)]^2 dx' \end{aligned} \quad (2.2.107)$$

が得られる。(2.2.107)の右辺において, $c_{11}(k_l)$, $\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x, k_l)]^2 dx'$ がともにゼロとならなければ $\dot{c}_{12}(k_l) \neq 0$ であることを示すことができる. まず $c_{11}(k_l) \neq 0$ を背理法で示そう. そこで $c_{11}(k_l) = 0$ を仮定する. いま (2.2.92) より $f_2(x, k_l) = c_{11}(k_l) f_1(x, k_l)$ となるので, $f_1(x, k_l)$ が有限値をとることに注意すると $f_2(x, k_l) = 0$ となる. このとき (2.2.21) に注目すると, 左辺はゼロとなり, 右辺は $e^{-ik_l x}$ となる. したがって, この場合等式は常に成立しなくなり矛盾が生じる. 以上より $c_{11}(k_l) \neq 0$ であるということができる.

次に $\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x, k_l)]^2 dx' \neq 0$ となることを示す. このことを示すには $[f_1(x, k_l)]^2 \neq 0$ となること, すなわち $f_1(x, k_l)$ が実数となることを証明すればよい. $f_1(x, k)$ に関する積分方程式 (2.2.17) より

$$f_1(x, k_l) = e^{ik_l x} - \frac{1}{k_l} \int_x^{\infty} \sin k_l(x-x') u(x') f_1(x', k_l) dx' \quad (2.2.108)$$

と表せる. ここで $c_{12}(k)$ の零点 k_l が純虚数であることを思い出すと,

$$k_l = p_l i \quad (p_l > 0) \quad (2.2.109)$$

と書ける. (2.2.109) を (2.2.108) に代入して k_l を消去すると,

$$f_1(x, p_l i) = e^{-p_l x} + \frac{1}{2p_l} \int_x^{\infty} [e^{-p_l(x-x')} - e^{p_l(x-x')}] u(x') f_1(x', p_l i) dx' \quad (2.2.110)$$

と書き換えられる. ポテンシャルが実数であることに注意して (2.2.110) の複素共役をとると,

$$f_1^*(x, p_l i) = e^{-p_l x} + \frac{1}{2p_l} \int_x^{\infty} [e^{-p_l(x-x')} - e^{p_l(x-x')}] u(x') f_1^*(x', p_l i) dx' \quad (2.2.111)$$

が得られる. (2.2.110), (2.2.111) より $f_1(x, p_l i)$, $f_1^*(x, p_l i)$ は同じ形式の積分方程式を満たしているので, $f_1(x, p_l i) = f_1^*(x, p_l i)$ が得られる. このことから $f_1(x, p_l i)$ が実数であることが分かるので, $\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x, k_l)]^2 dx' \neq 0$ となることが示された. 以上より

$$\dot{c}_{12}(k_l) \neq 0 \quad (2.2.112)$$

が得られる. つまり, $T(k) = 1/c_{12}(k)$ の極は全て1位であるという結論に達する.

2.2.4 透過係数の留数

ここまでの議論で透過係数 $T(k)$ の極が全て複素 k 平面の上半分の虚軸上に分布し, またそれらは全て1位であることが分かった. これらの事実を踏まえて透過係数の留数 $\text{Res}[T(k_l)]$ が

$$\text{Res}[T(k_l)] = \text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(k_l)} \right] = \frac{1}{\dot{c}_{12}(k_l)} \quad (2.2.113)$$

と表せることを証明しよう．さらにその結果を用いて透過係数に関する Fourier 変換 (2.2.55) を計算する． $1/c_{12}(k)$ の極は全て 1 位であるから， $k = k_l$ の周りでの $1/c_{12}(k)$ の Laurant 展開は

$$\frac{1}{c_{12}(k)} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (k - k_l)^n \quad (2.2.114)$$

と書ける．ただし a_n は各べきの展開係数を表す．いま $1/c_{12}(k)$ の k に関する微分を考えると，

$$\frac{d}{dk} \left[\frac{1}{c_{12}(k)} \right] = - \left[\frac{1}{c_{12}(k)} \right]^2 \frac{dc_{12}(k)}{dk}$$

すなわち

$$\frac{dc_{12}(k)}{dk} = - \frac{\frac{d}{dk} \left[\frac{1}{c_{12}(k)} \right]}{\left[\frac{1}{c_{12}(k)} \right]^2} \quad (2.2.115)$$

が得られる．ここで (2.2.114) を (2.2.115) に適用すると

$$\begin{aligned} \frac{dc_{12}(k)}{dk} &= - \frac{-a_{-1}(k - k_l)^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (k - k_l)^{n-1}}{[a_{-1}(k - k_l)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k - k_l)^n]^2} \\ &= - \frac{-a_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (k - k_l)^{n+1}}{[a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k - k_l)^{n+1}]^2} \end{aligned} \quad (2.2.116)$$

と書き換えられる．(2.2.116) で $k = k_l$ を代入すれば

$$c_{12}'(k_l) = - \frac{-a_{-1}}{a_{-1}^2} = \frac{1}{a_{-1}} \quad (2.2.117)$$

となる．留数とは Laurant 展開の -1 次の係数のことを指すので，

$$a_{-1} = \text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(k_l)} \right]$$

である．よって

$$\text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(k_l)} \right] = \frac{1}{\dot{c}_{12}(k_l)} \quad (2.2.118)$$

が得られる．(2.2.110)，(2.2.111) より $f_1(x, k_l)$ が実数であることが示されたが，同様の方法で $f_2(x, k_l)$ が実数であることを示せる．したがって，(2.2.92) より $c_{11}(k_l)$ もまた実数であることが分かる．よって (2.2.107) から $c_{12}(k_l)$ は純虚数であり，透過係数の極に関する極 $\text{Res}[1/c_{12}(k_l)]$ もまた純虚数である．すなわち γ_l なる実数を導入すると，(2.2.118) は

$$i\gamma_l \equiv \text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(k_l)} \right] = \frac{1}{\dot{c}_{12}(k_l)} \quad (2.2.119)$$

と表すことができる．以後は留数を γ_l によって表すこととする．

透過係数の極とその留数を求めることができたので、透過係数に関する Fourier 変換 (2.2.55) を計算しよう。(2.2.55) を計算するためには適当な経路での複素積分を実行すればよい。この場合 $\text{Im } k > 0$ では有限個の極を除いて解析的であるから、上半面に実軸を含む半径無限大の半円経路をとればよい。このとき半径無限遠での積分はゼロに収束しなければならない。そのためには

$$e^{-ikz} = \exp(-iz[\text{Re } k + i \text{Im } k]) = e^{-iz \text{Re } k} e^{z \text{Im } k} \rightarrow 0 \quad (|k| \rightarrow \infty) \quad (2.2.120)$$

でなければならない。したがってこの場合 $z < 0$ であることが要請される。いま e^{-ikz} は上半面で極を持たないので、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} dk$ はゼロとみなせる。また、 $e^{-ikz} T(k) = e^{-ikz}/c_{12}(k)$ は上半面で有限個の極を持つ。このとき留数定理を用いると、

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} [T(k) - 1] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} 2\pi i \sum_{l=1}^N e^{p_l z} \text{Res} \left[\frac{1}{c_{12}(x, k_l)} \right] \\ &= i \sum_{l=1}^N e^{p_l z} i \gamma_l \\ &= - \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l z} \quad (z < 0) \end{aligned} \quad (2.2.121)$$

が得られる。この結果は次節で Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式を導出するとき役に立つ。

2.2.5 2.2 節のまとめ

最後に本節の内容をまとめておこう。まず初めにポテンシャルが実数であり無限遠でゼロに収束することを仮定した。この条件下で Sturm-Liouville 方程式 (2.2.2) を定数変化法によって解き、基本解 $f_1(x, k)$, $f_2(x, k)$ に対する積分方程式 (2.2.17), (2.2.21) を得た。4つの基本解 $f_1(x, k)$, $f_1(x, -k)$, $f_2(x, k)$, $f_2(x, -k)$ はそれぞれ他の任意の2つの基本解の線形結合で表現することができる。そこで4つの係数 $c_{11}(k)$, $c_{12}(k)$, $c_{21}(k)$, $c_{22}(k)$ を導入し、 $f_1(x, k)$ を $f_2(x, k)$, $f_2(x, -k)$ の線形結合によって、 $f_2(x, k)$ を $f_1(x, k)$, $f_1(x, -k)$ の線形結合によって表現した。それらが (2.2.31), (2.2.32) の2式である。導入した4つの係数は波の振幅に相当するものである。したがって、(2.2.35) のように係数の比をとると反射、透過の割合を表現することができる。反射、透過の比、すなわち反射係数、透過係数の $|k| \rightarrow \infty$ における振舞いは (2.2.50), (2.2.51), (2.2.52) のようになる。このことから反射係数、透過係数に対する Fourier 変換は (2.2.53), (2.2.54), (2.2.55) のように与えられる。例

例えば透過係数 $T(k)$ の Fourier 変換を計算する場合、上半面における透過係数に関する極の情報が重要となる。基本解に関する積分方程式や量子力学の Schrödinger 方程式、基本解の線形結合の式を考察することによって、極は全て 1 位であり、複素上半面の虚軸上に存在することが分かる。また極での留数の値もまた純虚数となることが分かる。以上のことを踏まえて透過係数 $T(k)$ の Fourier 変換を計算すると (2.2.121) のようになる。

2.3 Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式

2.2 節では Sturm-Liouville 方程式の基本解に関する積分方程式から散乱に関する様々な関係式を導き出した。本節では基本解の線形結合の式を Fourier 変換することによって新たな積分方程式を求める。これらの積分方程式は Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式または GLM 方程式と呼ばれるもので、逆散乱問題を議論する上できわめて重要な方程式となる。

GLM 方程式の導出に入る前に、幾つかの準備をしておこう。基本解の積分方程式 (2.2.17), (2.2.21) に再び着目する。(2.2.17) において散乱が全く起こらない状態、すなわちポテンシャル $u(x) = 0$ の場合を考えると、積分はゼロとなる。したがって、積分の部分は散乱を記述しているものと考えることができる。そこで散乱を記述する関数 $A_R(x, x')$ を導入して

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty e^{ikx'} A_R(x, x') dx' \quad (2.3.1)$$

と書き換える。同様に $f_2(x, k)$ に関して、散乱を記述する関数 $A_L(x, x')$ を導入し、

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \quad (2.3.2)$$

と書くことにする。

次に基本解の線形結合の式 (2.2.31), (2.2.32) に着目する。2つの式の両辺を $c_{12}(k) = c_{21}(k)$ で割ると、(2.2.35) より

$$T(k)f_2(x, k) = R_R(k)f_1(x, k) + f_1(x, -k), \quad (2.3.3)$$

$$T(k)f_1(x, k) = f_2(x, -k) + R_L(k)f_2(x, k) \quad (2.3.4)$$

が得られる。

さらに透過係数、反射係数の Fourier 変換 (2.2.53), (2.2.54), (2.2.55) の逆変換を考えると、

$$R_R(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} r_R(z) dz, \quad (2.3.5)$$

$$R_L(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} r_L(z) dz, \quad (2.3.6)$$

$$T(k) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \Gamma(z) dz \quad (2.3.7)$$

と書ける。

これで前準備はできたので, Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式の導出に移ろう. まず (2.3.3) に対して波数 k に関する Fourier 変換を実行する. いま時間を t , 角振動数を ω として (2.3.3) の両辺に $e^{-i\omega t}/2\pi = e^{-ikct}/2\pi$ を両辺に掛けて $\omega = -\infty$ から $\omega = \infty$ まで積分する. このとき左辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(k) f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \Gamma(z) dz \right] f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, k) e^{-i\omega t} dz \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \Gamma(z) dz \right] f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

と書ける. (2.3.8) の第 1 項において, $f_2(x, k)$ に (2.3.2) を代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ickt} \left[e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \right] cdk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x+ct)} dk + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ickt} \left[\int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \right] dk \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

となる. (2.3.9) の第 1 項はデルタ関数の定義から

$$\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x+ct)} dk = c\delta(x+ct)$$

となる. さらにデルタ関数に関する恒等式 $\delta(ax) = \delta(x)/a$ を適用すると

$$\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x+ct)} dk = \delta\left(\frac{x}{c} + t\right) \quad (2.3.10)$$

が得られる. また (2.3.9) の第 2 項は階段関数を用いると

$$\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ickt} \left[\int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \right] dk = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'+ct)} \theta(x-x') A_L(x, x') dx' dk \quad (2.3.11)$$

と書ける. 階段関数は以下のように定義される.

$$\theta(y) \equiv \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ 1 & (y > 0). \end{cases} \quad (2.3.12)$$

(2.3.11) で $x' + ct = y'$ と置き, デルタ関数の性質 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x+a)dx = f(a)$ を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ickt} \left[\int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \right] dk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky'} \theta(x+ct-y') A_L(x, y'-ct) dy' dk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') \theta(x+ct-y') A_L(x, y'-ct) dy' \\ &= c\theta(x+ct) A_L(x, -ct) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

となる. したがって, (2.3.8) の第 1 項, すなわち (2.3.9) は (2.3.10), (2.3.13) より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega = \delta\left(\frac{x}{c} + t\right) + c\theta(x+ct) A_L(x, -ct) \quad (2.3.14)$$

と書き換えられる. 次に (2.3.8) の第 2 項を計算する. (2.3.9) と同様に $f_2(x, k)$ に (2.3.2) を代入し, デルタ関数の性質を利用すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \Gamma(z) dz \right] f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \Gamma(z) dz \right] \left[e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx' \right] e^{-ickt} c dk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x+ct-z)} dk \right] \Gamma(z) dz \\ & \quad + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'+ct-z)} dk \right] \Gamma(z) dz \right) A_L(x, x') dx' \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+ct-z) \Gamma(z) dz \\ & \quad + c \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x'+ct-z) \Gamma(z) dz \right) A_L(x, x') dx' \\ &= c\Gamma(x+ct) + c \int_{-\infty}^x \Gamma(x'+ct) A_L(x, x') dx' \\ &= c\Gamma(x+ct) + c \int_{\infty}^{-\frac{x}{c}} \Gamma[c(-t'+t)] A_L(x, -ct') (-c) dt' \\ &= c\Gamma(x+ct) + c^2 \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} \Gamma[c(-t'+t)] A_L(x, -ct') dt' \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

となる. ただし式変形の途中で $x' = -ct'$ なる変数変換を行なった. したがって

(2.3.14), (2.3.15) より (2.3.8) は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(k) f_2(x, k) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(x + ct) A_L(x, -ct) + c\Gamma(x + ct) \\ & \quad + c^2 \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} \Gamma[c(-t' + t)] A_L(x, -ct') dt' \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

となる。

次に (2.3.3) の Fourier 変換の右辺を計算しよう。 $R_R(k)$ が (2.3.5) のように書けることに注意すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_R(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k)] e^{-ikct} c dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} r_R(z) dz \right] f_1(x, k) + f_1(x, -k) c \right) e^{-ikct} dk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} r_R(z) dz \right] f_1(x, k) e^{-ikct} dk \\ & \quad + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, -k) e^{-ikct} dk \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

となる。(2.3.17) の第 1 項を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} r_R(z) dz \right] f_1(x, k) e^{-ikct} dk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} r_R(z) dz \right] \left[e^{ikx} + \int_x^{\infty} e^{ikx'} A_R(x, x') dx' \right] e^{-ikct} dk \\ &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(z-x+ct)} dk \right) r_R(z) dz \\ & \quad + \frac{c}{2\pi} \int_x^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz(z-x'+ct)} dk \right) r_R(z) dz \right] A_R(x, x') dx' \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - x + ct) r_R(z) dz \\ & \quad + c \int_x^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - x' + ct) r_R(z) dz \right] A_R(x, x') dx' \\ &= cr_R(x - ct) + c \int_x^{\infty} r_R(x' - ct) A_R(x, x') dx' \\ &= cr_R(x - ct) + c^2 \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} r_R[c(t' - t)] A_R(x, ct') dt' \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

となる。ただし式変形の途中で $x' = ct'$ なる変数変換を行なった。同様に (2.3.17)

の第2項を計算すると

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, -k) e^{-ikct} dk \\
&= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-ikx} + \int_x^{\infty} e^{-ikx'} A_R(x, x') dx' \right] e^{-ikct} dk \\
&= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x+ct)} dk \\
&\quad + \frac{c}{2\pi} \int_x^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'+ct)} dk \right] dx' A_R(x, x') \\
&= c\delta(x+ct) + c \int_x^{\infty} \delta(x'+ct) A_R(x, x') dx' \\
&= \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x'+ct) \theta(x'-x) A_R(x, x') dx' \\
&= \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(-ct-x) A_R(x, -ct) \tag{2.3.19}
\end{aligned}$$

が得られる．以上 (2.3.18) , (2.3.19) より (2.3.17) は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R_R(k) f_1(x, k) + f_1(x, -k)] e^{-ikct} cdk \\
&= cr_R(x-ct) + c^2 \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} r_R[c(t'-t)] A_R(x, ct') dt' \\
&\quad + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(-ct-x) A_R(x, -ct) \tag{2.3.20}
\end{aligned}$$

となる．したがって (2.3.16) 及び (2.3.20) より

$$\begin{aligned}
& \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(x+ct) A_L(x, -ct) + c\Gamma(x+ct) \\
&\quad + c^2 \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} \Gamma[c(-t'+t)] A_L(x, -ct') dt' \\
&= cr_R(x-ct) + c^2 \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} r_R[c(t'-t)] A_R(x, ct') dt' \\
&\quad + \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + c\theta(-ct-x) A_R(x, -ct),
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
& \theta(x+ct) A_L(x, -ct) + \Gamma(x+ct) + c \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} \Gamma[c(-t'+t)] A_L(x, -ct') dt' \\
&= r_R(x-ct) + c \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} r_R[c(t'-t)] A_R(x, ct') dt' + \theta(-ct-x) A_R(x, -ct) \tag{2.3.21}
\end{aligned}$$

が得られる．前節で述べたように， k に関する複素上半面で透過係数 $T(k)$ は解析的となるので， $\Gamma(z)$ は $z < 0$ のとき有限値となることが保証される．そこで (2.3.21) で $\Gamma(x+ct)$ ， $\Gamma[c(-t'+t)]$ の引数が常に負となるような場合を考えることにしよう．まず $\Gamma(x+ct)$ については $x+ct < 0$ という条件が得られる．また $\Gamma[c(-t'+t)]$ については $c > 0$ であることに注意すると $t' > t$ という条件が得られる．いま (2.3.21) の左辺の積分区間は $-x/c < t' < \infty$ であるので， $t < -x/c$ であれば常に $t' > t$ が成立する．つまり2つの条件が同時に成立するためには $x+ct < 0$ であればよい．このとき階段関数の定義より $\theta(x+ct) = 0$ ， $\theta(-ct-x) = 1$ となる．これらの事実及び (2.2.121) の結果を利用すると (2.3.21) は

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l(x+ct)} - c \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l c(-t'+t)} A_L(x, -ct') dt' \\ & = r_R(x-ct) + c \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} r_R[c(t'-t)] A_R(x, ct') dt' + A_R(x, -ct) \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

と書き換えられる．(2.3.22) の左辺において，積分と和の順序を入れ替えても計算結果は変わらないので，

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l(x+ct)} - c \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l c(-t'+t)} A_L(x, -ct') dt' \\ & = -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l ct} \left[e^{p_l x} + c \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-p_l ct'} A_L(x, -ct') dt' \right] \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

と書ける．(2.3.23) で $-ct' = x'$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l ct} \left[e^{p_l x} + c \int_{-\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-p_l ct'} A_L(x, -ct') dt' \right] \\ & = -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l ct} \left[e^{p_l x} + \int_{-\infty}^x e^{p_l x'} A_L(x, x') dx' \right] \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

となる．いま (2.3.24) の括弧の中身は (2.3.2) で $k = p_l i$ と置いたものに等しい．したがって

$$\begin{aligned} & -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l ct} \left[e^{p_l x} + \int_{-\infty}^x e^{p_l x'} A_L(x, x') dx' \right] \\ & = -\sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l ct} f_2(x, p_l i) \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

と書き表せる．ここで透過係数の極で2つの基本解が線形結合であり，(2.2.92) より

$$f_2(x, p_l i) = c_{11}(p_l i) f_1(x, p_l i)$$

が成り立つことを利用すると (2.3.25) は以下のように書き換えられる .

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l c t} f_2(x, p_l i) \\
&= - \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l c t} c_{11}(p_l i) f_1(x, p_l i) \\
&= - \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l c t} c_{11}(p_l i) \left[e^{-p_l x} + \int_x^{\infty} e^{-p_l x'} A_R(x, x') dx' \right]. \quad (2.3.26)
\end{aligned}$$

式変形の最後で (2.3.1) 式を $k = p_l i$ の場合について適用した . (2.3.23) から (2.3.26) までの結果を (2.3.22) に適用すると

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l c t} c_{11}(p_l i) \left[e^{-p_l x} + \int_x^{\infty} e^{-p_l x'} A_R(x, x') dx' \right] \\
&= r_R(x - ct) + c \int_{\frac{x}{c}}^{\infty} r_R[c(t' - t)] A_R(x, ct') dt' + A_R(x, -ct) \quad (x + ct < 0) \\
& \hspace{15em} (2.3.27)
\end{aligned}$$

が得られる . (2.3.27) において $ct = -y$ と置き , 右辺第 2 項の積分で $ct' = x'$ と変数変換すると ,

$$\begin{aligned}
& - \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{-p_l y} c_{11}(p_l i) \left[e^{-p_l x} + \int_x^{\infty} e^{-p_l x'} A_R(x, x') dx' \right] \\
&= r_R(x + y) + \int_x^{\infty} r_R(x' + y) A_R(x, x') dx' + A_R(x, y) \quad (2.3.28)
\end{aligned}$$

と書き換えられる . (2.3.28) の左辺第 2 項の和と積分の順序を入れ替え , 左辺の各項を右辺に移項すると ,

$$0 = r_R(x + y) + \sum_{l=1}^N \gamma_l c_{11}(p_l i) e^{-p_l(x+y)} + \int_x^{\infty} \left[r_R(x' + y) + \sum_{l=1}^N \gamma_l c_{11}(p_l i) e^{-p_l(x'+y)} \right] A_R(x, x') dx' \quad (2.3.29)$$

となる . ここで

$$m_{Rl} \equiv \gamma_l c_{11}(p_l i) = - \frac{i c_{11}(p_l i)}{c_{12}(p_l i)}, \quad (2.3.30)$$

$$\Omega_R(z) \equiv r_R(z) + \sum_{l=1}^N m_{Rl} e^{-p_l z} \quad (2.3.31)$$

と置くと ,

$$\Omega_R(x + y) + A_R(x, y) + \int_x^{\infty} \Omega_R(x' + y) A_R(x, x') dx' = 0 \quad (x < y) \quad (2.3.32)$$

が得られる .

同様に (2.3.4) の Fourier 変換を考えると , 次の積分方程式を得る .

$$\Omega_L(x+y) + A_L(x,y) + \int_x^\infty \Omega_L(x'+y)A_L(x,x')dx' = 0 \quad (x > y). \quad (2.3.33)$$

ただし

$$\Omega_L(z) \equiv r_L(z) + \sum_{l=1}^N \gamma_l e^{p_l z} c_{22}(p_l i) = r_L(z) + \sum_{l=1}^N m_{Ll} e^{p_l z}, \quad (2.3.34)$$

$$m_{Ll} \equiv \gamma_l c_{22}(p_l i) = -\frac{ic_{22}(p_l i)}{c_{12}(p_l i)} \quad (2.3.35)$$

である .

積分方程式 (2.3.32) , (2.3.33) は GLM 方程式と呼ばれる . 散乱問題において , GLM 方程式はポテンシャル $u(x)$, 基本解 $f_j(x, k)$ ($j = 1, 2$) , 関数 $A_R(x, y)$ または $A_L(x, y)$ から反射係数 $R_R(k)$, $R_L(k)$ を決定するのに用いられる . GLM 方程式は散乱問題において重要な役割を果たすだけでなく , 逆散乱問題においても重要となる . 逆散乱問題の場合 , GLM 方程式は反射係数から関数 $A_R(x, y)$, $A_L(x, y)$ を求めるのに用いられる . 逆散乱問題でポテンシャル $u(x)$ を求める手順については次の章で詳しく述べることにする .

第3章 逆散乱理論

3.1 ポテンシャル $u(x)$ と関数 $A_R(x, y)$, $A_L(x, y)$ との関係

本章では逆散乱問題について議論する．逆散乱問題とは 1.3 節で述べたように散乱波のデータから散乱の原因となるポテンシャルの形を求める問題のことである．第 2 章で導入した散乱に関するさまざまな関数を用いて逆散乱問題の手順を具体的に説明すると，反射係数 $R_R(k)$ または $R_L(k)$ の Fourier 変換 $r_R(z)$, $r_L(z)$ から散乱を記述する関数 $A_R(x, x')$, $A_L(x, x')$ を求め， $A_R(x, x')$, $A_L(x, x')$ からポテンシャル $u(x)$ を決定することになる．逆散乱問題では 2.3 節で導出した GLM 方程式は $r_R(z)$, $r_L(z)$ から $A_R(x, x')$, $A_L(x, x')$ を決定するのに用いられる．本節では $A_R(x, x')$, $A_L(x, x')$ とポテンシャル $u(x)$ の関係式を求める．

2.3 節では基本解 $f_1(x, k)$, $f_2(x, k)$ の散乱を記述する成分として関数 $A_R(x, x')$, $A_L(x, x')$ を以下の式によって導入した．

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty e^{ikx'} A_R(x, x') dx', \quad (3.1.1)$$

$$f_2(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x e^{-ikx'} A_L(x, x') dx'. \quad (3.1.2)$$

(3.1.1) の両辺に $e^{-ickt}/2\pi$ を掛けて $k = -\infty$ から $k = \infty$ まで積分すると，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f_1(x, k) e^{-ickt} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik(x-ct)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_x^\infty e^{ik(x'-ct)} A_R(x, x') dx' dk \\ &= \delta(x-ct) + \int_x^\infty \delta(x'-ct) A_R(x, x') dx' \\ &= \delta(x-ct) + \int_{-\infty}^\infty \delta(x'-ct) \theta(x'-x) A_R(x, x') dx' \\ &= \delta(x-ct) + \theta(ct-x) A_R(x, ct) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

となる．ここで

$$F(x, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f_1(x, k) e^{-ickt} dk \quad (3.1.4)$$

と置くと, (3.1.3) は

$$F(x, t) = \delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct) \quad (3.1.5)$$

と書き換えることができる. $F(x, t)$ が満たすべき方程式は Sturm-Liouville 方程式

$$[f_1(x, k)]_{xx} + [k^2 - u(x)]f_1(x, k) = 0 \quad (3.1.6)$$

から求めることができる. いま

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x, k)]_{xx} e^{-ickt} dk$$

となること, そして

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c^2 k^2 f_1(x, k) e^{-ickt} dk$$

となることに注意し, (3.1.6) に $e^{-ickt}/2\pi$ を掛けて $k = -\infty$ から $k = \infty$ まで積分すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{[f_1(x, k)]_{xx} + [k^2 - u(x)]f_1(x, k)\} e^{-ickt} dk \\ &= \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} - u(x)F(x, t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

が得られる. ここで

$$\frac{\partial \theta(ct - x)}{\partial x} = -\delta(ct - x), \quad \frac{\partial \theta(ct - x)}{\partial t} = c\delta(ct - x)$$

となること, そして

$$\frac{\partial^2 \delta(x - ct)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta(x - ct)}{\partial t^2}$$

が成立することに注意して (3.1.7) に (3.1.5) を代入すると

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} - u(x)F(x, t) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct)] \\
&\quad - u(x)[\delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct)] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\theta(ct - x)A_R(x, ct)] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\theta(ct - x)A_R(x, ct)] \\
&\quad - u(x)[\delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct)] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} [-\delta(ct - x)A_R(x, ct) + \theta(ct - x) \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x}] \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [c\delta(ct - x)A_R(x, ct) + \theta(ct - x) \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial t}] \\
&\quad - u(x)[\delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct)] \\
&= \delta'(ct - x)A_R(x, ct) - 2\delta(ct - x) \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} + \theta(ct - x) \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial x^2} \\
&\quad - \delta'(ct - x)A_R(x, ct) - \frac{2}{c} \delta(ct - x) \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \theta(ct - x) \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial t^2} \\
&\quad - u(x)[\delta(x - ct) + \theta(ct - x)A_R(x, ct)] \\
&= -2\delta(ct - x) \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} + \theta(ct - x) \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial x^2} - \frac{2}{c} \delta(ct - x) \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \theta(ct - x) \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial t^2} - u(x)\delta(x - ct) - u(x)\theta(ct - x)A_R(x, ct) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

となる . (3.1.8) を $t = x/c - \varepsilon$ から $t = x/c + \varepsilon$ まで積分するとデルタ関数の性質 $\int_{x/c-\varepsilon}^{x/c+\varepsilon} \delta(ct - x)f(t)dt = f(x/c)$ より

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} \Big|_{ct=x} + \int_{\frac{x}{c}-\varepsilon}^{\frac{x}{c}+\varepsilon} \theta(ct - x) \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial x^2} dt - \frac{2}{c} \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial t} \Big|_{ct=x} \\
& - \int_{\frac{x}{c}-\varepsilon}^{\frac{x}{c}+\varepsilon} \frac{1}{c^2} \theta(ct - x) \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial t^2} dt - u(x) - u(x) \int_{\frac{x}{c}-\varepsilon}^{\frac{x}{c}+\varepsilon} \theta(ct - x)A_R(x, ct) dt \\
&= -2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} \Big|_{ct=x} + \int_{\frac{x}{c}}^{\frac{x}{c}+\varepsilon} \frac{\partial^2 A_R(x, ct)}{\partial x^2} dt - \frac{2}{c} \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial t} \Big|_{ct=x} \\
& - \int_{\frac{x}{c}}^{\frac{x}{c}+\varepsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} dt - u(x) - u(x) \int_{\frac{x}{c}}^{\frac{x}{c}+\varepsilon} A_R(x, ct) dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

となる . (3.1.9) において $\varepsilon \rightarrow 0$ なる極限を考えると , 積分の項はゼロとなる . すなわち ,

$$-2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial x} \Big|_{ct=x} - 2 \frac{\partial A_R(x, ct)}{\partial(ct)} \Big|_{ct=x} - u(x) = 0 \tag{3.1.10}$$

が得られる．ここで一般に2変数関数 $g(x, y)$ に関して

$$\frac{dg(x, x)}{dx} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=x}$$

が成り立つことに注意すると, $u(x)$ と $A_R(x, x)$ の関係式として

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} A_R(x, x) \quad (3.1.11)$$

が得られる．また $f_2(x, y)$ について同様の計算を行なうことによって

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} A_L(x, x) \quad (3.1.12)$$

なる関係式を導くことができる．

与えられた反射係数に対して, GLM 方程式から $A_R(x, y)$ ないし $A_L(x, y)$ を厳密に求めることができれば, ポテンシャルと散乱を記述する関数との関係式 (3.1.11), (3.1.12) からポテンシャルを完全に復元することができる．GLM 方程式は線形の積分方程式ではあるものの, ほとんどの場合においてその解析解を求めることは容易ではない．しかしながら最も簡単な場合として, 反射係数がゼロである場合については解析解を求めることができることが知られている．そこで次節では反射係数がゼロの場合のポテンシャル, すなわち無反射ポテンシャル(reflectionless potential) を求める一般的な解法について考察する．

3.2 無反射ポテンシャル

本節では最も単純なケースとして反射係数がゼロである場合のポテンシャルについて考える．ここでは $\Gamma_L(x+y)$, $A_L(x,y)$ に関する GLM 方程式

$$\Omega_L(x+y) + A_L(x,y) + \int_{-\infty}^x \Omega_L(x'+y)A_L(x,x')dx' = 0 \quad (3.2.1)$$

について考察する． p_l, m_{Ll} といった量は既知であるものとして話を進める．いま反射係数 $R_L(k)$ はゼロであるので， $R_L(k)$ の Fourier 変換 $r_L(z)$ もまたゼロとなる．したがって $\Omega_L(x+y)$ は (2.3.34) より

$$\begin{aligned} \Omega_L(x+y) &= r_L(x+y) + \sum_{l=1}^N m_{Ll} e^{p_l(x+y)} \\ &= \sum_{l=1}^N m_{Ll} e^{p_l(x+y)} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

となる．ここで N 個の成分を持つ 2 つのベクトル $\Psi(z)$, $\Phi(z)$ を

$$\Psi(z) \equiv (m_{L1}e^{p_1z}, m_{L2}e^{p_2z}, \dots, m_{LN}e^{p_Nz}), \quad (3.2.3)$$

$$\Phi(z) \equiv (e^{p_1z}, e^{p_2z}, \dots, e^{p_Nz}) \quad (3.2.4)$$

と定義すると， $\Omega_L(x+y)$ は 2 つのベクトルの内積として

$$\Omega_L(x+y) = \Psi(x) \cdot \Phi^T(y) \quad (3.2.5)$$

と表せる．ただし上付き添字の T は転置を表す．いま散乱を記述する関数 $A_L(x,y)$ が未知のベクトル $\Lambda(x)$ とベクトル $\Phi(z)$ によって

$$A_L(x,y) = \Lambda(x) \cdot \Phi^T(y) \quad (3.2.6)$$

と表せると仮定する．このとき GLM 方程式 (3.2.1) は

$$\Psi(x) \cdot \Phi^T(y) + \Lambda(x) \cdot \Phi^T(y) + \int_{-\infty}^x [\Psi(x') \cdot \Phi^T(y)][\Lambda(x') \cdot \Phi^T(x')]dx' = 0 \quad (3.2.7)$$

と書ける．

ここで (3.2.7) の積分の項が

$$\int_{-\infty}^x [\Psi(x') \cdot \Phi^T(y)][\Lambda(x') \cdot \Phi^T(x')]dx' = \Lambda(x) \cdot \left[\int_{-\infty}^x \Phi^T(x')\Psi(x')dx' \right] \cdot \Phi^T(y) \quad (3.2.8)$$

と書き換えられることを示そう． $\Psi(x')$ ， $\Phi^T(y)$ ， $\Lambda(x)$ の第 j 行 (列) 成分をそれぞれ $\Psi_j(x')$ ， $\Phi_j^T(y)$ ， $\Lambda_j(x)$ と書くこととすると，

$$\int_{-\infty}^x [\Psi(x') \cdot \Phi^T(y)] [\Lambda(x) \cdot \Phi^T(x')] dx' = \int_{-\infty}^x [\Psi_i(x') \Phi_i^T(y) \Lambda_j(x) \Phi_j^T(x')] dx' \quad (3.2.9)$$

が成り立つ．ただし，同じ添字が 2 度現れた場合にはその添字に関する N 個の和をとるものとする．以後，同じ添字が 2 度現れる場合は同様にその添字に関する和をとるものとする．一方，

$$\begin{aligned} & \Lambda(x) \cdot \left[\int_{-\infty}^x \Phi^T(x') \Psi(x') dx' \right] \cdot \Phi^T(y) \\ &= \Lambda_m(x) \left[\int_{-\infty}^x \Phi_m^T(x') \Psi_n(x') dx' \right] \Phi_n^T(y) \\ &= \int_{-\infty}^x [\Psi_n(x') \Phi_n^T(y) \Lambda_m(x) \Phi_m^T(x')] dx' \\ &= \int_{-\infty}^x [\Psi_i(x') \Phi_i^T(y) \Lambda_j(x) \Phi_j^T(x')] dx' \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

となる．ただし式変形の最後で，和に関する添字を別の文字に置き換えてもよいことを利用した．以上より (3.2.9) と (3.2.10) は等しいので，(3.2.8) 式が成り立つことが示された．

(3.2.8) 式を (3.2.7) 式に代入すると，

$$\Psi(x) \cdot \Phi^T(y) + \Lambda(x) \cdot \Phi^T(y) + \Lambda(x) \cdot \left[\int_{-\infty}^x \Phi^T(x') \Psi(x') dx' \right] \cdot \Phi^T(y) = 0 \quad (3.2.11)$$

となる．ここで N 次単位行列を $E = \{\delta_{ij}\}$ とすると

$$\Lambda(x) \cdot \Phi^T(y) = \Lambda(x) \cdot E \cdot \Phi^T(y) \quad (3.2.12)$$

と表せるので，(3.2.11) は

$$\Psi(x) \cdot \Phi^T(y) + \Lambda(x) \cdot \left[E + \int_{-\infty}^x \Phi^T(x') \Psi(x') dx' \right] \cdot \Phi^T(y) = 0 \quad (3.2.13)$$

と書き換えられる．さらに

$$V(x) \equiv E + \int_{-\infty}^x \Phi^T(x') \Psi(x') dx' \quad (3.2.14)$$

なる N 次正方行列 $V(x)$ を導入すると，

$$\begin{aligned} & \Psi(x) \cdot \Phi^T(y) + \Lambda(x) \cdot V(x) \cdot \Phi^T(y) \\ &= [\Psi(x) + \Lambda(x) \cdot V(x)] \cdot \Phi^T(y) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

が得られる。(3.2.15) が恒等的に成立するためには、 $\Psi(x) + \Lambda(x) \cdot V(x)$ または $\Phi^T(y)$ がゼロベクトルでなければならない。いま (3.2.4) より $\Phi^T(y)$ がゼロベクトルとなることはないので、結局

$$\Lambda(x) \cdot V(x) = -\Psi(x) \quad (3.2.16)$$

とならなければならない。(3.2.16) に右側から $V(x)$ の逆行列 $V^{-1}(x)$ を掛けると、

$$\Lambda(x) \cdot V(x)V^{-1}(x) = \Lambda(x) \cdot E = \Lambda(x) = -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) \quad (3.2.17)$$

となり、未知の関数 $\Lambda(x)$ を決めることができた。(3.2.17) を (3.2.6) に代入すると、

$$A_L(x, y) = -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) \cdot \Phi^T(y) \quad (3.2.18)$$

となる。さらに $y = x$ とすると、

$$A_L(x, x) = -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) \cdot \Phi^T(x) \quad (3.2.19)$$

が得られる。

ここで (3.2.19) 式が

$$A_L(x, x) = -\text{Tr}[\Phi^T(x)\Psi(x) \cdot V^{-1}(x)] \quad (3.2.20)$$

と書き換えられることを示そう。ここで Tr はトレース (行列の対角成分の和) を表す。逆行列 $V^{-1}(x)$ の ij 成分を $v_{ij}^{-1}(x)$ と書くこととすると、(3.2.19) は

$$\begin{aligned} A_L(x, x) &= -\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) \cdot \Phi^T(x) \\ &= -\Psi_i(x)v_{ij}^{-1}(x)\Phi_j^T(x) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

と表せる。次に行列

$$\Phi^T(x)\Psi(x) \cdot V^{-1}(x) = \{\Phi_i^T(x)\Psi_k(x)v_{kj}^{-1}(x)\}$$

のトレースを計算する。一般に行列 $A = \{a_{ij}\}$ のトレースが $\text{Tr}[A] = a_{ii} = a_{ij}\delta_{ij}$ と書けることに着目すると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\Phi^T(x)\Psi(x) \cdot V^{-1}(x)] &= \Phi_i^T(x)\Psi_k(x)v_{kj}^{-1}(x)\delta_{ij} \\ &= \Psi_i(x)v_{ij}^{-1}(x)\Phi_j^T(x) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

となる。したがって (3.2.21)、(3.2.22) の結果から (3.2.20) が成り立つことが示された。

ここで (3.2.14) 式の両辺を x で微分すると、成分が全て 0 または 1 である単位行列は消えるので、

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[E + \int_{-\infty}^x \Phi^T(x')\Psi(x')dx' \right] \\ &= \Phi^T(x)\Psi(x) \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

となる．したがって (3.2.23) を用いると (3.2.20) は

$$A_L(x, x) = -\text{Tr} \left[\frac{dV(x)}{dx} \cdot V^{-1}(x) \right] \quad (3.2.24)$$

となる．

ここで

$$\text{Tr} \left[\frac{dV(x)}{dx} \cdot V^{-1}(x) \right] = \frac{d}{dx} [\ln(\det V(x))] \quad (3.2.25)$$

となることを証明しよう．ただし $\det V(x)$ は $V(x)$ の行列式を表す．行列式を考えるために，順列と呼ばれる概念を導入しよう．順列とは任意の数の異なる整数を一列に並べたものを言う．いま 1 から n までの n 個の整数からなる順列を (i_1, i_2, \dots, i_n) と表す．ただし i_k は n 個の整数を適当な順番で並べたときに， k 番目に並べたものである．順列 (i_1, i_2, \dots, i_n) の 2 つの数字を複数回交換して $(1, 2, \dots, n)$ という順列を作るとき，その交換回数が偶数回となるか奇数回となるかは順列によって決まっている．偶数回の交換によって順列 $(1, 2, \dots, n)$ を作れるものを偶順列と呼び，奇数回の交換によって作れるものを奇順列と呼ぶ．ここで順列 (q_1, q_2, \dots, q_n) の符号 $\varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_n)$ を以下のように定義する．

$$\varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_n) \equiv \begin{cases} +1 & (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ が偶順列の場合} \\ -1 & (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ が奇順列の場合.} \end{cases} \quad (3.2.26)$$

行列 $V(x)$ の ij 成分を v_{ij} と置くと，(3.2.26) で定義した順列の符号を用いて

$$\begin{aligned} \det V(x) &= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} v_{2q_2} \dots v_{Nq_N} \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) \prod_{k=1}^N v_{ki_k} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

と表される．ここで (3.2.27) の右辺の和は 1 から N までの全ての順列 (q_1, q_2, \dots, q_N) についてとるものとする．いま

$$\frac{dV}{dx} = BV \quad (3.2.28)$$

を満たす行列 $B = \{b_{ij}\}$ を考えると，

$$\frac{dv_{ij}}{dx} = b_{ik} v_{kj} \quad (3.2.29)$$

と表せる．(3.2.29)の両辺を x で微分し，(3.2.28)を適用すると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\det V(x)] &= \frac{d}{dx} \left[\sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} v_{2q_2} \dots v_{Nq_N} \right] \\
&= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) \frac{dv_{1q_1}}{dx} v_{2q_2} \dots v_{Nq_N} \\
&\quad + \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} \frac{dv_{2q_2}}{dx} \dots v_{Nq_N} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} v_{2q_2} \dots \frac{dv_{Nq_N}}{dx} \\
&= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) [b_{1k} v_{kq_1}] v_{2q_2} \dots v_{Nq_N} \\
&\quad + \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} [b_{2k} v_{kq_2}] \dots v_{Nq_N} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} v_{2q_2} \dots [b_{Nk} v_{kq_N}] \quad (3.2.30)
\end{aligned}$$

となる．いま b_{mn} ($m \neq n$) に関する項について考えると，その係数は

$$\sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} v_{2q_2} \dots v_{m-1q_{m-1}} v_{nq_m} v_{m+1q_{m+1}} \dots v_{nq_n} \dots v_{Nq_N} \quad (3.2.31)$$

と表される．順列の符号に関して

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_m, q_{m+1}, \dots, q_{n-1}, q_n, q_{n+1}, \dots, q_N) \\
&= -\varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_{m-1}, q_n, q_{m+1}, \dots, q_{n-1}, q_m, q_{n+1}, \dots, q_N)
\end{aligned}$$

が成り立つことに着目すると，(3.2.30)より b_{mn} ($m \neq n$) に関する項は $v_{nq_m} v_{nq_n}$ なる部分を含んでいるので，結局係数の各項は全て打ち消し合ってゼロとなる．つ

まり (3.2.29) で残るのは b_{mn} ($m = n$) に関する項のみである。したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\det V(x)] &= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) b_{11} v_{1q_1} v_{2q_2} \dots v_{Nq_N} \\
&+ \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} b_{22} v_{2q_2} \dots v_{Nq_N} \\
&+ \dots \\
&+ \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) v_{1q_1} v_{2q_2} \dots b_{NN} v_{Nq_N} \\
&= \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) b_{11} \prod_{k=1}^N v_{kq_k} \\
&\quad \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) b_{22} \prod_{k=1}^N v_{kq_k} \\
&\quad \dots \\
&\quad \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) b_{NN} \prod_{k=1}^N v_{kq_k} \\
&= (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{NN}) \sum_{q_1, q_2, \dots, q_N} \varepsilon(q_1, q_2, \dots, q_N) \prod_{k=1}^N v_{kq_k} \\
&= (\text{Tr } B)(\det V) \tag{3.2.32}
\end{aligned}$$

が得られる。(3.2.28) より

$$B = \frac{dV}{dx} V^{-1}$$

となることに注意すると, (3.2.32) は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\det V(x)] &= (\text{Tr } B)(\det V) \\
&= \text{Tr} \left[\frac{dV}{dx} V^{-1} \right] \det V
\end{aligned}$$

すなわち

$$\text{Tr} \left[\frac{dV}{dx} V^{-1} \right] = \frac{\frac{d}{dx}[\det V(x)]}{\det V} = \frac{d}{dx}[\ln(\det V)]$$

となり, (3.2.25) が得られた。

(3.2.25) を (3.2.24) に代入すると,

$$A_L(x, x) = -\frac{d}{dx}[\ln(\det V)] \tag{3.2.33}$$

となる。いまポテンシャル $u(x)$ は (3.1.12) で与えられることが分かっているので,

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} A_L(x, x) = -2 \frac{d^2}{dx^2}[\ln(\det V)] \tag{3.2.34}$$

が得られる .

また $A_R(x, x)$ について考えると , 同様の計算により

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} A_R(x, x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} [\ln(\det \tilde{V})] \quad (3.2.35)$$

が得られる . ここで ,

$$\tilde{V} = E + \int_x^\infty \tilde{\Phi}(x') \tilde{\Psi}(x') dx', \quad (3.2.36)$$

$$\tilde{\Psi}(z) \equiv (m_{R1} e^{-p_1 z}, m_{R2} e^{-p_2 z}, \dots, m_{RN} e^{-p_N z}), \quad (3.2.37)$$

$$\tilde{\Phi}(z) \equiv (e^{-p_1 z}, e^{-p_2 z}, \dots, e^{-p_N z}) \quad (3.2.38)$$

である . (3.2.34) と (3.2.35) の結果は常に一致するので , $A_R(x, x)$ から $u(x)$ を求めてもよいし , $A_L(x, x)$ から $u(x)$ を求めてもよい .

この節で議論した内容は , 任意のパラメータ t に依存するポテンシャル $u(x, t)$ についても適用することができる . 実際に第 4 章では t を時間パラメータと考えて KdV 方程式のソリトン解 $u(x, t)$ を求める . この方法によって任意の個数の純粋なソリトン解を厳密に求めることができる . ただし解を求める際 , $N \times N$ の行列式に関する演算を行なうことになるので , 透過係数の極の数 N が多ければ多いほど , 計算量は増大することになる .

第4章 逆散乱法によるKdV方程式の解法

4.1 散乱データの時間依存性

本章では第3章で議論した逆散乱法を利用してKdV方程式のソリトン解を求める。第2章の散乱理論，第3章の逆散乱理論では空間座標 x 以外のパラメータを考慮しなかったが，本章では各物理量がパラメータ t に依存する場合について考えることとする。

2.1節で見たように，パラメータ t に依存する Sturm-Liouville 方程式

$$y_{xx}(x; t) + [k^2 - u(x, t)]y(x; t) = 0 \quad (4.1.1)$$

において，固有値 k^2 がパラメータ t に依存しないとき，ポテンシャル $u(x, t)$ はKdV方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.1.2)$$

を満たす。また， t を時間パラメータとみなしたとき， $u(x, t)$ の時間発展は方程式

$$y_t = -4y_{xxx} + 6uy_x + 3u_x y \quad (4.1.3)$$

によって支配される。言い換えるとパラメータ t を考慮した Sturm-Liouville 方程式の基本解が(4.1.3)式を満足するとき，ポテンシャル $u(x, t)$ はKdV方程式(4.1.2)を満たすことになる。すなわち(3.1.3)式に基づいて係数 R_L (または R_R)， m_{Ll} (または m_{Rl})の時間パラメータ依存性を決定し，さらに逆散乱法を適用して空間構造を決定することによってKdV方程式の解 $u(x, t)$ を求めることができる。そこで本節では散乱に関する各係数の時間依存性が明確に定まることを示す。

ここでは関数 $A_L(x, x; t)$ からポテンシャルを求める場合について考えよう。このとき $u(x, t)$ は

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A_L(x, x; t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\ln(\det V(x; t))] \quad (4.1.4)$$

と与えられる．ただし行列 V は (3.2.14) で定義される．関数 $A_L(x, y; t)$ は GLM 方程式

$$\Omega_L(x + y; t) + A_L(x, y; t) + \int_{-\infty}^x \Omega_L(x' + y; t) A_L(x, x'; t) dx' = 0 \quad (4.1.5)$$

を満たす．ここで

$$\Omega_L(z; t) = r_L(z; t) + \sum_{l=1}^N m_{Ll}(t) e^{p_l z}, \quad (4.1.6)$$

$$r_L(z; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} R_L(k; t) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} \frac{c_{22}(k; t)}{c_{12}(k; t)} dk, \quad (4.1.7)$$

$$m_{Ll}(t) = -\frac{ic_{22}(p_l i; t)}{\dot{c}_{12}(p_l i; t)} \quad (4.1.8)$$

である．(4.1.8) で \cdot は k に関する偏微分であることに注意したい．(4.1.5), (4.1.6), (4.1.7), (4.1.8) より $c_{12}(k; t)$, $c_{22}(k; t)$ の時間依存性が定まれば, 原理的には $A_L(x, x; t)$ の時間依存性を決めることができる．パラメータ t を考慮すると, 線形結合の式 (2.2.32) は

$$f_1(x, k; t) = c_{12}(k; t) f_2(x, -k; t) + c_{22}(k; t) f_2(x, k; t) \quad (4.1.9)$$

と書き表される．そこで $c_{12}(k; t)$, $c_{22}(k; t)$ の時間依存性を決めるために, $f_1(x, k; t)$ に比例する解

$$y(x, k; t) = h(k; t) f_1(x, k; t) \quad (4.1.10)$$

について解析する．いま $|x| \rightarrow \infty$ の極限を考える．このとき $u(x, t) \rightarrow 0$ となり, その偏導関数 $u_x(x, t)$ もまたゼロに収束する．したがって方程式 (3.1.3) は

$$y_t + 4y_{xxx} = 0 \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (4.1.11)$$

となる．基本解 $f_1(x, k; t)$ が $x \rightarrow \infty$ の極限で e^{ikx} に収束することに注意して (4.1.10) を (4.1.11) に代入すると,

$$\begin{aligned} y_t + 4y_{xxx} &= h_t(k, t) e^{ikx} + 4h(x, t) (ik)^3 e^{ikx} \\ &= [h_t(k, t) - 4ik^3 h(k, t)] e^{ikx} \\ &= 0 \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

となる．したがって, $h(k, t)$ は

$$h_t(k, t) = 4ik^3 h(k, t) \quad (4.1.13)$$

という方程式を満たす． $h(k, t) = a(k) e^{bt}$ と置き, (4.1.13) に代入すると $a(k) = h(k, 0)$, $b = 4ik^3$ となることが分かる．すなわち

$$h(k, t) = h(k, 0) e^{4ik^3 t} \quad (4.1.14)$$

が得られる．次に $x \rightarrow -\infty$ なる極限を考える．このとき $f_2(x, -k; t) \rightarrow e^{ikx}$, $f_2(x, k; t) \rightarrow e^{-ikx}$ となるので ,

$$f(x, k; t) \rightarrow c_{12}(k; t)e^{ikx} + c_{22}(k; t)e^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (4.1.15)$$

と書ける．(4.1.10) を (4.1.11) に代入し , (4.1.15) を適用すると ,

$$\begin{aligned} y_t + 4y_{xxx} &= [h(k, 0)e^{4ik^3t}(c_{12}e^{ikx} + c_{22}e^{-ikx})]_t \\ &\quad + 4[h(k, 0)e^{4ik^3t}(c_{12}e^{ikx} + c_{22}e^{-ikx})]_{xxx} \\ &= h(k, 0)e^{4ik^3t}\{4ik^3[c_{12}e^{ikx} + c_{22}e^{-ikx}] \\ &\quad + [c_{12t}e^{ikx} + c_{22t}e^{-ikx}]\} \\ &\quad + 4h(k, 0)e^{4ik^3t}[(ik)^3(c_{12}e^{ikx} + (-ik)^3c_{22}e^{-ikx})] \\ &= h(k, 0)e^{4ik^3t}\{e^{ikx}[4ik^3c_{12} + c_{12t} - 4ik^3c_{12}] \\ &\quad + e^{-ikx}[4ik^3c_{22} + c_{22t} + 4ik^3c_{22}]\} \\ &= h(k, 0)e^{4ik^3t}\{c_{12t}e^{ikx} + [c_{22t} + 8ik^3c_{22}]e^{-ikx}\} \\ &= 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

となる．(4.1.16) 式が任意の x, k, t について成立するためには

$$c_{12t} = 0, \quad (4.1.17)$$

$$c_{22t} = -8ik^3c_{22} \quad (4.1.18)$$

の 2 式が満たされなければならない．(4.1.17) , (4.1.18) より直ちに

$$c_{12}(k; t) = c_{12}(k; 0), \quad (4.1.19)$$

$$c_{22}(k; t) = c_{22}(k; 0)e^{-8ik^3t} \quad (4.1.20)$$

が得られる．(4.1.19) , (4.1.20) より係数 $m_{Ll}(t)$ を計算すると ,

$$\begin{aligned} m_{Ll}(t) &= -\frac{ic_{22}(pl; t)}{\dot{c}_{12}(pl; t)} \\ &= -\frac{ic_{22}(pl; 0)}{\dot{c}_{12}(pl; 0)}e^{-8i(pl)^3t} \\ &= m_{Ll}(pl, 0)e^{-8pl^3t} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

となる．また反射係数 $R_L(k; t)$ は

$$R_L(k; t) = \frac{c_{22}(k; t)}{c_{12}(k; t)} = R_L(k, 0)e^{-8ik^3t} \quad (4.1.22)$$

となる．

$A_R(x, x; t)$ から $u(x, t)$ を計算する場合についても同様に考えることができる．ポテンシャル $u(x, t)$ は

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} A_R(x, x; t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} [\ln(\det \tilde{V}(x; t))] \quad (4.1.23)$$

と与えられる．ただし行列 \tilde{V} は (3.2.36) で定義される． $A_R(x, y; t)$ に関する GLM 方程式は

$$\Omega_R(x + y; t) + A_R(x, y; t) + \int_x^\infty \Omega_L(x' + y; t) A_L(x, x'; t) dx' = 0 \quad (4.1.24)$$

と書ける．ただし

$$\Omega_R(z; t) = r_R(z; t) + \sum_{l=1}^N m_{Rl}(t) e^{-p_l z}, \quad (4.1.25)$$

$$r_R(z; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} R_R(k; t) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{c_{11}(k; t)}{c_{12}(k; t)} dk, \quad (4.1.26)$$

$$m_{Rl}(t) = -\frac{ic_{11}(p_l i; t)}{\dot{c}_{12}(p_l i; t)} \quad (4.1.27)$$

である． $A_L(x, x; t)$ の場合と同様に基本解の漸近的な振舞いを調べることによって，以下の 3 式を得る．

$$c_{11}(k, t) = c_{11}(k, 0) e^{8ik^3 t}, \quad (4.1.28)$$

$$m_{Rl}(t) = m_{Rl}(p_l i, 0) e^{8(p_l i)^3 t}, \quad (4.1.29)$$

$$R_R(k; t) = R_R(k; 0) e^{8ik^3 t}. \quad (4.1.30)$$

これで係数 c_{ij} , m_{Ll} , m_{Rl} の時間依存性を決定することができた．次節以降ではこれらの結果を用いて無反射ポテンシャルの $N = 1, 2, 3$ の 3 つのケースについて解析解を求めてみよう．

4.2 N=1 の無反射ポテンシャル (1 ソリトン解)

上半面における透過係数の極の数が 1 つの場合の無反射ポテンシャル $u(x, t)$ を求める．ここでは $A_L(x, x; t)$ からポテンシャルを求めることとしよう．ここでは反射係数がゼロの場合について議論した 3.2 節の内容を踏まえて $u(x, t)$ を求める．まず行列式 $\det V(x, t)$ を計算する．いま行列 $V(x, t)$ は 1×1 行列であり, (3.2.14) より

$$\begin{aligned} \det V(x, t) &= 1 + \int_{-\infty}^x m_{L1}(t) e^{2p_1 x'} \\ &= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

となる．ここで (4.1.21) の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \det V(x, t) &= 1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}, \\ \ln[\det V(x, t)] &= \ln \left[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t} \right] \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

となる．(4.2.2) を x で偏微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln[\det V(x, t)] = \frac{m_{L1}(0) e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}}{1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}} \quad (4.2.3)$$

となる．さらに (4.2.3) を x で偏微分すると,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det V(x, t)] \\ &= -\frac{[m_{L1}(0) e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}]^2}{[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}]^2} + \frac{2p_1 m_{L1}(0) e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}}{1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}} \\ &= \frac{-[m_{L1}(0) e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}]^2 + 2p_1 m_{L1}(0) e^{2p_1 x - 8p_1^3 t} [1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}]}{[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}]^2} \\ &= \frac{-[m_{L1}(0) e^{p_1 x - 4p_1^3 t}]^2 + 2p_1 m_{L1}(0) [1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}]}{[e^{-p_1 x + 4p_1^3 t} + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{p_1 x - 4p_1^3 t}]^2} \\ &= \frac{-[m_{L1}(0)]^2 e^{2p_1 x - 8p_1^3 t} + 2p_1 m_{L1}(0) + [m_{L1}(0)]^2 e^{2p_1 x - 8p_1^3 t}}{[e^{-p_1 x + 4p_1^3 t} + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{p_1 x - 4p_1^3 t}]^2} \\ &= \frac{2p_1 m_{L1}(0)}{[e^{-p_1 x + 4p_1^3 t} + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{p_1 x - 4p_1^3 t}]^2} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

となる．ここで

$$e^\delta \equiv \sqrt{\frac{m_{L1}(0)}{2p_1}} \quad (4.2.5)$$

と置くと,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det V(x, t)] \\
&= \frac{4p_1^2}{\left[\sqrt{\frac{2p_1}{m_{L1}(0)}} e^{-p_1 x + 4p_1^3 t} + \sqrt{\frac{m_{L1}(0)}{2p_1}} e^{p_1 x - 4p_1^3 t} \right]^2} \\
&= p_1^2 \frac{4}{[e^{-\delta} e^{-p_1 x + 4p_1^3 t} + e^{\delta} e^{p_1 x - 4p_1^3 t}]^2} \\
&= p_1^2 \frac{4}{[e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta} + e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta}]^2} \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

となる．さらにここで

$$\operatorname{sech} \alpha \equiv \cosh^{-1} \alpha = \frac{2}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \tag{4.2.7}$$

なる関数を導入すると¹,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det V(x, t)] = p_1^2 \operatorname{sech}^2(p_1 x - 4p_1^3 t + \delta) \tag{4.2.8}$$

と書ける．よってポテンシャル $u(x, t)$ は (3.2.34) より

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det V(x, t)] \\
&= -2p_1^2 \frac{4}{[e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta} + e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta}]^2} \\
&= -2p_1^2 \operatorname{sech}^2(p_1 x - 4p_1^3 t + \delta) \tag{4.2.9}
\end{aligned}$$

となる．

t を時間, $u(x, t)$ を変位と見たとき, (4.2.9) が孤立波を記述することを示そう．まず (4.2.9) が波動を表していることは明らかである．一般に速さ c で x の正の方向に伝播する波の変位は $f(x - ct)$ という形式で書ける．したがって (4.2.9) は一定の速さ $c = 4p_1^2$ で x の正の方向に伝播する波動を記述することが分かる．(4.2.9) が孤立波であることを示すためには, ある時刻での変位の空間微分 $\partial u / \partial x$ を調べればよい．(4.2.9) を x について偏微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -2p_1^2 (-2p_1) \frac{4}{[e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} + e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta}]^3} [e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} - e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta}] \\
&= 16p_1^3 \frac{e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} - e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta}}{[e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} + e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta}]^3} \tag{4.2.10}
\end{aligned}$$

¹ $\sinh x$, $\cosh x$, $\coth x$, $\operatorname{sech} x$ などの関数は一般に双曲線関数(hyperbolic function)と呼ばれる．後で出てくる $\operatorname{cosech} x$, $\operatorname{coth} x$ も双曲線関数である．

となる。いま $e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} + e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta} > 0$ であり、また 2.2 節で見たように $p_1 > 0$ であるから、 $\partial u / \partial x$ の符号は $e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} - e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta}$ の符号によって決まる。
 $x \geq (4p_1^3 t - \delta) / p_1$ のとき $e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} - e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta} \geq 0$ であり、 $x < (4p_1^3 t - \delta) / p_1$ のとき $e^{p_1 x - 4p_1^3 t + \delta} - e^{-p_1 x + 4p_1^3 t - \delta} < 0$ となる。よって

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \begin{cases} > 0 & (x > \frac{4p_1^3 t - \delta}{p_1} \text{ の場合}) \\ = 0 & (x = \frac{4p_1^3 t - \delta}{p_1} \text{ の場合}) \\ < 0 & (x < \frac{4p_1^3 t - \delta}{p_1} \text{ の場合}) \end{cases} \quad (4.2.11)$$

となる。 $|x| \rightarrow \infty$ において $\partial u / \partial x \rightarrow 0$ となることに注意すると、(4.2.11) より $u(x, t)$ は $x = (4p_1^3 t - \delta) / p_1$ に 1 つの谷を持つ孤立波となっていることが分かる。
 図 4.1 は 1 つのソリトンの伝播の様子を示したものである。

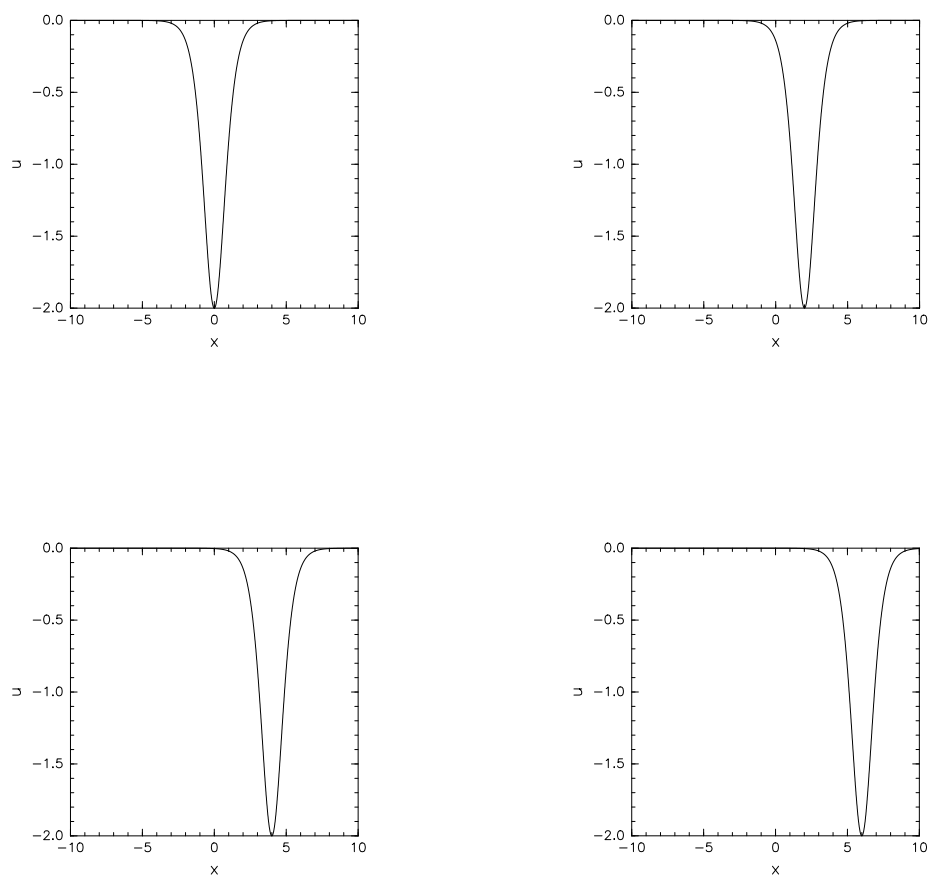


図 4.1: $p_1 = 1, \delta = 0$ の場合のソリトンの伝播 . 左上 , 右上 , 左下 , 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$ の変位 $u(x, t)$ を表している .

ここでは変位の極小値を振幅と呼ぶことにすると、振幅は (4.2.9) より $-2p_1^2$ となる。このことから振幅はこの孤立波、すなわちソリトンが伝播する速さに比例することが分かる。つまり振幅の大きいソリトンほど速く伝播すると言えることができる。さらに振幅が一定値をとることから、ソリトンは減衰することなく形を保ったまま伝播していくことが分かる。

以上より、 $N = 1$ の場合の無反射ポテンシャル $u(x, t)$ が一定の速さで x の正の方向に伝播する1つのソリトンを記述することが分かった。このことから透過係数の極の数 N とソリトンの個数との間の対応関係が示唆されるが、実際に極の数とソリトンの個数が等しいことが $N = 2$, $N = 3$ の場合についても確かめられる。その確認は次節以降に譲ることとしよう。

4.3 N=2 の無反射ポテンシャル (2 ソリトン解)

以下, 4.2 節と同様の手順で $N = 2$ の場合の KdV 方程式のソリトン解を求め, その解について考察する. この場合行列 $V(x, t)$ は 2×2 行列であり, 各成分を書き下すと以下ようになる.

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \begin{pmatrix} 1 + \int_{-\infty}^x m_{L1}(t) e^{2p_1 x'} dx' & \int_{-\infty}^x m_{L2}(t) e^{(p_1+p_2)x'} dx' \\ \int_{-\infty}^x m_{L2}(t) e^{(p_1+p_2)x'} dx' & 1 + \int_{-\infty}^x m_{L2}(t) e^{2p_2 x'} dx' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} & \frac{m_{L2}(t)}{p_1+p_2} e^{(p_1+p_2)x} \\ \frac{m_{L1}(t)}{p_1+p_2} e^{(p_1+p_2)x} & 1 + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

(4.3.1) より行列式 $\det V(x, t)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \det V(x, t) &= \left[1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} \right] \left[1 + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} \right] - \left[\frac{m_{L2}(t)}{p_1+p_2} e^{(p_1+p_2)x} \right] \left[\frac{m_{L1}(t)}{p_1+p_2} e^{(p_1+p_2)x} \right] \\ &= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{4p_1 p_2} e^{2(p_1+p_2)x} \\ &\quad - \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{(p_1+p_2)^2} e^{2(p_1+p_2)x} \\ &= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} \\ &\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{4p_1 p_2 (p_1+p_2)^2} [(p_1+p_2)^2 - 4p_1 p_2] e^{2(p_1+p_2)x} \\ &= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{4p_1 p_2 (p_1+p_2)^2} (p_1-p_2)^2 e^{2(p_1+p_2)x} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

となる. ここで (4.1.21) より $m_{L1}(t) = m_{L1}(0)e^{-8p_1^3 t}$, $m_{L2}(t) = m_{L2}(0)e^{-8p_2^3 t}$ となるので,

$$\gamma_1 \equiv p_1 x - 4p_1^3 t, \quad (4.3.3)$$

$$\gamma_2 \equiv p_2 x - 4p_2^3 t \quad (4.3.4)$$

と置くと,

$$\begin{aligned} \ln[\det V(x, t)] &= \ln \left[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2(p_1 x - 4p_1^3 t)} + \frac{m_{L2}(0)}{2p_2} e^{2(p_2 x - 4p_2^3 t)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{4p_1 p_2 (p_1+p_2)^2} (p_1-p_2)^2 e^{2[(p_1+p_2)x - 4(p_1^3+p_2^3)t]} \right] \\ &= \ln \left[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2\gamma_1} + \frac{m_{L2}(0)}{2p_2} e^{2\gamma_2} + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{4p_1 p_2 (p_1+p_2)^2} (p_1-p_2)^2 e^{2(\gamma_1+\gamma_2)} \right] \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

となる．いま $\partial\gamma_1/\partial x = p_1$, $\partial\gamma_2/\partial x = p_2$ となることに注意して , (4.3.5) を x について偏微分すると ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln[\det V(x, t)] = \frac{m_{L1}(0)e^{2\gamma_1} + m_{L2}(0)e^{2\gamma_2} + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{2p_1p_2(p_1+p_2)}(p_1 - p_2)^2 e^{2(\gamma_1+\gamma_2)}}{1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1}e^{2\gamma_1} + \frac{m_{L2}(0)}{2p_2}e^{2\gamma_2} + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{4p_1p_2(p_1+p_2)^2}(p_1 - p_2)^2 e^{2(\gamma_1+\gamma_2)}} \quad (4.3.6)$$

となる．(4.3.6) の右辺の分子 , 分母に $\sqrt{4p_1p_2/m_{L1}(0)m_{L2}(0)}(p_1 + p_2)e^{-(\gamma_1+\gamma_2)}$ を掛けると ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \ln[\det V(x, t)] \\ &= \left[\sqrt{\frac{4p_1p_2m_{L1}(0)}{m_{L2}(0)}}(p_1 + p_2)e^{\gamma_1-\gamma_2} + \sqrt{\frac{4p_1p_2m_{L2}(0)}{m_{L1}(0)}}(p_1 + p_2)e^{-\gamma_1+\gamma_2} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{p_1p_2}}(p_1 - p_2)^2 e^{(\gamma_1+\gamma_2)} \right] \\ & \quad \left[\sqrt{\frac{4p_1p_2}{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}}(p_1 + p_2)e^{-\gamma_1-\gamma_2} + \sqrt{\frac{m_{L1}(0)p_2}{m_{L2}(0)p_1}}(p_1 + p_2)e^{\gamma_1-\gamma_2} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\frac{m_{L2}(0)p_1}{m_{L1}(0)p_2}}(p_1 + p_2)e^{-\gamma_1+\gamma_2} + \sqrt{\frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{4p_1p_2}} \frac{(p_1 - p_2)^2}{p_1 + p_2} e^{(\gamma_1+\gamma_2)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

となる．ここで

$$e^{\delta_1} \equiv \sqrt{\frac{M_{L1}(0)}{2p_1} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \right)}, \quad (4.3.8)$$

$$e^{\delta_2} \equiv \sqrt{\frac{M_{L2}(0)}{2p_2} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \right)}, \quad (4.3.9)$$

と置くと ,

$$\begin{aligned} e^{\delta_1+\delta_2} &= \sqrt{\frac{M_{L1}(0)M_{L2}(0)}{4p_1p_2} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \right)}, \\ e^{\delta_1-\delta_2} &= \sqrt{\frac{p_2M_{L1}(0)}{p_1M_{L2}(0)}} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって (4.3.7) は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \ln[\det V(x, t)] \\
&= \left[2p_1(p_2 + p_1)e^{\gamma_1 - \gamma_2 + \delta_1 - \delta_2} + 2p_2(p_2 + p_1)e^{-\gamma_1 + \gamma_2 - \delta_1 + \delta_2} \right. \\
&\quad \left. + 2(p_2 + p_1)(p_2 - p_1)e^{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2} \right] \\
&\quad \left[(p_2 - p_1)e^{-\gamma_1 - \gamma_2 - \delta_1 - \delta_2} + (p_2 + p_1)e^{\gamma_1 - \gamma_2 + \delta_1 - \delta_2} \right. \\
&\quad \left. + (p_2 + p_1)e^{-\gamma_1 + \gamma_2 - \delta_1 + \delta_2} + (p_2 - p_1)e^{\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2} \right]^{-1} \quad (4.3.10)
\end{aligned}$$

と書ける．更にここで

$$\theta_1 \equiv \gamma_1 + \delta_1, \quad (4.3.11)$$

$$\theta_2 \equiv \gamma_2 + \delta_2 \quad (4.3.12)$$

と置くと, (4.3.10) は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \ln[\det V(x, t)] \\
&= \left[2p_1(p_2 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2} + 2p_2(p_2 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2} + 2(p_2^2 - p_1^2)e^{\theta_1 + \theta_2} \right] \\
&\quad \left[(p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2} + (p_2 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2} + (p_1 + p_2)e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2} \right] \\
&= 2(p_2 + p_1) \left[p_1e^{\theta_1 - \theta_2} + p_2e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2} \right] \\
&\quad \left[p_2(e^{-\theta_1 - \theta_2} + e^{\theta_1 - \theta_2} + e^{-\theta_1 + \theta_2} + e^{\theta_1 + \theta_2}) \right. \\
&\quad \left. + p_1(e^{-\theta_1 - \theta_2} - e^{\theta_1 - \theta_2} - e^{-\theta_1 + \theta_2} + e^{\theta_1 + \theta_2}) \right]^{-1} \\
&= 2(p_2 + p_1) \left[p_1e^{\theta_1 - \theta_2} + p_2e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2} \right] \\
&\quad \left[p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) - p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right]^{-1} \\
&= 2(p_2 + p_1) \left[p_1e^{\theta_1 - \theta_2} + p_2e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2} \right] \\
&\quad \left[(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) \right]^{-1} \left[p_2 \frac{e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}}{e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}} - p_1 \frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}} \right]^{-1} \quad (4.3.13)
\end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで関数

$$\tanh \alpha \equiv \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}, \quad (4.3.14)$$

$$\coth \alpha \equiv \tanh^{-1} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \quad (4.3.15)$$

を導入することで, (4.3.13) を次のように書き換える .

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \ln[\det V(x, t)] \\
&= \frac{p_2 + p_1}{(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})} \frac{2p_1 e^{\theta_1 - \theta_2} + 2p_2 e^{-\theta_1 + \theta_2} + 2(p_2 - p_1) e^{\theta_1 + \theta_2}}{p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1} \\
&= \frac{p_2 + p_1}{(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1)} \\
&\quad \left[(p_2 - p_1)(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) - (p_2 - p_1)(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) \right. \\
&\quad \left. + 2p_1 e^{\theta_1 - \theta_2} + 2p_2 e^{-\theta_1 + \theta_2} + 2(p_2 - p_1) e^{\theta_1 + \theta_2} \right] \\
&= \frac{(p_2 + p_1)(p_2 - p_1)}{p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1} + (p_2 + p_1) \cdot \\
&\quad \frac{-(p_2 - p_1)(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) + 2p_1 e^{\theta_1 - \theta_2} + 2p_2 e^{-\theta_1 + \theta_2} + 2(p_2 - p_1) e^{\theta_1 + \theta_2}}{p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})} \\
&= \frac{(p_2 + p_1)(p_2 - p_1)}{p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1} + (p_2 + p_1) \cdot \\
&\quad \frac{(p_2 - p_1) e^{\theta_1 + \theta_2} + (p_2 + p_1) e^{\theta_1 - \theta_2} + (p_2 + p_1) e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1) e^{-\theta_1 - \theta_2}}{(p_2 - p_1)(e^{\theta_1 + \theta_2} + e^{-\theta_1 - \theta_2}) + (p_2 + p_1)(e^{\theta_1 - \theta_2} + e^{-\theta_1 + \theta_2})} \\
&= \frac{(p_2 + p_1)(p_2 - p_1)}{p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1} + p_2 + p_1 \\
&= \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1} + p_2 + p_1. \tag{4.3.16}
\end{aligned}$$

よってポテンシャル $u(x, t)$ は (4.3.16) より

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det V(x, t)] \\
&= -2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1} + p_2 + p_1 \right] \\
&= -2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1} \right] \\
&= 2 \frac{p_2^2 - p_1^2}{[p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1]^2} \frac{\partial}{\partial x} [p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1] \tag{4.3.17}
\end{aligned}$$

となる . いま

$$\operatorname{cosech} \alpha \equiv \sinh^{-1} \alpha = \frac{2}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \tag{4.3.18}$$

なる関数を導入すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \coth \theta_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}}{e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}} \right] \\
 &= \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[\frac{e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}}{e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}} \right] \\
 &= p_2 \left[\frac{e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}}{e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}} - \frac{[e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}]^2}{[e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}]^2} \right] \\
 &= p_2 \left[\frac{[e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}]^2 - [e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}]^2}{[e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}]^2} \right] \\
 &= \frac{4}{-p_2 [e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}]^2} \\
 &= -p_2 \operatorname{cosech}^2 \theta_2
 \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

が成り立つ. さらに

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \tanh \theta_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}} \right] \\
 &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}} \right] \\
 &= p_1 \left[\frac{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}} - \frac{[e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}]^2}{[e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}]^2} \right] \\
 &= p_1 \left[\frac{[e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}]^2 - [e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}]^2}{[e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}]^2} \right] \\
 &= \frac{4}{p_1 [e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}]^2} \\
 &= p_1 \operatorname{sech}^2 \theta_1
 \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

が成立する. (4.3.19) 及び (4.3.20) を (4.3.17) に適用すると,

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= 2 \frac{p_2^2 - p_1^2}{[p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1]^2} \left[-p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \theta_2 - p_1^2 \operatorname{sech}^2 \theta_1 \right] \\
 &= -2(p_2^2 - p_1^2) \frac{p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \theta_2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \theta_1}{[p_2 \coth \theta_2 - p_1 \tanh \theta_1]^2}
 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

が得られる.

t を時間, $u(x, t)$ を変位と見たときに (4.3.21) が 2 つのソリトンの衝突, 分裂を表すことを示そう. まず, $|\theta_1| < o(1)$, $|\theta_2| \gg 1$ となるような時刻での変位について考える. このとき (4.3.15), (4.3.18) より

$$\coth \theta_2 \simeq \begin{cases} 1 & (\theta_2 > 0) \\ -1 & (\theta_2 < 0), \end{cases} \tag{4.3.22}$$

$$\operatorname{cosech} \theta_2 \simeq 0 \quad (4.3.23)$$

と近似できる．したがって，

$$u(x, t) \simeq -2(p_2^2 - p_1^2) \frac{p_1^2 \operatorname{sech}^2 \theta_1}{[\pm p_2 - p_1 \tanh \theta_1]^2} \quad (4.3.24)$$

と書ける．ここで

$$\tanh \Delta \equiv \frac{p_1}{p_2} \quad (4.3.25)$$

と定義すると，(4.3.22) は以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} u(x, t) &\simeq -2p_1^2 \frac{(p_2^2 - p_1^2) \operatorname{sech}^2 \theta_1}{[\pm p_2 - p_1 \tanh \theta_1]^2} \\ &= -2p_1^2 \frac{1 - \left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right)^2}{\left[\pm 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right) \tanh \theta_1\right]^2} \operatorname{sech}^2 \theta_1 \\ &= -2p_1^2 \frac{1 - \tanh^2 \Delta}{\left[\pm 1 - \tanh \Delta \tanh \theta_1\right]^2} \operatorname{sech}^2 \theta_1 \\ &= -2p_1^2 \frac{1 - \frac{(e^\Delta - e^{-\Delta})^2}{(e^\Delta + e^{-\Delta})^2}}{\left[\pm 1 - \tanh \Delta \tanh \theta_1\right]^2} \operatorname{sech}^2 \theta_1 \\ &= -2p_1^2 \frac{\frac{4}{(e^\Delta + e^{-\Delta})^2} \frac{4}{(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})^2}}{\left[\pm 1 - \left(\frac{e^\Delta - e^{-\Delta}}{e^\Delta + e^{-\Delta}}\right) \left(\frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}}\right)\right]^2} \\ &= -2p_1^2 \frac{16}{\left\{ (e^\Delta + e^{-\Delta})(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) \left[\pm 1 - \left(\frac{e^\Delta - e^{-\Delta}}{e^\Delta + e^{-\Delta}}\right) \left(\frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}}\right) \right] \right\}^2} \\ &= -2p_1^2 \frac{16}{\left[\pm (e^{\Delta+\theta_1} + e^{\Delta-\theta_1} + e^{-\Delta+\theta_1} + e^{-\Delta-\theta_1}) - (e^{\Delta+\theta_1} - e^{\Delta-\theta_1} - e^{-\Delta+\theta_1} + e^{-\Delta-\theta_1}) \right]^2} \\ &= -2p_1^2 \frac{16}{\left[\pm 2e^{\mp\theta_1+\Delta} \pm 2e^{\pm\theta_1-\Delta} \right]^2} \\ &= -2p_1^2 \frac{4}{\left[e^{\theta_1 \mp \Delta} + e^{-(\theta_1 \mp \Delta)} \right]^2} \\ &= -2p_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 \mp \Delta). \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

すなわち $|\theta_2| < o(1)$, $|\theta_2| \gg 1$ の場合，

$$u(x, t) \simeq \begin{cases} -2p_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 - \Delta) & (\theta_2 > 0) \\ -2p_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 + \Delta) & (\theta_2 < 0) \end{cases} \quad (4.3.27)$$

となる．

一方, $|\theta_1| \gg 1$, $|\theta_2| < o(1)$ の場合を考えると, 上と同様の計算により

$$u(x, t) \simeq \begin{cases} -2p_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 - \Delta) & (\theta_1 > 0) \\ -2p_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 + \Delta) & (\theta_1 < 0) \end{cases} \quad (4.3.28)$$

という結果が得られる. (4.3.27), (4.3.28) は 1 ソリトン解 (4.2.9) と同一の形式となっているので, それぞれ x 軸の正の向きに伝播するソリトンを記述していることが分かる. つまり (4.3.27), (4.3.28) はそれぞれ互いに十分離れた 2 つのソリトンを記述している. いま $p_2 > p_1$ であるので, ソリトンの伝播速度が振幅に比例することに注意すると, 振幅 $-2p_2^2$ のソリトンの方が振幅 $-2p_1^2$ のソリトンよりも速く進むことになる. したがって, 振幅 $-2p_2^2$ のソリトンはある時刻で振幅 $-2p_1^2$ のソリトンに追いつき, 衝突することになる. (4.3.27), (4.3.28) より 2 つのソリトンが衝突する十分前での変位は

$$u(x, t) = -2p_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 - \Delta) - 2p_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 + \Delta) \quad (4.3.29)$$

となり, 2 つのソリトンが衝突して十分時間が経った後での変位は

$$u(x, t) = -2p_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 + \Delta) - 2p_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 - \Delta) \quad (4.3.30)$$

となる. (4.3.29), (4.3.30) から次の 2 つの事実が見出される. まず第一に, 衝突前後の変位が同じ形式となっていることから, 2 つのソリトンは衝突後もその形が崩れないことが分かる. 第二に, 衝突前後で 2 つのソリトンの間に位相のずれが生じていることが分かる. 速い方のソリトン, つまり振幅 $-2p_2^2$ のソリトンでは位相が 2Δ 進み, 振幅 $-2p_1^2$ の遅い方のソリトンでは位相が 2Δ 遅れる. この位相のずれは 2 つのソリトンの相互作用の結果として解釈される. ソリトンが十分離れているときには両者の相互作用を無視することができ, (4.3.29), (4.3.30) のように変位を 2 つのパルスの重ね合わせとして記述することが出来る. しかしソリトンが近づいたときには相互作用が無視できなくなり, 変位は単純な重ね合わせとして記述することはできず, (4.3.21) に立ち戻って議論しなければならなくなる.

ここで 2 ソリトン解の具体例として, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ の場合につ

いて考えよう² . このとき (4.3.21) より変位 $u(x, t)$ は

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= -6 \frac{4 \operatorname{cosech}^2(2x - 32t) + \operatorname{sech}^2(x - 4t)}{[2 \coth(2x - 32t) - \tanh(x - 4t)]^2} \\
&= -6 \frac{\frac{16}{[e^{(2x-32t)} - e^{-(2x-32t)}]^2} + \frac{4}{[e^{(x-4t)} + e^{-(x-4t)}]^2}}{[2 \frac{e^{(2x-32t)} + e^{-(2x-32t)}}{e^{(2x-32t)} - e^{-(2x-32t)}} - \frac{e^{(x-4t)} - e^{-(x-4t)}}{e^{(x-4t)} + e^{-(x-4t)}}]^2} \\
&= -6 \left\{ 16 [e^{(x-4t)} + e^{-(x-4t)}]^2 + 4 [e^{(2x-32t)} - e^{-(2x-32t)}]^2 \right\} \\
&\quad \left\{ 2 [e^{(2x-32t)} + e^{-(2x-32t)}] [e^{(x-4t)} + e^{-(x-4t)}] \right. \\
&\quad \left. - [e^{(x-4t)} - e^{-(x-4t)}] [e^{(2x-32t)} - e^{-(2x-32t)}] \right\}^{-2} \\
&= -6 \left\{ 16 [e^{(x-4t)} + e^{-(x-4t)}]^2 + 4 [e^{(2x-32t)} - e^{-(2x-32t)}]^2 \right\} \\
&\quad \left\{ e^{(3x-36t)} + 3e^{(x-28t)} + 3e^{-(x-28t)} + e^{-(3x-36t)} \right\}^{-2} \\
&= -6 \left\{ 4 [e^{(x-4t)} + e^{-(x-4t)}]^2 + [e^{(2x-32t)} - e^{-(2x-32t)}]^2 \right\} \\
&\quad \left\{ 3 \left(\frac{e^{(x-28t)} + e^{-(x-28t)}}{2} \right) + \left(\frac{e^{(3x-36t)} + e^{-(3x-36t)}}{2} \right) \right\}^{-2} \\
&= -6 \frac{4 [e^{(2x-8t)} + 2 + e^{-(2x-8t)}] + [e^{(4x-64t)} - 2 + e^{-(4x-64t)}]}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \\
&= -12 \frac{4 \left(\frac{e^{(2x-8t)} + e^{-(2x-8t)}}{2} \right) + \left(\frac{e^{(4x-64t)} + e^{-(4x-64t)}}{2} \right) + 3}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \\
&= -12 \frac{4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t) + 3}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2}
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

となる . (4.3.31) で $t = 0$ とすると ,

$$u(x, 0) = -12 \frac{4 \cosh(2x) + \cosh(4x) + 3}{[3 \cosh x + \cosh(3x)]^2} \tag{4.3.32}$$

となる . ここで

$$\begin{aligned}
(e^x + e^{-x})^2 &= e^{2x} + e^{-2x} + 2, \\
(e^x + e^{-x})^3 &= e^{3x} + e^{-3x} + 3(e^x + e^{-x}), \\
(e^x + e^{-x})^4 &= e^{4x} + e^{-4x} + 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 6
\end{aligned}$$

となることに着目すると ,

$$\cosh(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2 \cosh^2 x - 1, \tag{4.3.33}$$

²この数値は Zabusky(1968) の数値計算で初めて用いられたものである .

$$\cosh(3x) = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x, \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} \cosh(4x) &= \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} = 8 \cosh^4 x - 4 \cosh 2x - 3 \\ &= 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1 \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

が成り立つ．したがって (4.3.32) は

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -12 \frac{4(2 \cosh^2 x - 1) + 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1 + 3}{[3 \cosh x + 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x]^2} \\ &= -12 \frac{8 \cosh^4 x}{16 \cosh^6 x} \\ &= -6 \cosh^{-2} x \\ &= -6 \operatorname{sech}^2 x \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

となる．(4.3.36) より $t = 0$ では谷が 1 つしか存在しないことが分かる．つまりこの場合， $t = 0$ で 2 つのソリトンは 1 つに合体してしまうのである．図 4.2，図 4.3 に各時刻での変位 (4.3.31) を示す．

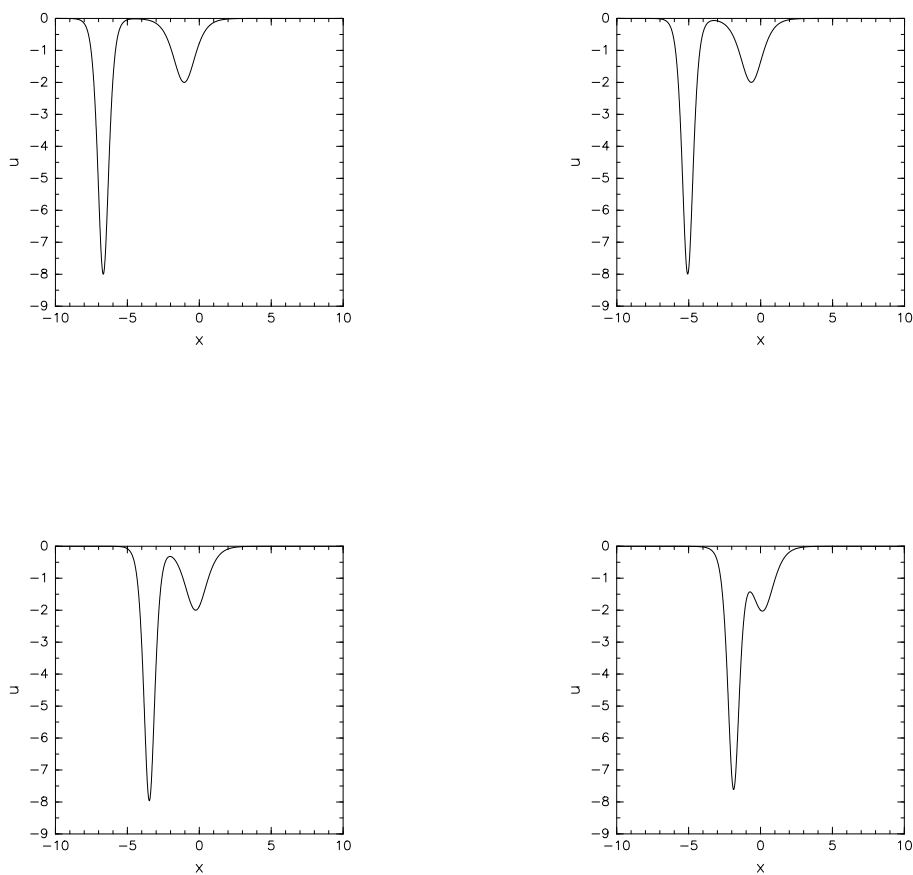


図 4.2: 本ページ及び次ページの 8 つの図は各時刻での変位 (4.3.31) を示したものである。左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = -0.4, -0.3, -0.2, -0.1$ の変位 $u(x, t)$ を表している。

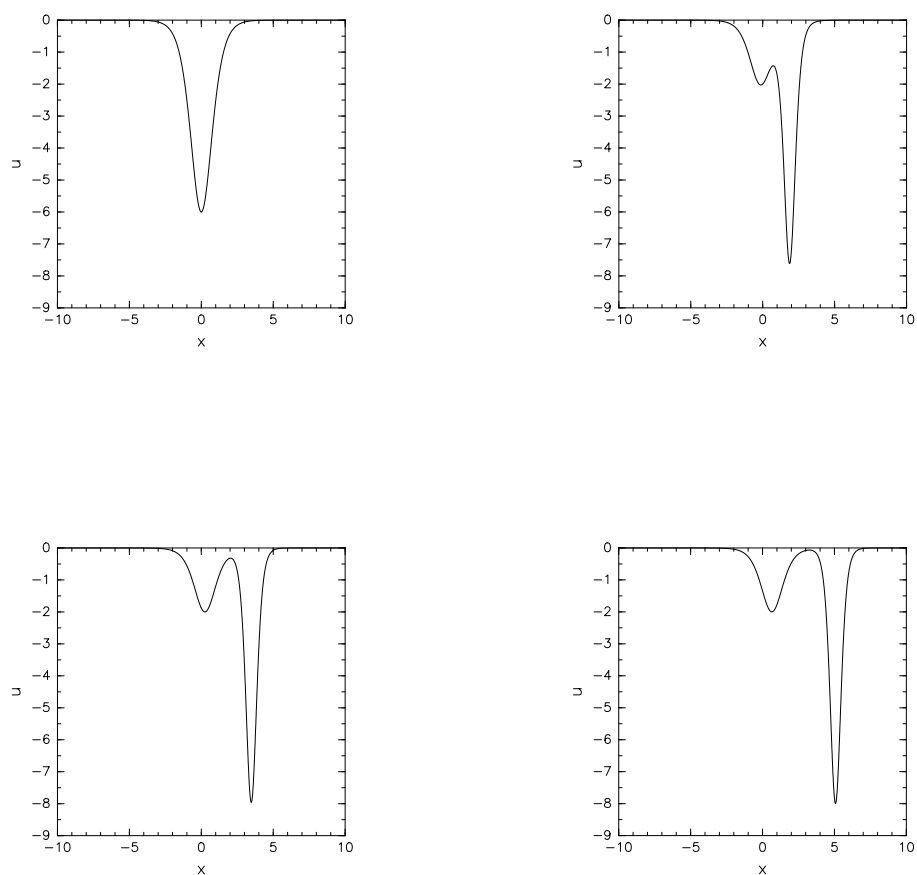


図 4.3: 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3$ の変位 $u(x, t)$ を表す. $t = 0.0$ で一つの谷に合体することが見てとれる.

そこで次に $\delta_1 = \delta_2 = 0$ のとき, いかなる条件を満たす場合に $t = 0$ でソリトンが合体するのかを調べよう. 合体している場合, 図 4.2, 図 4.3 より $u(x, 0)$ は $x = 0$ で極小となることが予想される. したがって, 合体の有無を判定するには $u_x(0, 0)$ 及び $u_{xx}(0, 0)$ の値を調べればよい. いま $\theta_1 = \gamma_1, \theta_2 = \gamma_2$ となることに注意すると, (4.3.21) より

$$u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -2(p_2^2 - p_1^2) \frac{p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^2} \right\} \quad (4.3.37)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{4}{[e^{\gamma_2} - e^{-\gamma_2}]^2} \\ &= -2p_2 \frac{4(e^{\gamma_2} + e^{-\gamma_2})}{[e^{\gamma_2} - e^{-\gamma_2}]^3} \\ &= -2p_2 \frac{e^{\gamma_2} + e^{-\gamma_2}}{e^{\gamma_2} - e^{-\gamma_2}} \frac{4}{[e^{\gamma_2} - e^{-\gamma_2}]^2} \\ &= -2p_2 \coth \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sech}^2 \gamma_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{4}{[e^{\gamma_1} + e^{-\gamma_1}]^2} \\ &= -2p_1 \frac{4(e^{\gamma_1} - e^{-\gamma_1})}{[e^{\gamma_1} + e^{-\gamma_1}]^3} \\ &= -2p_1 \frac{e^{\gamma_1} - e^{-\gamma_1}}{e^{\gamma_1} + e^{-\gamma_1}} \frac{4}{[e^{\gamma_1} + e^{-\gamma_1}]^2} \\ &= -2p_1 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

となることに注意し, さらに (4.3.19), (4.3.20) を適用すると,

$$\begin{aligned}
u_x(x, t) &= -2(p_2^2 - p_1^2) \left\{ \frac{-2p_2^3 \coth \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 - 2p_1^3 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{(p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1)(-p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 - p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1)}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^3} \right\} \\
&= 4(p_2^2 - p_1^2) [p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^{-3} \\
&\quad \left\{ (p_2^3 \coth \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^3 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1)(p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1) \right. \\
&\quad \left. - (p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1)^2 \right\} \\
&= 4(p_2^2 - p_1^2) [p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^{-3} \\
&\quad \left\{ p_2^4 \coth^2 \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 - p_1 p_2^3 \tanh \gamma_1 \coth \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 \right. \\
&\quad + p_1^3 p_2 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \coth \gamma_2 - p_1^4 \tanh^2 \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \\
&\quad \left. - p_2^4 \operatorname{cosech}^4 \gamma_2 - 2p_1^2 p_2^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 - p_1^4 \operatorname{sech}^4 \gamma_1 \right\} \\
&= 4(p_2^2 - p_1^2) [p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^{-3} \\
&\quad \left\{ p_2^4 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 (\coth^2 \gamma_2 - \operatorname{cosech}^2 \gamma_2) - p_1^4 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 (\tanh^2 \gamma_1 + \operatorname{sech}^2 \gamma_1) \right. \\
&\quad - p_1 p_2^3 \tanh \gamma_1 \coth \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^3 p_2 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \coth \gamma_2 \\
&\quad \left. - 2p_1^2 p_2^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 \right\} \\
&= 4(p_2^2 - p_1^2) [p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^{-3} \\
&\quad \left\{ p_2^4 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 - p_1^4 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 - p_1 p_2^3 \tanh \gamma_1 \coth \gamma_2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 \right. \\
&\quad \left. + p_1^3 p_2 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \coth \gamma_2 - 2p_1^2 p_2^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

となる. ただし式変形の途中で

$$\begin{aligned}
\coth^2 \gamma_2 - \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 &= \frac{(e^{\gamma_2} + e^{-\gamma_2})^2 - 4}{(e^{\gamma_2} - e^{-\gamma_2})^2} \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{4.3.41}$$

$$\begin{aligned}
\tanh^2 \gamma_1 + \operatorname{sech}^2 \gamma_1 &= \frac{(e^{\gamma_1} - e^{-\gamma_1})^2 + 4}{(e^{\gamma_1} + e^{-\gamma_1})^2} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

となることを用いた. (4.3.40) で $\coth \gamma_2 \sinh \gamma_2 = \cosh \gamma_2$, $\operatorname{cosech} \gamma_2 \sinh \gamma_2 = 1$ と

なることに着目し，分子，分母に $\sinh^3 \gamma_2$ を掛けると，

$$u_x(x, t) = 4(p_2^2 - p_1^2)[p_2 \cosh \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1 \sinh \gamma_2]^{-3} \left\{ \begin{aligned} & p_2^4 \sinh \gamma_2 - p_1^4 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \sinh^3 \gamma_2 \\ & - p_1 p_2^3 \tanh \gamma_1 \cosh \gamma_2 + p_1^3 p_2 \tanh \gamma_1 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \sinh^2 \gamma_2 \cosh \gamma_2 \\ & - 2p_1^2 p_2^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \sinh \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.43)$$

となる． $x = t = 0$ のとき

$$\begin{aligned} \tanh \gamma_1 \Big|_{x=t=0} &= 0, \\ \operatorname{sech} \gamma_1 \Big|_{x=t=0} &= 1, \\ \sinh \gamma_2 \Big|_{x=t=0} &= 0, \\ \cosh \gamma_2 \Big|_{x=t=0} &= 1 \end{aligned}$$

となることに注意すると，(4.3.43) より

$$\begin{aligned} u_x(0, 0) &= 4(p_2^2 - p_1^2)[p_2 \cdot 1 - p_1 \cdot 0 \cdot 0]^{-3} \\ &\quad \left\{ p_2^4 \cdot 0 - p_1^4 \cdot 1 \cdot 0 - p_1 p_2^3 \cdot 0 \cdot 1 \right. \\ &\quad \left. + p_1^3 p_2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2p_1^2 p_2^2 \cdot 1 \cdot 0 \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

を得る．(4.3.44) は $x = 0$ において $u(x, 0)$ が極値となることを示唆している．実際に極値となるかどうかは $u_{xx}(0, 0)$ の値を調べる必要がある．

(4.3.43) を x について偏微分する代わりに，KdV 方程式から $u_{xx}(0, 0)$ を求めることができる．KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.3.45)$$

において， u_t ， uu_x はそれぞれ

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(2 \frac{\partial}{\partial x} A_L(x, x, t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x, t) \right), \quad (4.3.46)$$

$$uu_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) \quad (4.3.47)$$

と書ける．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x, t) - 3u^2 + u_{xx} \right] = 0 \quad (4.3.48)$$

が得られる．いま無限遠でゼロに収束するような $u(x, t)$ を考えているので，(4.3.48) を x から $x = \infty$ まで積分すると，各項は $x = \infty$ でゼロに収束する．すなわち，

$$2 \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x, t) - 3u^2(x, t) + u_{xx}(x, t) = 0 \quad (4.3.49)$$

が得られる．いま (4.3.16) より

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} [\ln(\det V(x, t))] \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1} + p_2 + p_1 \right) \\ &= (p_2^2 - p_1^2) \frac{p_2(-4p_2^3)(-\operatorname{cosech}^2 \gamma_2) - p_1(-4p_1^3) \operatorname{sech}^2 \gamma_1}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^2} \\ &= (p_2^2 - p_1^2) \frac{[4p_2^4 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + 4p_1^4 \operatorname{sech}^2 \gamma_1] \sinh^2 \gamma_2}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^2 \sinh^2 \gamma_2} \\ &= 4(p_2^2 - p_1^2) \frac{p_2^4 + p_1^4 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \sinh^2 \gamma_1}{[p_2 \cosh \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1 \sinh^2 \gamma_2]^2} \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x, t) \right|_{x=t=0} &= 4(p_2^2 - p_1^2) \frac{p_2^4}{p_2^2} \\ &= 4p_2^2(p_2^2 - p_1^2) \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

が得られる．一方，(4.3.21) より

$$\begin{aligned} u^2(x, t) &= 4(p_2^2 - p_1^2)^2 \frac{p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^4} \\ &= 4(p_2^2 - p_1^2)^2 \frac{[p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \gamma_2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1]^2 \sinh^4 \gamma_2}{[p_2 \coth \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1]^4 \sinh^4 \gamma_2} \\ &= 4(p_2^2 - p_1^2)^2 \frac{[p_2^2 + p_1^2 \operatorname{sech}^2 \gamma_1 \sinh^2 \gamma_2]^2}{[p_2 \cosh \gamma_2 - p_1 \tanh \gamma_1 \sinh \gamma_2]^4} \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

となる．(4.3.52) で $x = t = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} u^2(0, 0) &= 4(p_2^2 - p_1^2)^2 \frac{p_2^4}{p_2^4} \\ &= 4(p_2^2 - p_1^2)^2 \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

が得られる．(4.3.51)，(4.3.53) を (4.3.49) に適用すると，

$$\begin{aligned} u_{xx}(0, 0) &= -2 \left. \frac{\partial}{\partial t} A_L(x, x, t) \right|_{x=t=0} + 3u^2(0, 0) \\ &= -8p_2^2(p_2^2 - p_1^2) + 12(p_2^2 - p_1^2)^2 \\ &= 4(p_2^2 - p_1^2)[3(p_2^2 - p_1^2) - 2p_2^2] \\ &= 4(p_2^2 - p_1^2)(p_2^2 - 3p_1^2) \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

となる．ここで $p_2 > p_1 > 0$ であることに注意すると，(4.3.54) より

$$u_{xx}(0,0) \begin{cases} > 0 & (p_2 > \sqrt{3}p_1) \\ < 0 & (p_2 < \sqrt{3}p_1) \end{cases} \quad (4.3.55)$$

を得る．いま $u_x(0,0)$ であるので， $p_2 > \sqrt{3}p_1$ の場合， $u(x,t)$ は $x=t=0$ で極小となり， $p_2 < \sqrt{3}p_1$ の場合， $u(x,t)$ は $x=t=0$ で極大となることが分かる．したがって， $t=0$ で2つのソリトンが合体して1つの谷を形成するための条件は $p_2 > \sqrt{3}p_1$ であると言える．

以上より $N=2$ の場合の無反射ポテンシャル $u(x,t)$ は2つのソリトンの衝突，合体，分裂を記述することが分かった．また個々のソリトンは衝突後もその形状を保持し，衝突時の痕跡としてはわずかに位相のずれが残るのみである．このような衝突に関する性質は多ソリトン解(multi-soliton solution)においても確かめられることが知られている．

4.4 N=3 の無反射ポテンシャル (3 ソリトン解)

1 ソリトン解, 2 ソリトン解のときと同様の手順で 3 ソリトン解を求めよう. この場合, 行列 $V(x, t)$ は 3×3 行列となり,

$$V(x, t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} & \frac{m_{L2}(t)}{p_2+p_1} e^{(p_2+p_1)x} & \frac{m_{L3}(t)}{p_3+p_1} e^{(p_3+p_1)x} \\ \frac{m_{L1}(t)}{p_2+p_1} e^{(p_2+p_1)x} & 1 + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} & \frac{m_{L3}(t)}{p_3+p_2} e^{(p_3+p_2)x} \\ \frac{m_{L1}(t)}{p_3+p_1} e^{(p_3+p_1)x} & \frac{m_{L2}(t)}{p_3+p_2} e^{(p_3+p_2)x} & 1 + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x} \end{pmatrix} \quad (4.4.1)$$

と表される. 行列式 $\det V(x, t)$ を Saras の法則にしたがって計算すると,

$$\begin{aligned} \det V(x, t) &= \left(1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x}\right) \left(1 + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x}\right) \left(1 + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x}\right) \\ &\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \\ &\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \\ &\quad - \left(1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x}\right) \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{(p_3+p_2)^2} e^{2(p_3+p_2)x} \\ &\quad - \left(1 + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x}\right) \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{(p_2+p_1)^2} e^{2(p_2+p_1)x} \\ &\quad - \left(1 + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x}\right) \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)}{(p_3+p_1)^2} e^{2(p_3+p_1)x} \\ &= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x} \\ &\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{4p_1 p_2} e^{2(p_2+p_1)x} + \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{4p_2 p_3} e^{2(p_3+p_2)x} + \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)}{4p_3 p_1} e^{2(p_3+p_1)x} \\ &\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{8p_1 p_2 p_3} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \\ &\quad + 2 \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \\ &\quad - \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{(p_3+p_2)^2} e^{2(p_3+p_2)x} - \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{2p_1(p_3+p_2)^2} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \\ &\quad - \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)}{(p_2+p_1)^2} e^{2(p_2+p_1)x} - \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{2p_3(p_2+p_1)^2} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \\ &\quad - \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)}{(p_3+p_1)^2} e^{2(p_3+p_1)x} - \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)}{2p_2(p_3+p_1)^2} e^{2(p_1+p_2+p_3)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x} \\
&\quad + m_{L1}(t)m_{L2}(t) \left(\frac{1}{4p_1 p_2} - \frac{1}{(p_2 + p_1)^2} \right) e^{2(p_2 + p_1)x} \\
&\quad + m_{L2}(t)m_{L3}(t) \left(\frac{1}{4p_2 p_3} - \frac{1}{(p_3 + p_2)^2} \right) e^{2(p_3 + p_2)x} \\
&\quad + m_{L3}(t)m_{L1}(t) \left(\frac{1}{4p_3 p_1} - \frac{1}{(p_3 + p_1)^2} \right) e^{2(p_3 + p_1)x} \\
&\quad + m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t) \left(\frac{1}{8p_1 p_2 p_3} + \frac{2}{(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2p_1(p_3 + p_2)^2} - \frac{1}{2p_2(p_3 + p_1)^2} - \frac{1}{2p_3(p_2 + p_1)^2} \right) e^{2(p_1 + p_2 + p_3)x} \\
&= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x} \\
&\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)(p_2 - p_1)^2}{4p_1 p_2 (p_2 + p_1)^2} e^{2(p_2 + p_1)x} \\
&\quad + \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_3 - p_2)^2}{4p_2 p_3 (p_3 + p_2)^2} e^{2(p_3 + p_2)x} + \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)(p_3 - p_1)^2}{4p_3 p_1 (p_3 + p_1)^2} e^{2(p_3 + p_1)x} \\
&\quad + m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t) \left(\frac{1}{8p_1 p_2 p_3} + \frac{2}{(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2p_1(p_3 + p_2)^2} - \frac{1}{2p_2(p_3 + p_1)^2} - \frac{1}{2p_3(p_2 + p_1)^2} \right) e^{2(p_1 + p_2 + p_3)x} \tag{4.4.2}
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8p_1 p_2 p_3} + \frac{2}{(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1)} \\
&\quad - \frac{1}{2p_1(p_3 + p_2)^2} - \frac{1}{2p_2(p_3 + p_1)^2} - \frac{1}{2p_3(p_2 + p_1)^2} \\
&= \frac{1}{8p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2} \\
&\quad [(p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2 + 16p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1) \\
&\quad - 4p_2 p_3 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_1)^2 - 4p_3 p_1 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 \\
&\quad - 4p_1 p_2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2] \\
&= \frac{1}{8p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2} \\
&\quad + 16p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1) \\
&\quad - 4p_2 p_3 [(p_2 - p_1)^2 + 4p_1 p_2] [(p_3 - p_1)^2 + 4p_3 p_1] \\
&\quad - 4p_3 p_1 [(p_2 - p_1)^2 + 4p_1 p_2] [(p_3 - p_2)^2 + 4p_2 p_3] \\
&\quad - 4p_1 p_2 [(p_3 - p_2)^2 + 4p_2 p_3] [(p_3 - p_1)^2 + 4p_3 p_1] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2} \\
&\quad \left\{ (p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 + 4p_3p_1(p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2 \right. \\
&\quad + 4p_2p_3(p_2-p_1)^2(p_3-p_1)^2 + 4p_1p_2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 \\
&\quad + 16p_1p_2p_3^2(p_2-p_1)^2 + 16p_1^2p_2p_3(p_3-p_2)^2 + 16p_1p_2^2p_3(p_3-p_1)^2 \\
&\quad + 64p_1^2p_2^2p_3^2 + 16p_1p_2p_3(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1) \\
&\quad - 4p_2p_3(p_2-p_1)^2(p_3-p_1)^2 - 16p_1p_2p_3^2(p_2-p_1)^2 - 16p_1p_2^2p_3(p_3-p_1)^2 \\
&\quad - 64p_1^2p_2^2p_3^2 \\
&\quad - 4p_3p_1(p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2 - 16p_1p_2p_3^2(p_2-p_1)^2 - 16p_1^2p_2p_3(p_3-p_2)^2 \\
&\quad - 64p_1^2p_2^2p_3^2 \\
&\quad \left. - 4p_1p_2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 - 16p_1^2p_2p_3(p_3-p_2)^2 - 16p_1p_2^2p_3(p_3-p_1)^2 \right. \\
&\quad \left. - 64p_1^2p_2^2p_3^2 \right\} \\
&= \frac{1}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2} \\
&\quad \left\{ (p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 + 16p_1p_2p_3(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1) \right. \\
&\quad - 16p_1p_2p_3^2(p_2-p_1)^2 - 16p_1^2p_2p_3(p_3-p_2)^2 - 16p_1p_2^2p_3(p_3-p_1)^2 \\
&\quad \left. - 128p_1^2p_2^2p_3^2 \right\} \\
&= \frac{1}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2} \\
&\quad \left\{ (p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 \right. \\
&\quad + 16p_1p_2p_3[(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1) \\
&\quad - p_3(p_2-p_1)^2 - p_1(p_3-p_2)^2 - p_2(p_3-p_1)^2] - 128p_1^2p_2^2p_3^2 \left. \right\} \\
&= \frac{1}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2} \\
&\quad \left\{ (p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 \right. \\
&\quad + 16p_1p_2p_3[p_1^2(p_3+p_2) + p_2^2(p_3+p_1) + p_3^2(p_2+p_1) + 2p_1p_2p_3 \\
&\quad - p_2^2p_3 + 2p_1p_2p_3 - p_3p_1^2 - p_1p_3^2 + 2p_1p_2p_3 - p_1p_2^2 \\
&\quad \left. - p_2p_3^2 + 2p_1p_2p_3 - p_1^2p_2] - 128p_1^2p_2^2p_3^2 \right\} \\
&= \frac{1}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2} \\
&\quad \left\{ (p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2 + 16p_1p_2p_3 \cdot (8p_1p_2p_3) - 128p_1^2p_2^2p_3^2 \right\} \\
&= \frac{(p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2} \tag{4.4.3}
\end{aligned}$$

となるので, (4.4.2) は

$$\begin{aligned}
& \det V(x, t) \\
&= 1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x} \\
&\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)(p_2 - p_1)^2}{4p_1 p_2 (p_2 + p_1)^2} e^{2(p_2 + p_1)x} \\
&\quad + \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_3 - p_2)^2}{4p_2 p_3 (p_3 + p_2)^2} e^{2(p_3 + p_2)x} + \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)(p_3 - p_1)^2}{4p_3 p_1 (p_3 + p_1)^2} e^{2(p_3 + p_1)x} \\
&\quad \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_2 - p_1)^2 (p_3 - p_2)^2 (p_3 - p_1)^2}{8p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2} e^{2(p_1 + p_2 + p_3)x} \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

と書き換えられる. (4.1.21) より $m_{L1}(t) = m_{L1}(0)e^{-8p_1^3 t}$, $m_{L2}(t) = m_{L2}(0)e^{-8p_2^3 t}$, $m_{L3}(t) = m_{L3}(0)e^{-8p_3^3 t}$ となるので,

$$\gamma_1 \equiv p_1 x - 4p_1^3 t, \quad (4.4.5)$$

$$\gamma_2 \equiv p_2 x - 4p_2^3 t, \quad (4.4.6)$$

$$\gamma_3 \equiv p_3 x - 4p_3^3 t \quad (4.4.7)$$

と置くと,

$$\begin{aligned}
& \ln[\det V(x, t)] \\
&= \left[m_{L1}(t)e^{2p_1 x} + m_{L2}(t)e^{2p_2 x} + m_{L3}(t)e^{2p_3 x} \right. \\
&\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)(p_2 - p_1)^2}{2p_1 p_2 (p_2 + p_1)} e^{2(p_2 + p_1)x} + \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_3 - p_2)^2}{2p_2 p_3 (p_3 + p_2)} e^{2(p_3 + p_2)x} \\
&\quad + \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)(p_3 - p_1)^2}{2p_3 p_1 (p_3 + p_1)} e^{2(p_3 + p_1)x} \\
&\quad \left. \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_2 - p_1)^2 (p_3 - p_2)^2 (p_3 - p_1)^2 (p_1 + p_2 + p_3)}{4p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2} e^{2(p_1 + p_2 + p_3)x} \right] \\
&\quad \left[1 + \frac{m_{L1}(t)}{2p_1} e^{2p_1 x} + \frac{m_{L2}(t)}{2p_2} e^{2p_2 x} + \frac{m_{L3}(t)}{2p_3} e^{2p_3 x} \right. \\
&\quad + \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)(p_2 - p_1)^2}{4p_1 p_2 (p_2 + p_1)^2} e^{2(p_2 + p_1)x} \\
&\quad + \frac{m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_3 - p_2)^2}{4p_2 p_3 (p_3 + p_2)^2} e^{2(p_3 + p_2)x} + \frac{m_{L3}(t)m_{L1}(t)(p_3 - p_1)^2}{4p_3 p_1 (p_3 + p_1)^2} e^{2(p_3 + p_1)x} \\
&\quad \left. \frac{m_{L1}(t)m_{L2}(t)m_{L3}(t)(p_2 - p_1)^2 (p_3 - p_2)^2 (p_3 - p_1)^2}{8p_1 p_2 p_3 (p_2 + p_1)^2 (p_3 + p_2)^2 (p_3 + p_1)^2} e^{2(p_1 + p_2 + p_3)x} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[m_{L1}(0)e^{2\gamma_1} + m_{L2}(0)e^{2\gamma_2} + m_{L3}(0)e^{2\gamma_3} \right. \\
&\quad + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)(p_2 - p_1)^2}{2p_1p_2(p_2 + p_1)} e^{2(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_3 - p_2)^2}{2p_2p_3(p_3 + p_2)} e^{2(\gamma_2+\gamma_3)} \\
&\quad + \frac{m_{L3}(0)m_{L1}(0)(p_3 - p_1)^2}{2p_3p_1(p_3 + p_1)} e^{2(\gamma_3+\gamma_1)} \\
&\quad \left. \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2 - p_1)^2(p_3 - p_2)^2(p_3 - p_1)^2(p_1 + p_2 + p_3)}{4p_1p_2p_3(p_2 + p_1)^2(p_3 + p_2)^2(p_3 + p_1)^2} e^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \right] \\
&\quad \left[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1} e^{2\gamma_1} + \frac{m_{L2}(0)}{2p_2} e^{2\gamma_2} + \frac{m_{L3}(0)}{2p_3} e^{2\gamma_3} \right. \\
&\quad + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)(p_2 - p_1)^2}{4p_1p_2(p_2 + p_1)^2} e^{2(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_3 - p_2)^2}{4p_2p_3(p_3 + p_2)^2} e^{2(\gamma_2+\gamma_3)} \\
&\quad + \frac{m_{L3}(0)m_{L1}(0)(p_3 - p_1)^2}{4p_3p_1(p_3 + p_1)^2} e^{2(\gamma_3+\gamma_1)} \\
&\quad \left. \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2 - p_1)^2(p_3 - p_2)^2(p_3 - p_1)^2}{8p_1p_2p_3(p_2 + p_1)^2(p_3 + p_2)^2(p_3 + p_1)^2} e^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \right]^{-1} \quad (4.4.8)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$e^{\delta_1} \equiv \sqrt{\frac{m_{L1}(0)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)}{2p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)}}, \quad (4.4.9)$$

$$e^{\delta_2} \equiv \sqrt{\frac{m_{L2}(0)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)}{2p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)}}, \quad (4.4.10)$$

$$e^{\delta_3} \equiv \sqrt{\frac{m_{L3}(0)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)}{2p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}} \quad (4.4.11)$$

と置くと，

$$e^{\delta_1+\delta_2+\delta_3} = \sqrt{\frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2 - p_1)^2(p_3 - p_1)^2(p_3 - p_2)^2}{8p_1p_2p_3(p_2 + p_1)^2(p_3 + p_1)^2(p_3 + p_2)^2}}, \quad (4.4.12)$$

$$e^{\delta_1-\delta_2-\delta_3} = \sqrt{\frac{2p_2p_3m_{L1}(0)}{p_1m_{L2}(0)m_{L3}(0)} \left(\frac{p_3 + p_2}{p_3 - p_2} \right)}, \quad (4.4.13)$$

$$e^{\delta_1+\delta_2-\delta_3} = \sqrt{\frac{p_3m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{2p_1p_2m_{L3}(0)} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \right)}, \quad (4.4.14)$$

$$e^{\delta_1-\delta_2+\delta_3} = \sqrt{\frac{p_2m_{L3}(0)m_{L1}(0)}{2p_3p_1m_{L2}(0)} \left(\frac{p_3 - p_1}{p_3 + p_1} \right)} \quad (4.4.15)$$

が成り立つ．更に

$$\theta_1 \equiv \gamma_1 + \delta_1, \quad (4.4.16)$$

$$\theta_2 \equiv \gamma_2 + \delta_2, \quad (4.4.17)$$

$$\theta_3 \equiv \gamma_3 + \delta_3 \quad (4.4.18)$$

と置く。(4.4.8) の分母, 分子に $\sqrt{\frac{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_1)^2(p_3+p_2)^2}{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2-p_1)^2(p_3-p_1)^2(p_3-p_2)^2}}e^{-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)}$ を掛けると, (4.4.8) の分母は

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{m_{L1}(0)}{2p_1}e^{2\gamma_1} + \frac{m_{L2}(0)}{2p_2}e^{2\gamma_2} + \frac{m_{L3}(0)}{2p_3}e^{2\gamma_3} \right. \\ & + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)(p_2-p_1)^2}{4p_1p_2(p_2+p_1)^2}e^{2(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_3-p_2)^2}{4p_2p_3(p_3+p_2)^2}e^{2(\gamma_2+\gamma_3)} \\ & + \frac{m_{L3}(0)m_{L1}(0)(p_3-p_1)^2}{4p_3p_1(p_3+p_1)^2}e^{2(\gamma_3+\gamma_1)} \\ & \left. \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2-p_1)^2(p_3-p_2)^2(p_3-p_1)^2}{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_2)^2(p_3+p_1)^2}e^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \right] \\ & \sqrt{\frac{8p_1p_2p_3(p_2+p_1)^2(p_3+p_1)^2(p_3+p_2)^2}{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2-p_1)^2(p_3-p_1)^2(p_3-p_2)^2}}e^{-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \\ & = e^{-\delta_1-\delta_2-\delta_3} \cdot e^{-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3} + \sqrt{\frac{2p_2p_3m_{L1}(0)}{p_1m_{L2}(0)m_{L3}(0)} \frac{(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3+p_2)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)}}}e^{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3} \\ & + \sqrt{\frac{2p_3p_1m_{L2}(0)}{p_2m_{L3}(0)m_{L1}(0)} \frac{(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3+p_2)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)}}}e^{-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \\ & + \sqrt{\frac{2p_1p_2m_{L3}(0)}{p_3m_{L1}(0)m_{L2}(0)} \frac{(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3+p_2)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)}}}e^{-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} \\ & + \sqrt{\frac{p_3m_{L1}(0)m_{L2}(0)}{2p_1p_2m_{L3}(0)} \frac{(p_2-p_1)(p_3+p_1)(p_3+p_2)}{(p_2+p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)}}}e^{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \\ & + \sqrt{\frac{m_{L2}(0)m_{L3}(0)p_1}{2p_2p_3m_{L1}(0)} \frac{(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3+p_2)}}}e^{-\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \\ & + \sqrt{\frac{m_{L3}(0)m_{L1}(0)p_2}{2p_3p_1m_{L2}(0)} \frac{(p_2+p_1)(p_3-p_1)(p_3+p_2)}{(p_2-p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)}}}e^{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} \\ & + e^{\delta_1+\delta_2+\delta_3} \cdot e^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\theta_1-\theta_2-\theta_3} + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)e^{\delta_1-\delta_2-\delta_3} \cdot e^{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{-\delta_1+\delta_2-\delta_3} \cdot e^{-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{-\delta_1-\delta_2+\delta_3} \cdot e^{-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{\delta_1+\delta_2-\delta_3} \cdot e^{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)e^{-\delta_1+\delta_2+\delta_3} \cdot e^{-\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{\delta_1-\delta_2+\delta_3} \cdot e^{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \\
&= e^{-\theta_1-\theta_2-\theta_3} + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{-\theta_1+\theta_2-\theta_3} + \left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{-\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{\theta_1+\theta_2-\theta_3} + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_1}{p_3-p_1}\right)e^{-\theta_1+\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + \left(\frac{p_2+p_1}{p_2-p_1}\right)\left(\frac{p_3+p_2}{p_3-p_2}\right)e^{\theta_1-\theta_2+\theta_3} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \\
&= \frac{1}{(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)} [(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)e^{-\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1)e^{-\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_3+p_1)(p_3+p_2)(p_2-p_1)e^{-\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_3+p_1)(p_3+p_2)(p_2-p_1)e^{\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)e^{-\theta_1+\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_1)(p_3+p_2)e^{\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}] \\
&= \frac{1}{(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)} \\
&\quad \{ (p_2-p_1)(p_3-p_1)[(p_3+p_1)-(p_2+p_1)]e^{-\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_1)[(p_3-p_1)-(p_2-p_1)]e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_1)[(p_3+p_1)-(p_2-p_1)]e^{-\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2-p_1)(p_3+p_1)[(p_3-p_1)+(p_2+p_1)]e^{-\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2-p_1)(p_3+p_1)[(p_3-p_1)+(p_2+p_1)]e^{\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_1)[(p_3-p_1)-(p_2-p_1)]e^{-\theta_1+\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_1)[(p_2-p_1)+(p_3+p_1)]e^{\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2-p_1)(p_3-p_1)[(p_3+p_1)-(p_2+p_1)]e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)} \\
&\quad \{ [(p_2 - p_1)(p_3^2 - p_1^2) - (p_3 - p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + [(p_2 + p_1)(p_3^2 - p_1^2) - (p_3 + p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + [(p_2 + p_1)(p_3^2 - p_1^2) - (p_3 - p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + [(p_2 - p_1)(p_3^2 - p_1^2) + (p_3 + p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad + [(p_2 - p_1)(p_3^2 - p_1^2) + (p_3 + p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + [(p_2 + p_1)(p_3^2 - p_1^2) - (p_3 + p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad + [(p_3 - p_1)(p_2^2 - p_1^2) + (p_2 + p_1)(p_3^2 - p_1^2)]e^{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad + [(p_2 - p_1)(p_3^2 - p_1^2) - (p_3 - p_1)(p_2^2 - p_1^2)]e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \} \\
&= \frac{1}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)} \\
&\quad \{ -(p_2^2 - p_1^2)[(p_3 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad - (p_3 + p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} - (p_3 + p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + (p_3 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + (p_3 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}] \\
&\quad + (p_3^2 - p_1^2)[(p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + (p_2 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_2 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad + (p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_2 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + (p_2 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}] \} \\
&= \frac{1}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)} \\
&\quad \{ -(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})[(p_3 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_3} - (p_3 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_3} \\
&\quad + (p_3 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_3}] \\
&\quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3})[(p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2} + (p_2 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2} \\
&\quad + (p_2 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2}] \} \\
&= \frac{1}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)} \\
&\quad \{ -(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \\
&\quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
&\quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
&\quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \} \tag{4.4.19}
\end{aligned}$$

となる．一方，(4.4.8) の分子は

$$\begin{aligned}
& \left[m_{L1}(0)e^{2\gamma_1} + m_{L2}(0)e^{2\gamma_2} + m_{L3}(0)e^{2\gamma_3} \right. \\
& + \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)(p_2 - p_1)^2}{2p_1p_2(p_2 + p_1)} e^{2(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_3 - p_2)^2}{2p_2p_3(p_3 + p_2)} e^{2(\gamma_2+\gamma_3)} \\
& + \frac{m_{L3}(0)m_{L1}(0)(p_3 - p_1)^2}{2p_3p_1(p_3 + p_1)} e^{2(\gamma_3+\gamma_1)} \\
& \left. \frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2 - p_1)^2(p_3 - p_2)^2(p_3 - p_1)^2(p_1 + p_2 + p_3)}{4p_1p_2p_3(p_2 + p_1)^2(p_3 + p_2)^2(p_3 + p_1)^2} e^{2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \right] \\
& \sqrt{\frac{8p_1p_2p_3(p_2 + p_1)^2(p_3 + p_1)^2(p_3 + p_2)^2}{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2 - p_1)^2(p_3 - p_1)^2(p_3 - p_2)^2}} e^{-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \\
& = \sqrt{\frac{8p_1p_2p_3m_{L1}(0)}{m_{L2}(0)m_{L3}(0)}} \frac{(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3} \\
& + \sqrt{\frac{8p_1p_2p_3m_{L2}(0)}{m_{L3}(0)m_{L1}(0)}} \frac{(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \\
& + \sqrt{\frac{8p_1p_2p_3m_{L3}(0)}{m_{L1}(0)m_{L2}(0)}} \frac{(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} \\
& + \sqrt{\frac{2m_{L1}(0)m_{L2}(0)p_3}{p_1p_2m_{L3}(0)}} \frac{(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \\
& + \sqrt{\frac{2p_1m_{L2}(0)m_{L3}(0)}{p_2p_3m_{L1}(0)}} \frac{(p_3 - p_2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)} e^{-\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \\
& + \sqrt{\frac{2p_2m_{L3}(0)m_{L1}(0)}{p_3p_1m_{L2}(0)}} \frac{(p_3 - p_1)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3} \\
& \sqrt{\frac{m_{L1}(0)m_{L2}(0)m_{L3}(0)(p_2 + p_1)^2(p_3 + p_1)^2(p_3 + p_2)^2}{2p_1p_2p_3(p_2 - p_1)^2(p_3 - p_1)^2(p_3 - p_2)^2}} (p_1 + p_2 + p_3) e^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \\
& = 2p_1 \frac{(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)} e^{\theta_1-\theta_2-\theta_3} + 2p_2 \frac{(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{-\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& + 2p_3 \frac{(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{-\theta_1-\theta_2-\theta_3} + 2 \frac{(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& + 2 \frac{(p_3 + p_2)(p_3 + p_1)(p_2 + p_1)}{(p_3 - p_1)(p_2 - p_1)} e^{-\theta_1+\theta_2+\theta_3} + 2 \frac{(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 + p_1)}{(p_3 - p_2)(p_2 - p_1)} e^{\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
& + 2(p_1 + p_2 + p_3) e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)} \\
&\quad [p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)e^{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)e^{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}] \tag{4.4.20}
\end{aligned}$$

となる．したがって，(4.4.19)，(4.4.20) に $e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}$ を掛けることにより，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} [\ln \det V(x, t)] \\
&= 2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) \\
&\quad \left[p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \right. \\
&\quad p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)e^{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)e^{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad \left. + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \right] \\
&\quad \left\{ - (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right. \\
&\quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
&\quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
&\quad \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right\}^{-1} \\
&= p_1 \tanh \theta_1 + \left\{ 2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1}) \right. \\
&\quad [p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)e^{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)e^{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&\quad + (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)e^{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&\quad \left. + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \right] \\
&\quad + p_1(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})[-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
&\quad + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
&\quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3})[-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) \\
&\quad \left. p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right\} \\
&\quad \left\{ - (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right. \\
&\quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
&\quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
&\quad \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right\}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & p_1 \tanh \theta_1 + \left\{ 2[p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)(e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + e^{-\theta_2 - \theta_3}) \right. \\
& + p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)(e^{+\theta_2 - \theta_3} + e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3}) \\
& p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1)(e^{-\theta_2 + \theta_3} + e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3}) \\
& + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + e^{\theta_2 - \theta_3}) \\
& + (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(e^{+\theta_2 + \theta_3} + e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}) \\
& + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + e^{-\theta_2 + \theta_3}) \\
& + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)(e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + e^{\theta_2 + \theta_3})] \\
& + p_1(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \\
& [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& - p_1(p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right\} \\
& \left\{ - (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right. \\
& [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

ここで

$$\begin{aligned}
F \equiv & 2[p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)(e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + e^{-\theta_2 - \theta_3}) \\
& + p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)(e^{+\theta_2 - \theta_3} + e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3}) \\
& p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1)(e^{-\theta_2 + \theta_3} + e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3}) \\
& + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + e^{\theta_2 - \theta_3}) \\
& + (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(e^{+\theta_2 + \theta_3} + e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}) \\
& + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + e^{-\theta_2 + \theta_3}) \\
& + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)(e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + e^{\theta_2 + \theta_3})]
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

と置くと, (4.4.21) の右辺の第 2 項の分子は

$$\begin{aligned}
& 2[p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)(e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} + e^{-\theta_2 - \theta_3}) \\
& \quad + p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)(e^{+\theta_2 - \theta_3} + e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3}) \\
& \quad p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1)(e^{-\theta_2 + \theta_3} + e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3}) \\
& \quad + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + e^{\theta_2 - \theta_3}) \\
& \quad + (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(e^{+\theta_2 + \theta_3} + e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}) \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + e^{-\theta_2 + \theta_3}) \\
& \quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)(e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + e^{\theta_2 + \theta_3})] \\
& \quad + p_1(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \\
= & F + (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad - (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \\
= & F + p_1(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1 + \theta_2} - e^{\theta_1 - \theta_2} - e^{-\theta_1 + \theta_2} + e^{-\theta_1 - \theta_2}) \\
& \quad [(p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_3} - (p_3 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_3}] \\
& \quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1 + \theta_3} + e^{\theta_1 - \theta_3} - e^{-\theta_1 + \theta_2} - e^{-\theta_1 - \theta_2}) \\
& \quad [(p_2 - p_1)e^{\theta_1 + \theta_2} + (p_2 + p_1)e^{\theta_1 - \theta_2} + (p_2 + p_1)e^{-\theta_1 + \theta_2} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_1 - \theta_2}] \\
= & F \\
& \quad + p_1(p_2^2 - p_1^2)[(p_3 - p_1)e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} - (p_3 + p_1)e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + (p_3 + p_1)e^{\theta_2 + \theta_3} \\
& \quad - (p_3 - p_1)e^{\theta_2 - \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} + (p_3 + p_1)e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \\
& \quad - (p_3 + p_1)e^{-\theta_2 + \theta_3} + (p_3 - p_1)e^{-\theta_2 - \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{\theta_2 + \theta_3} \\
& \quad + (p_3 + p_1)e^{\theta_2 - \theta_3} - (p_3 + p_1)e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + (p_3 - p_1)e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
& \quad + (p_3 - p_1)e^{-\theta_2 + \theta_3} - (p_3 + p_1)e^{-\theta_2 - \theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}] \\
& \quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)[(p_2 - p_1)e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} + (p_2 + p_1)e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + (p_2 + p_1)e^{\theta_2 + \theta_3} \\
& \quad + (p_2 - p_1)e^{-\theta_2 + \theta_3} + (p_2 - p_1)e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} + (p_2 + p_1)e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \\
& \quad + (p_2 + p_1)e^{\theta_2 - \theta_3} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_2 - \theta_3} - (p_2 - p_1)e^{\theta_2 + \theta_3} \\
& \quad - (p_2 + p_1)e^{-\theta_2 + \theta_3} - (p_2 + p_1)e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} - (p_2 - p_1)e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
& \quad - (p_2 - p_1)e^{\theta_2 - \theta_3} - (p_2 + p_1)e^{-\theta_2 - \theta_3} - (p_2 + p_1)e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} - (p_2 - p_1)e^{-2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F \\
&\quad + e^{-\theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) - p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) \\
&\quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{-\theta_2 + \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) \\
&\quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{\theta_2 - \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) \\
&\quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{\theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) - p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) \\
&\quad - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&= F + e^{-\theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2) \cdot (-2p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2) \cdot (2p_1)] \\
&\quad + e^{-\theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2) \cdot (-2p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2) \cdot (2p_1)] \\
&\quad + e^{\theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2) \cdot (2p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2) \cdot (-2p_1)] \\
&\quad + e^{\theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2) \cdot (2p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2) \cdot (-2p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1)] \\
&\quad + e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} [-p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) - p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\
&\quad + e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} [p_1(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + p_1(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & e^{-\theta_2-\theta_3}[2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2p_1(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)] \\
& +e^{-\theta_2+\theta_3}[2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2p_3(p_3+p_1)(p_3+p_2)(p_2-p_1) \\
& +2(p_3^2-p_1^2)(p_2+p_1)(p_3+p_2)] \\
& +e^{\theta_2-\theta_3}[-2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2p_2(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1) \\
& +2(p_2^2-p_1^2)(p_3+p_1)(p_3+p_2)] \\
& +e^{\theta_2+\theta_3}[-2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2(p_3^2-p_2^2)(p_2+p_1)(p_3+p_1) \\
& +2(p_1+p_2+p_3)(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)] \\
& +e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}[-p_1(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2) \\
& +2(p_1+p_2+p_3)(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)] \\
& +e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3}[p_1(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)] \\
& +e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3}[p_1(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)] \\
& +e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3}[-p_1(p_2-p_1)(p_3+p_1)(p_3+p_2)+2(p_2^2-p_1^2)(p_3+p_1)(p_3+p_2)] \\
& +e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3}[p_1(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)+2(p_3^2-p_2^2)(p_2+p_1)(p_3+p_1)] \\
& +e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3}[p_1(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3+p_2)+2p_3(p_3+p_1)(p_3+p_2)(p_2-p_1)] \\
& +e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3}[-p_1(p_2+p_1)(p_3-p_1)(p_3+p_2)+2(p_3^2-p_1^2)(p_2+p_1)(p_3+p_2)] \\
& +e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3}[p_1(p_3-p_1)(p_2+p_1)(p_3+p_2)+2p_2(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1)]
\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

となる . (4.4.23) の各項の係数を

$$R_1 \equiv 2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2p_1(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2), \tag{4.4.24}$$

$$R_2 \equiv 2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2p_3(p_3+p_1)(p_3+p_2)(p_2-p_1), \tag{4.4.25}$$

$$R_3 \equiv -2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2p_2(p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1), \tag{4.4.26}$$

$$\begin{aligned}
R_4 \equiv & -2p_1^2(p_3^2-p_2^2)+2(p_3^2-p_2^2)(p_2+p_1)(p_3+p_1) \\
& +2(p_1+p_2+p_3)(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1),
\end{aligned} \tag{4.4.27}$$

$$\begin{aligned}
R_5 \equiv & -p_1(p_2-p_1)(p_3-p_1)(p_3-p_2) \\
& +2(p_1+p_2+p_3)(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1),
\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

$$R_6 \equiv p_1(p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1), \tag{4.4.29}$$

$$R_7 \equiv 2p_1(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2), \tag{4.4.30}$$

$$R_8 \equiv -p_1(p_2-p_1)(p_3+p_1)(p_3+p_2)+2(p_2^2-p_1^2)(p_3+p_1)(p_3+p_2), \tag{4.4.31}$$

$$R_9 \equiv p_1(p_2+p_1)(p_3+p_1)(p_3-p_2)+2(p_3^2-p_2^2)(p_2+p_1)(p_3+p_1), \tag{4.4.32}$$

$$R_{10} \equiv p_1(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 + p_2) + 2p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1), \quad (4.4.33)$$

$$R_{11} \equiv -p_1(p_2 + p_1)(p_3 - p_1)(p_3 + p_2) + 2(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2), \quad (4.4.34)$$

$$R_{12} \equiv p_1(p_3 - p_1)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2) + 2p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1) \quad (4.4.35)$$

と置くと，各係数は以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} R_1 &= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_3^2 - p_2^2)p_2p_3 + 2p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2) \\ &= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_3 - p_2)[p_2p_3(p_3 + p_2) + p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)] \\ &= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) \\ &\quad + 2(p_3 - p_2)\{p_2p_3(p_1 + p_2 + p_3) + p_1[-p_2p_3 + p_2p_3 + p_1(p_2 + p_3) + p_1^2]\} \\ &= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_3 - p_2)\{p_2p_3(p_1 + p_2 + p_3) + p_1^2(p_2 + p_3 + p_1)\} \\ &= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_3 - p_2)(p_1 + p_2 + p_3)(p_2p_3 + p_1^2), \quad (4.4.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) - 2(p_3^2 - p_2^2)p_2p_3 \\ &\quad + 2(p_3 + p_2)[p_3(p_3 + p_1)(p_2 - p_1) + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\ &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\ &\quad + 2(p_3 + p_2)[-(p_3 - p_2)p_2p_3 + p_3(p_3 + p_1)(p_2 - p_1) + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)] \\ &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\ &\quad + 2(p_3 + p_2)\{p_3[-(p_3 - p_2)p_2 + (p_3 + p_1)(p_2 - p_1) + p_3^2(p_2 + p_1) \\ &\quad - p_1^2(p_1 + p_2 + p_3) + p_1^2p_3]\} \\ &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\ &\quad + 2(p_3 + p_2)\{p_3[-(p_3 - p_2)p_2 + (p_3 + p_1)(p_2 - p_1) \\ &\quad + p_3^2(p_2 + p_1) - p_1^2(p_1 + p_2 + p_3)]\} \\ &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\ &\quad + 2(p_3 + p_2)\{p_3[-p_2p_3 + p_2^2 + p_2p_3 - p_3p_1 \\ &\quad + p_1p_2 - p_1^2 + p_2p_3 + p_3p_1 + p_1^2] - p_1^2(p_1 + p_2 + p_3)\} \\ &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\ &\quad + 2(p_3 + p_2)[p_3p_2(p_1 + p_2 + p_3) - (p_1 + p_2 + p_3)p_1^2] \\ &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) + 2(p_3 + p_2)(p_3p_2 - p_1^2)(p_1 + p_2 + p_3), \quad (4.4.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) + 2(p_3^2 - p_2^2)p_2p_3 \\
&\quad + 2(p_3 + p_2)[p_2(p_2 + p_1)(p_3 - p_1) + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)] \\
&= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 + p_2)[(p_3 - p_2)p_2p_3 + p_2(p_2 + p_1)(p_3 - p_1) + (p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)] \\
&= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 + p_2)[-p_1^2(p_1 + p_2 + p_3) + p_1^2p_2 + p_2^2(p_3 + p_1) \\
&\quad + (p_3 - p_2)p_2p_3 + p_2(p_2 + p_1)(p_3 - p_1)] \\
&= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 + p_2)[-p_1^2(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad + p_2(p_1^2 + p_2p_3 + p_2p_1 + p_3^2) - p_2p_3 + p_2p_3 - p_2p_1 + p_3p_1 - p_1^2] \\
&= -2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 + p_2)[-p_1^2(p_1 + p_2 + p_3) + p_2p_3(p_1 + p_2 + p_3)] \\
&\quad - 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) + 2(p_3 + p_2)(p_2p_3 - p_1^2)(p_1 + p_2 + p_3), \quad (4.4.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) - 2(p_3^2 - p_2^2)p_2p_3 \\
&\quad + 2(p_3 - p_2)[(p_3 + p_2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)] \\
&= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 - p_2)[-(p_3 + p_2)p_2p_3 + (p_3 + p_2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)] \\
&= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 - p_2)[-p_1(p_3 + p_2)(p_1 + p_2 + p_3) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)] \\
&= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) \\
&\quad + 2(p_3 - p_2)(p_1 + p_2 + p_3)[p_1p_3 + p_3p_1 + p_2p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 + p_1^2] \\
&= 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_1 + p_2 + p_3)(p_3 - p_2)(p_2p_3 + p_1^2), \quad (4.4.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_5 &= -p_1(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2) + 2(p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1) \\
&= (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(-p_1 + p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1) \\
&= (p_3^2 - p_2^2)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1), \quad (4.4.40)
\end{aligned}$$

R_6

$$\begin{aligned}
&= p_1(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2) \\
&= [(p_1 + p_2 + p_3) - (p_3 + p_2)](p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2) \\
&= -(p_3^2 - p_2^2)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2),
\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

 R_7

$$\begin{aligned}
&= [(p_1 + p_2 + p_3) - (p_3 + p_2)](p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2) \\
&= -(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2),
\end{aligned} \tag{4.4.42}$$

 R_8

$$\begin{aligned}
&= -p_1(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2) + 2(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2) \\
&= (-p_1 + 2p_2 + 2p_1)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2) \\
&= -(p_3^2 - p_2^2)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2),
\end{aligned} \tag{4.4.43}$$

 R_9

$$\begin{aligned}
&= p_1(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2) + 2(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) \\
&= [p_1 + 2(p_3 + p_2)](p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2) \\
&= (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2),
\end{aligned} \tag{4.4.44}$$

 R_{10}

$$\begin{aligned}
&= p_1(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2) + 2p_3(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)(p_2 - p_1) \\
&= [(p_1 + p_2 + p_3) + (p_3 - p_2)](p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2) \\
&= (p_3^2 - p_2^2)(p_3 + p_1)(p_2 - p_1) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2),
\end{aligned} \tag{4.4.45}$$

 R_{11}

$$\begin{aligned}
&= -p_1(p_2 + p_1)(p_3 - p_1)(p_3 + p_2) + 2(p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2) \\
&= [(p_1 + p_2 + p_3) + (p_3 - p_2)](p_2 + p_1)(p_3 - p_1)(p_3 + p_2) \\
&= (p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 - p_1) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 - p_1)(p_3 + p_2),
\end{aligned} \tag{4.4.46}$$

$$\begin{aligned}
R_{12} &= p_1(p_3 - p_1)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2) + 2p_2(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1) \\
&= [(p_1 + p_2 + p_3) - (p_3 - p_2)](p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1) \\
&= -(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 - p_1) \\
&\quad + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1). \tag{4.4.47}
\end{aligned}$$

よって (4.4.21) の右辺の第 2 項の分子は

$$\begin{aligned}
&e^{-\theta_2 - \theta_3} \\
&[-2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_3 - p_2)(p_1 + p_2 + p_3)(p_2p_3 + p_1^2)] \\
&+ e^{-\theta_2 + \theta_3} \\
&[2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) + 2(p_3 + p_2)(p_3p_2 - p_1^2)(p_1 + p_2 + p_3)] \\
&+ e^{\theta_2 - \theta_3} \\
&[-2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 + p_1^2) + 2(p_3 + p_2)(p_2p_3 - p_1^2)(p_1 + p_2 + p_3)] \\
&+ e^{\theta_2 + \theta_3} \\
&[2(p_3^2 - p_2^2)(p_2p_3 - p_1^2) + 2(p_1 + p_2 + p_3)(p_3 - p_2)(p_2p_3 + p_1^2)] \\
&+ e^{2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \\
&[(p_3^2 - p_2^2)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)] \\
&+ e^{-2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \\
&[-(p_3^2 - p_2^2)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)] \\
&+ e^{2\theta_1 - \theta_2 - \theta_3} \\
&[-(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)] \\
&+ e^{2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&[-(p_3^2 - p_2^2)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)] \\
&+ e^{-2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \\
&[(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 + p_1)(p_3 - p_2)] \\
&+ e^{-2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&[(p_3^2 - p_2^2)(p_3 + p_1)(p_2 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 - p_1)(p_3 + p_1)(p_3 + p_2)] \\
&+ e^{2\theta_1 - \theta_2 + \theta_3} \\
&[(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 - p_1)(p_3 + p_2)] \\
&+ e^{-2\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} \\
&[-(p_3^2 - p_2^2)(p_2 + p_1)(p_3 - p_1) + (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -(p_3^2 - p_2^2) \\
& [2(p_2p_3 - p_1^2)e^{-\theta_2-\theta_3} - 2(p_2p_3 + p_1^2)e^{-\theta_2+\theta_3} \\
& + 2(p_2p_3 + p_1^2)e^{\theta_2-\theta_3} - 2(p_2p_3 - p_1^2)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& - (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
& + (p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 + p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& - (p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} - (p_2 - p_1)(p_3 + p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
& - (p_2 + p_1)(p_3 - p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_2 + p_1)(p_3 - p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3}] \\
& + (p_1 + p_2 + p_3) \\
& [+2(p_3 - p_2)(p_2p_3 + p_1^2)e^{-\theta_2-\theta_3} + 2(p_3 + p_2)(p_2p_3 - p_1^2)e^{-\theta_2+\theta_3} \\
& + 2(p_3 + p_2)(p_2p_3 - p_1^2)e^{\theta_2-\theta_3} + 2(p_3 - p_2)(p_2p_3 + p_1^2)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& + (p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 - p_2)(p_3 - p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
& + (p_2 + p_1)(p_3 - p_2)(p_3 + p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& + (p_2 + p_1)(p_3 - p_2)(p_3 + p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 + p_2)(p_3 + p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
& + (p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_2 + p_1)(p_3 + p_2)(p_3 - p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3}] \\
& \hspace{15em} (4.4.48)
\end{aligned}$$

となる．ここで (4.4.23) の右辺の第 2 項の分母が

$$\begin{aligned}
& -(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \\
= & -(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1+\theta_2} - e^{\theta_1-\theta_2} + e^{-\theta_1+\theta_2} - e^{-\theta_1-\theta_2}) \\
& \quad [(p_3 - p_1)e^{\theta_1+\theta_3} - (p_3 + p_1)e^{\theta_1-\theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-\theta_1+\theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-\theta_1-\theta_3}] \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1+\theta_3} + e^{\theta_1-\theta_3} + e^{-\theta_1+\theta_3} + e^{-\theta_1-\theta_3}) \\
& \quad [(p_2 - p_1)e^{\theta_1+\theta_2} + (p_2 + p_1)e^{\theta_1-\theta_2} + (p_2 + p_1)e^{-\theta_1+\theta_2} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_1-\theta_2}] \\
= & -(p_2^2 - p_1^2)[(p_3 - p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} - (p_3 + p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} + (p_3 + p_1)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& \quad - (p_3 - p_1)e^{\theta_2-\theta_3} - (p_3 - p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_3 + p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
& \quad - (p_3 + p_1)e^{-\theta_2+\theta_3} + (p_3 - p_1)e^{-\theta_2-\theta_3} + (p_3 - p_1)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& \quad - (p_3 + p_1)e^{\theta_2-\theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& \quad - (p_3 - p_1)e^{-\theta_2+\theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-\theta_2-\theta_3} - (p_3 + p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
& \quad + (p_3 - p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3}] \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)[(p_2 - p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2 + p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_2 + p_1)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& \quad + (p_2 - p_1)e^{-\theta_2+\theta_3} + (p_2 - p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} + (p_2 + p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
& \quad + (p_2 + p_1)e^{\theta_2-\theta_3} + (p_2 - p_1)e^{-\theta_2-\theta_3} + (p_2 - p_1)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& \quad + (p_2 + p_1)e^{-\theta_2+\theta_3} + (p_2 + p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2 - p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
& \quad + (p_2 - p_1)e^{\theta_2-\theta_3} + (p_2 + p_1)e^{-\theta_2-\theta_3} + (p_2 + p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& \quad + (p_2 - p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3}] \\
= & e^{-\theta_2-\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[(p_3 - p_1) + (p_3 + p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)[(p_2 - p_1) + (p_2 + p_1)] \} \\
& + e^{-\theta_2+\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[-(p_3 + p_1) - (p_3 - p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)[(p_2 - p_1) + (p_2 + p_1)] \} \\
& e^{\theta_2-\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[-(p_3 - p_1) - (p_3 + p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)[(p_2 + p_1) + (p_2 - p_1)] \} \\
& e^{\theta_2+\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[(p_3 + p_1) + (p_3 - p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)[(p_2 + p_1) + (p_2 - p_1)] \} \\
& e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1) \} \\
& e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)(p_3 - p_1) + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1) \} \\
& e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1) \} \\
& e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[-(p_3 + p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1) \} \\
& e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)(p_3 + p_1) + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1) \} \\
& e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[-(p_3 + p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 - p_1) \} \\
& e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[-(p_3 - p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1) \} \\
& e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \{ -(p_2^2 - p_1^2)[-(p_3 - p_1)] + (p_3^2 - p_1^2)(p_2 + p_1) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\theta_2-\theta_3}[-2p_3(p_2^2-p_1^2)+2p_2(p_3^2-p_1^2)] \\
&\quad + e^{-\theta_2+\theta_3}[2p_3(p_2^2-p_1^2)+2p_2(p_3^2-p_1^2)] \\
&\quad e^{\theta_2-\theta_3}[2p_3(p_2^2-p_1^2)+2p_2(p_3^2-p_1^2)] \\
&\quad e^{\theta_2+\theta_3}[-2p_3(p_2^2-p_1^2)+2p_2(p_3^2-p_1^2)] \\
&\quad e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}[-(p_2+p_1)+(p_3+p_1)](p_2-p_1)(p_3-p_1) \\
&\quad e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3}[-(p_2+p_1)+(p_3+p_1)](p_2-p_1)(p_3-p_1) \\
&\quad e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3}[-(p_2-p_1)+(p_3-p_1)](p_3+p_1)(p_2+p_1) \\
&\quad e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3}[(p_2-p_1)+(p_3-p_1)](p_3+p_1)(p_2-p_1) \\
&\quad e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3}[-(p_2-p_1)+(p_3-p_1)](p_3+p_1)(p_2+p_1) \\
&\quad e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3}[(p_2-p_1)+(p_3-p_1)](p_3+p_1)(p_2-p_1) \\
&\quad e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3}[(p_2-p_1)+(p_3-p_1)](p_3-p_1)(p_2+p_1) \\
&\quad e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3}[(p_2-p_1)+(p_3-p_1)](p_3-p_1)(p_2+p_1) \\
&= e^{-\theta_2-\theta_3}[2p_2p_3(p_3-p_2)+2p_1^2(p_3-p_2)] \\
&\quad + e^{-\theta_2+\theta_3}[2p_2p_3(p_3+p_2)-2p_1^2(p_3+p_2)] \\
&\quad + e^{\theta_2-\theta_3}[2p_2p_3(p_3+p_2)-2p_1^2(p_3+p_2)] \\
&\quad + e^{\theta_2+\theta_3}[2p_2p_3(p_3-p_2)+2p_1^2(p_3-p_2)] \\
&\quad + (p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_2)(p_3+p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} + (p_2-p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_2)(p_3+p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2-p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&= 2(p_3-p_2)(p_2p_3+p_1^2)e^{-\theta_2-\theta_3} + 2(p_3+p_2)(p_2p_3-p_1^2)e^{-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + 2(p_3+p_2)(p_2p_3-p_1^2)e^{\theta_2-\theta_3} + 2(p_3-p_2)(p_2p_3+p_1^2)e^{\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2-p_1)(p_3-p_2)(p_3-p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_2)(p_3+p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} + (p_2-p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3-p_2)(p_3+p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2-p_1)(p_3+p_2)(p_3+p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
&\quad + (p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_2+p_1)(p_3+p_2)(p_3-p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3}
\end{aligned} \tag{4.4.49}$$

となること,そして

$$\begin{aligned}
& [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad [p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) - p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2})] \\
= & [(p_3 - p_1)e^{\theta_1+\theta_3} - (p_3 + p_1)e^{\theta_1-\theta_3} + (p_3 + p_1)e^{-\theta_1+\theta_3} - (p_3 - p_1)e^{-\theta_1-\theta_3}] \\
& [- (p_2 - p_1)e^{\theta_1+\theta_2} - (p_2 + p_1)e^{\theta_1-\theta_2} - (p_2 + p_1)e^{-\theta_1+\theta_2} - (p_2 - p_1)e^{-\theta_1-\theta_2}] \\
= & 2(p_2p_3 - p_1^2)e^{-\theta_2-\theta_3} - 2(p_2p_3 + p_1^2)e^{-\theta_2+\theta_3} \\
& + 2(p_2p_3 + p_1^2)e^{\theta_2-\theta_3} - 2(p_2p_3 - p_1^2)e^{\theta_2+\theta_3} \\
& - (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2-\theta_3} \\
& + (p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{2\theta_1-\theta_2-\theta_3} + (p_2 - p_1)(p_3 + p_1)e^{2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \\
& - (p_2 + p_1)(p_3 + p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2+\theta_3} - (p_2 - p_1)(p_3 + p_1)e^{-2\theta_1-\theta_2+\theta_3} \\
& - (p_2 + p_1)(p_3 - p_1)e^{2\theta_1-\theta_2+\theta_3} + (p_2 + p_1)(p_3 - p_1)e^{-2\theta_1+\theta_2-\theta_3} \tag{4.4.50}
\end{aligned}$$

となることに着目すると, (4.4.23) は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} [\ln \det V(x, t)] \\
&= p_1 \tanh \theta_1 \\
& \quad + \left\{ - (p_3^2 - p_2^2) [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \right. \\
& \quad [p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) - p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2})] \\
& \quad + (p_1 + p_2 + p_3) \left[- (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right. \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \quad \left. \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right] \right\} \\
& \quad \left\{ - (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right. \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \quad \left. \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})] \right\}^{-1} \\
&= p_1 \tanh \theta_1 \\
& \quad - (p_3^2 - p_2^2) \\
& \quad \left\{ [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \right. \\
& \quad \left. [p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) - p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2})] \right\} \\
& \quad \left\{ - (p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) \right. \\
& \quad [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})] \\
& \quad + (p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) \\
& \quad \left. \left. [-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2})] \right\}^{-1} \\
& \quad + p_1 + p_2 + p_3. \tag{4.4.51}
\end{aligned}$$

(4.4.51) の右辺の第 2 項の分母, 分子を $[-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})$

$e^{-\theta_1}(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})][p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) - p_2(e^{\theta_1} + e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2})]$ で割ると,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} [\ln \det V(x, t)] \\
&= p_1 \tanh \theta_1 + p_1 + p_2 + p_3 - \frac{(p_3^2 - p_2^2)}{1} \cdot \\
& \frac{(p_2^2 - p_1^2)(e^{\theta_1 + e^{-\theta_1}})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2})}{-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}) + p_2(e^{\theta_1 + e^{-\theta_1}})(e^{\theta_2} + e^{-\theta_2})} - \frac{(p_3^2 - p_1^2)(e^{\theta_1 + e^{-\theta_1}})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3})}{-p_1(e^{\theta_1} - e^{-\theta_1})(e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}) + p_3(e^{\theta_1 + e^{-\theta_1}})(e^{\theta_3} - e^{-\theta_3})} \\
&= p_1 \tanh \theta_1 + p_1 + p_2 + p_3 \\
& \quad - (p_3^2 - p_2^2) \frac{1}{\frac{p_2^2 - p_1^2}{-p_1 \frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1 + e^{-\theta_1}}} + p_2 \frac{e^{\theta_2} + e^{-\theta_2}}{e^{\theta_2} - e^{-\theta_2}}} - \frac{p_3^2 - p_1^2}{-p_1 \frac{e^{\theta_1} - e^{-\theta_1}}{e^{\theta_1 + e^{-\theta_1}}} + p_3 \frac{e^{\theta_3} - e^{-\theta_3}}{e^{\theta_3} + e^{-\theta_3}}}} \\
&= p_1 \tanh \theta_1 + p_1 + p_2 + p_3 \\
& \quad - (p_3^2 - p_2^2) \frac{1}{\frac{p_2^2 - p_1^2}{-p_1 \tanh \theta_1 + p_2 \coth \theta_2} - \frac{p_3^2 - p_1^2}{-p_1 \tanh \theta_1 + p_3 \tanh \theta_3}} \tag{4.4.52}
\end{aligned}$$

が得られる．結局，(4.4.52) より

$$\begin{aligned}
& u(x, t) \\
&= -2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \ln \det V(x, t) \\
&= -2 p_1^2 \operatorname{sech}^2 \theta_1 \\
& \quad - 2(p_3^2 - p_2^2) \frac{(p_2^2 - p_1^2)(p_1^2 \operatorname{sech}^2 \theta_1 + p_2^2 \operatorname{cosech}^2 \theta_2)}{(-p_1 \tanh \theta_1 + p_2 \coth \theta_2)^2} + \frac{(p_3^2 - p_1^2)(-p_1^2 \operatorname{sech}^2 \theta_1 + p_3^2 \operatorname{sech}^2 \theta_3)}{(-p_1 \tanh \theta_1 + p_3 \tanh \theta_3)^2} \\
& \quad \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{-p_1 \tanh \theta_1 + p_2 \coth \theta_2} - \frac{p_3^2 - p_1^2}{-p_1 \tanh \theta_1 + p_3 \tanh \theta_3} \right)^2 \tag{4.4.53}
\end{aligned}$$

が得られる．

4.3 節では， $p_1 = 1$ ， $p_2 = 2$ ， $\delta_1 = \delta_2 = 0$ の場合，2つのソリトンが時刻 $t = 0$ で完全に重なり合うことを見た．同様に $p_1 = 1$ ， $p_2 = 2$ ， $p_3 = 3$ ， $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ のとき，3ソリトン解(4.4.53)が $t = 0$ で1つの谷を形成することを示す．このとき(4.4.53)は

$$\begin{aligned}
& u(x, 0) \\
&= -2 \operatorname{sech}^2 x \\
& \quad - 10 \frac{\frac{3(\operatorname{sech}^2 x + 4 \operatorname{cosech}^2 2x)}{(-\tanh x + 2 \coth 2x)^2} - \frac{8(-\operatorname{sech}^2 x + 9 \operatorname{sech}^2 3x)}{(-\tanh x + 3 \tanh^3 3x)^2}}{\left[\frac{3}{-\tanh x + 2 \coth 2x} + \frac{8}{-\tanh x + 3 \tanh 3x} \right]} \\
&= -2 \operatorname{sech}^2 x \\
& \quad - 10[3(\operatorname{sech}^2 x + 4 \operatorname{cosech}^2 2x)(-\tanh x + 3 \tanh 3x)^2 \\
& \quad + 8(-\operatorname{sech}^2 x + 9 \operatorname{sech}^2 3x)(-\tanh x + 2 \coth 2x)^2] \\
& \quad [3(-\tanh x + 3 \tanh 3x) - 8(-\tanh x + 2 \coth 2x)]^{-2} \tag{4.4.54}
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
 \coth 2x &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} \\
 &= \frac{(e^x - e^{-x})^2 + 2}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \frac{2}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} \\
 &= \tanh x + \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x,
 \end{aligned} \tag{4.4.55}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cosech} 2x &= \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \\
 &= \frac{2}{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x,
 \end{aligned} \tag{4.4.56}$$

$$\begin{aligned}
 \tanh 3x &= \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}} \\
 &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^{2x} + e^{-2x} + 1)}{(e^x + e^{-x})(e^{2x} + e^{-2x} - 1)} \\
 &= \tanh x \frac{\frac{3}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{3}{4}(e^x - e^{-x})^2} \\
 &= \tanh x \frac{3 \cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x + 3 \sinh^2 x} \\
 &= \tanh x \frac{3 + \tanh^2 x}{1 + 3 \tanh^2 x},
 \end{aligned} \tag{4.4.57}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sech} 3x &= \frac{2}{e^{3x} + e^{-3x}} \\
 &= \frac{2}{(e^x + e^{-x})(e^{2x} + e^{-2x} - 1)} \\
 &= \operatorname{sech} x \frac{1}{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{3}{4}(e^x - e^{-x})^2} \\
 &= \operatorname{sech} x \frac{1}{\cosh^2 x + 3 \sinh^2 x} \\
 &= \operatorname{sech}^3 x \frac{1}{1 + 3 \tanh^2 x},
 \end{aligned} \tag{4.4.58}$$

$$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = \frac{4 + (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1, \tag{4.4.59}$$

$$1 + \operatorname{cosech}^2 x = \frac{(e^x - e^{-x})^2 + 4}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{1}{\tanh^2 x}, \quad (4.4.60)$$

$$\operatorname{cosech} x \tanh x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{sech} x \quad (4.4.61)$$

となることに注意し, (4.4.54) の第 2 項の分母, 分子に $(1 + 3 \tanh^2 x)^2$ を掛けると,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -2 \operatorname{sech}^2 x \\ &\quad -10 \{ [3(\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{sech}^2 x \operatorname{cosech}^2 x)(-\tanh x + 3 \tanh^2 3x)^2 \\ &\quad + 8(-\operatorname{sech}^2 x + 9 \operatorname{sech}^2 3x)(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)^2] \\ &\quad (1 + 3 \tanh^2 x)^2 \} \{ [3(-\tanh x + 3 \tanh 3x) \\ &\quad - 8(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)](1 + 3 \tanh^2 x) \}^{-2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2 x \\ &\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \{ [3(1 + \operatorname{cosech}^2 x)(-\tanh x + 3 \tanh^2 3x)^2 \\ &\quad + 8(-\operatorname{sech}^2 x + 9 \operatorname{sech}^2 3x)(\sinh x + \operatorname{cosech} x)^2] \\ &\quad (1 + 3 \tanh^2 x)^2 \} \{ [3(-\tanh x + 3 \tanh 3x) \\ &\quad - 8(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)](1 + 3 \tanh^2 x) \}^{-2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2 x - 10 \operatorname{sech}^2 x \cdot \\ &\quad \{ 3(1 + \operatorname{cosech}^2 x)[- \tanh x(1 + 3 \tanh^2 x) + 3 \tanh x(3 + \tanh^2 x)]^2 \\ &\quad + 8[- \operatorname{sech}^2 x(1 + 3 \tanh^2 x)^2 + 9 \operatorname{sech}^6 x](\sinh x + \operatorname{cosech} x)^2 \} \\ &\quad \{ (-11 \tanh x - 8 \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)(1 + 3 \tanh^2 x) + 9 \tanh x(3 + \tanh^2 x) \}^{-2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2 x \\ &\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \{ 3(1 + \operatorname{cosech}^2 x)(8 \tanh x)^2 \\ &\quad + 8[- \operatorname{sech}^2 x(1 + 6 \tanh^2 x + 9 \tanh^4 x) + 9 \operatorname{sech}^6 x] \\ &\quad (\sinh x + \operatorname{cosech} x)^2 \} \\ &\quad \{ -11 \tanh x - 33 \tanh^3 x - 8 \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x - 24 \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x \tanh^2 x \\ &\quad + 27 \tanh x + 9 \tanh^3 x \}^{-2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2 x \\ &\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \{ 3 \cdot 64 + 8[- \operatorname{sech}^2 x(1 + 6 \tanh^2 x) \\ &\quad + 9 \operatorname{sech}^2 x(\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x)(\operatorname{sech}^2 x - \tanh^2 x)](\sinh x + \operatorname{cosech} x)^2 \} \\ &\quad \{ 16 \tanh x - 24 \tanh^3 x - 8 \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x - 24 \operatorname{sech}^2 x \tanh x \}^{-2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2 x \\ &\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \{ 192 + 8[- \operatorname{sech}^2 x(1 + 6 \tanh^2 x) \\ &\quad + 9 \operatorname{sech}^2 x(\operatorname{sech}^2 x - \tanh^2 x)](\sinh x + \operatorname{cosech} x)^2 \} \\ &\quad \{ 16 \tanh x - 8 \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x - 24 \tanh x(\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x) \}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \operatorname{sech}^2 x \\
&\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \{192 + 8 \operatorname{sech}^2 x [-1 - 15 \tanh^2 x + 9 \operatorname{sech}^2 x] \\
&\quad (\sinh x + \operatorname{cosech} x)^2\} \\
&\quad \{-8 \tanh x - 8 \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x\}^{-2} \\
&= -2 \operatorname{sech}^2 x \\
&\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \cdot \\
&\quad \{192 + 8(-1 - 15 \tanh^2 x + 9 - 9 \tanh^2 x)(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)^2\} \\
&\quad \{64(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)^2\}^{-2} \\
&= -2 \operatorname{sech}^2 x \\
&\quad -10 \operatorname{sech}^2 x \{192 + 64(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)^2 - 192(\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x)^2\} \\
&\quad \{(\tanh x + \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x)^2\}^{-2} \\
&= -2 \operatorname{sech}^2 x - 10 \operatorname{sech}^2 x \\
&= -12 \operatorname{sech}^2 x \tag{4.4.62}
\end{aligned}$$

が得られる。(4.4.62) より, $u(x, 0)$ は $x = 0$ で 1 つの谷を持つことが分かる。図 4.4, 図 4.5 に解析解 (4.4.54) を示す。これらの図より 3 つのソリトンが 1 つに合体し, 分裂することが確かめられる。また 3 つのソリトンが充分離れているときには, その振幅がそれぞれ $-2, -8, -18$ となっていることも確かめられる。4.3 節では 2 ソリトン解について, 充分離れているときの個々のソリトンの振幅が $-2p_i^2$ となることを示したが, この事実は 3 ソリトン解についても成り立っていることが分かる。

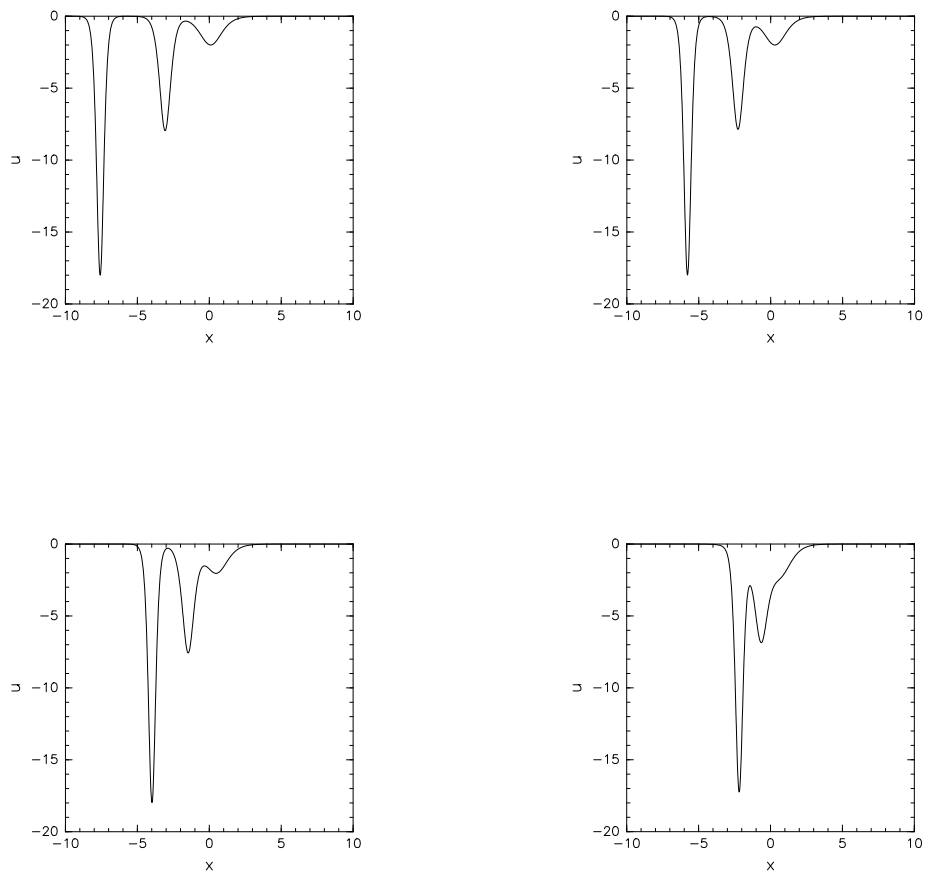


図 4.4: $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 0, \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ の場合のソリトンの伝播. 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = -0.20, -0.15, -0.10, -0.05$ の変位 $u(x, t)$ を表している.

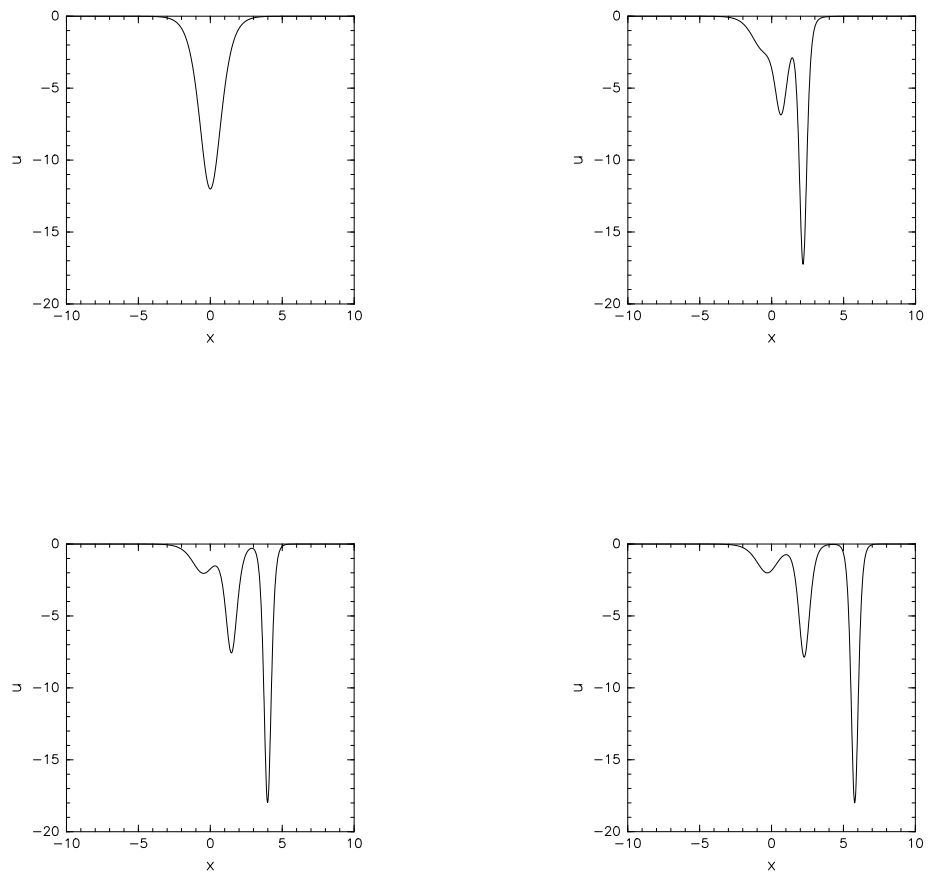


図 4.5: $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 0, \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ の場合のソリトンの伝播．左上，右上，左下，右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.05, 0.10, 0.15$ の変位 $u(x, t)$ を表している．

4.5 数値計算の結果とその考察

前節までで我々は1ソリトン解, 2ソリトン解, 3ソリトン解の厳密解を得て, ソリトンの諸性質を解析的に調べた. この節ではこれらのことを踏まえていくつかの数値計算の結果を考察する. まず, 数値解と厳密解との比較を行ない, 数値解がどの程度正しいのかを議論する, 次に, KdV 方程式を解析的に解くことが難しいケースなどについて, その数値解の考察を行なう.

初めに数値計算の各種設定について簡単に述べる. この節で示す全ての数値計算は, 地球流体電脳倶楽部の階層的地球流体力学スペクトルモデル集のサンプルプログラムを一部改変したものをを用いて行なった. 今回の計算では SPMODEL ライブラリを用い, 周期境界条件及びある適当な初期条件を与えて, それらの時間発展を計算した. 時間積分には leapfrog 法を用い, 格子点数は 256 または 512 とし, 切断波数は 42 とした.

数値解と解析解との比較の最初の例として 1ソリトン解を考える. 1ソリトン解 (4.2.9) で特に $p_1 = 1$, $\delta = 0$ の場合を考えると,

$$u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t) \quad (4.5.1)$$

となる. 4.2 節で見たように, (4.5.1) は一定の振幅 -2 , 一定の速さ 4 で一定の形を保ちながら右向きに進んでゆく. そこで初期条件

$$u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x \quad (4.5.2)$$

を与えて数値計算を行なった (図 4.6). 図 4.6 より初期条件 (4.5.2) を与えた場合の数値解は振幅 -2 , 速さ 4 の 1ソリトン解をきわめて正確に記述していることが分かる. 1ソリトンの厳密解を描いた図 4.1 と見比べても, ほとんど遜色が無いと言うことができるだろう.

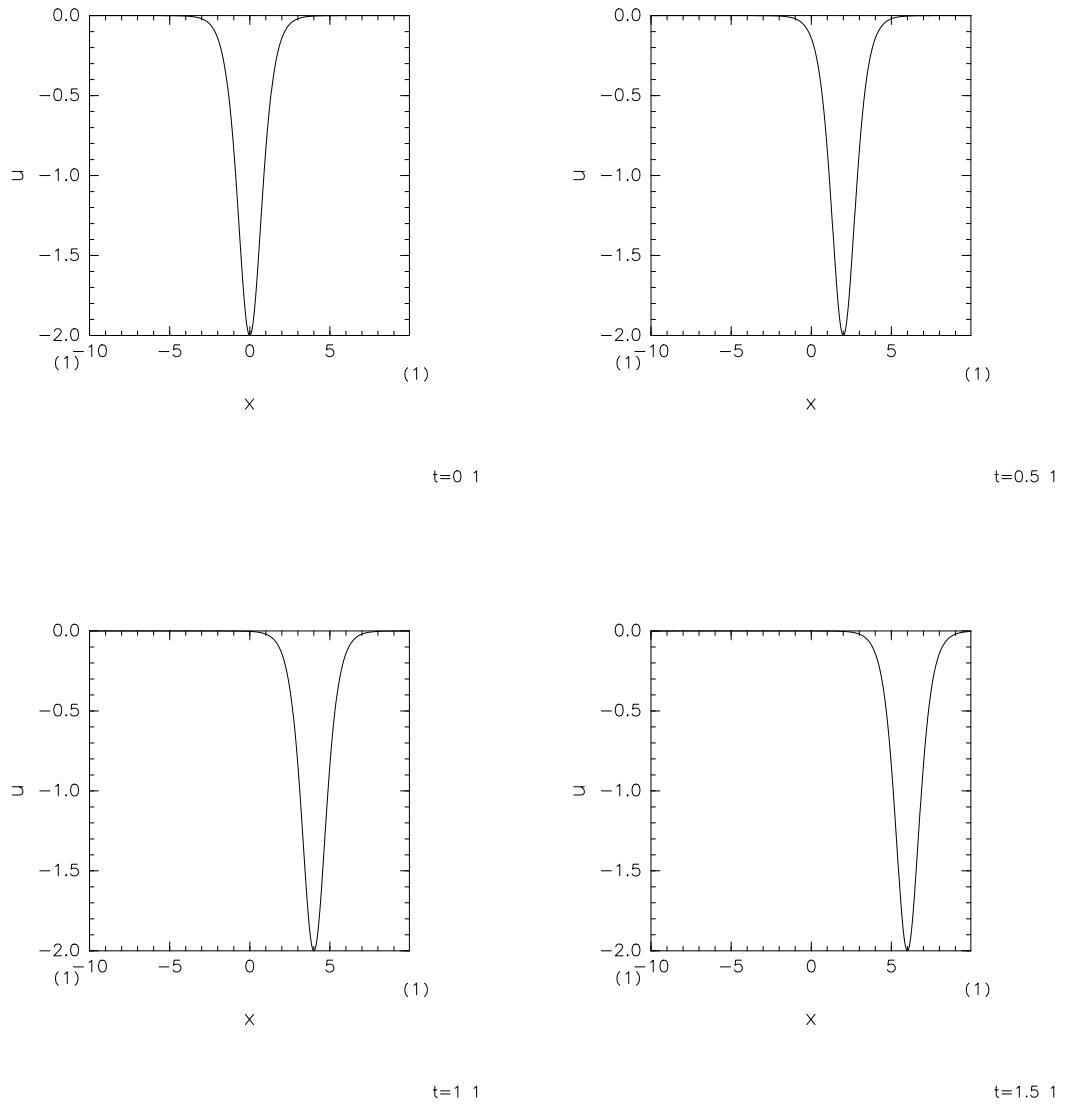


図 4.6: 初期条件 $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解．左上，右上，左下，右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.5, 1.0, 1.5$ の変位 $u(x, t)$ を表す．

次に2ソリトン解について考える．一般解(4.3.21)で $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ とすると ,

$$u(x, t) = -12 \frac{4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t) + 3}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \quad (4.5.3)$$

が得られることは既に見た．また(4.5.3)で $t = 0$ とすると ,

$$u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x \quad (4.5.4)$$

となることも4.3節の議論で確かめた．そこでこの場合は初期条件として $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の時間発展を計算した．その計算結果を図4.7に示す．2ソリトン解(4.5.3)を $t = 0$ の状態から見たときに , 振幅 -6 の谷が振幅 -2 の小さな(遅い)谷と振幅 -8 の大きな(速い)谷に分裂することを図4.3で見たが , 図4.7の数値解はそれらの特徴をかなり正確にとらえていることが見てとれる．

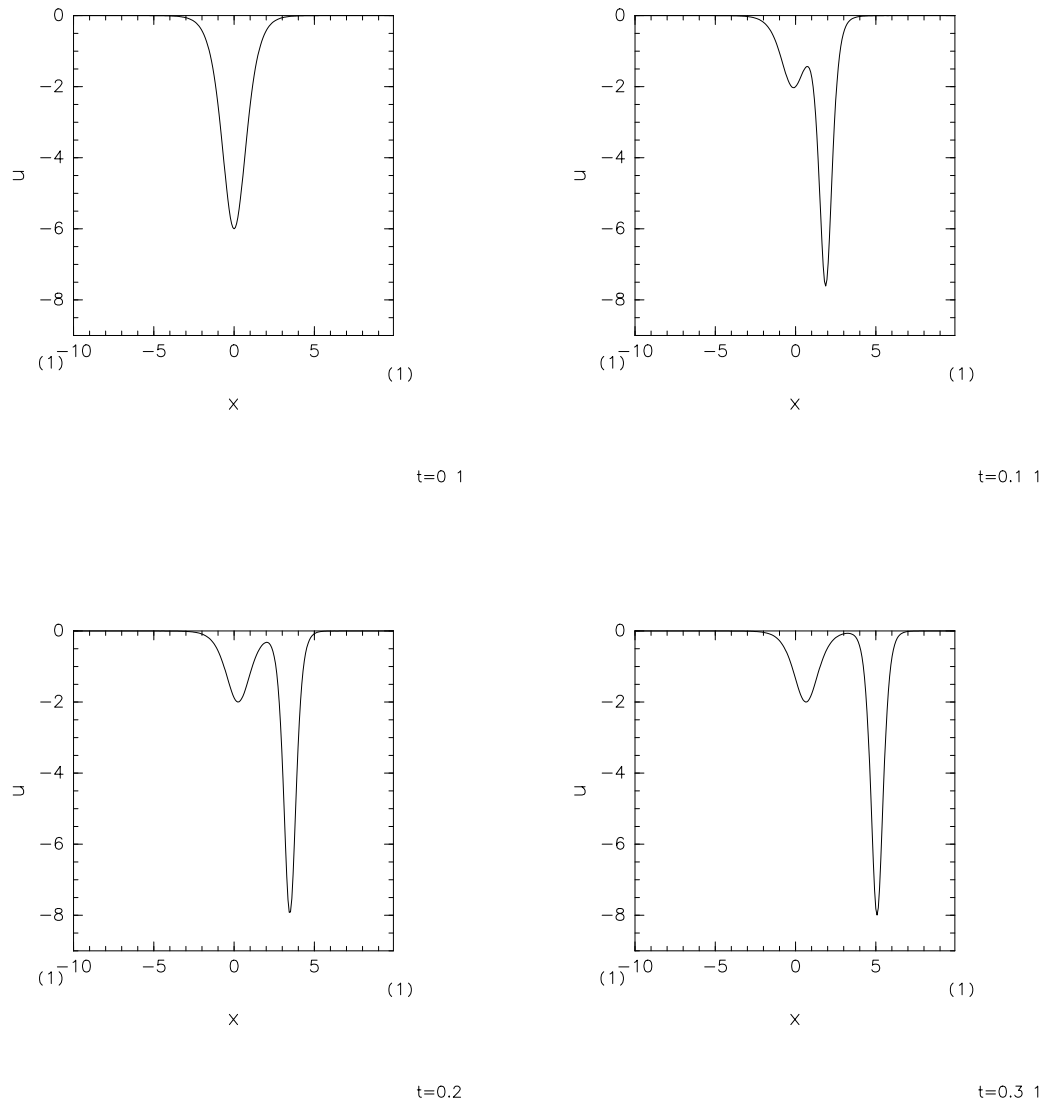


図 4.7: 初期条件 $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解. 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.10, 0.20, 0.30$ の変位 $u(x, t)$ を表す.

同様に3ソリトンについて考える．4.4節では $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ の場合に時刻 $t = 0$ で

$$u(x, 0) = -12 \operatorname{sech}^2 x \quad (4.5.5)$$

となることを示した．そこで，初期条件として $u(x, 0) = -12 \operatorname{sech}^2 x$ を与えると，数値解として図 4.8 が得られる． $t = 0.56$ の図には振幅 -18 の大きなソリトンと振幅 -2 の小さなソリトンが衝突している様子が描かれている．この場合は両者が完全に合体していることが図から見てとれる．一方， $t = 0.93$ の図は振幅 -18 の大きなソリトンと振幅 -8 の中間の大きさのソリトンとの衝突の様子が描かれている．このとき谷のピークは2つに割れていて，両者が完全に重なっていないことが分かる．これら2つの時刻でのソリトンの衝突に関する事実は4.3節で考察した2つのソリトンが完全に合体するための条件と整合的であるということが出来る．また，解析解(図 4.4, 図 4.5)と数値解(図 4.8)とで3つのソリトンの分裂の特徴が非常に良く一致していることも分かる．

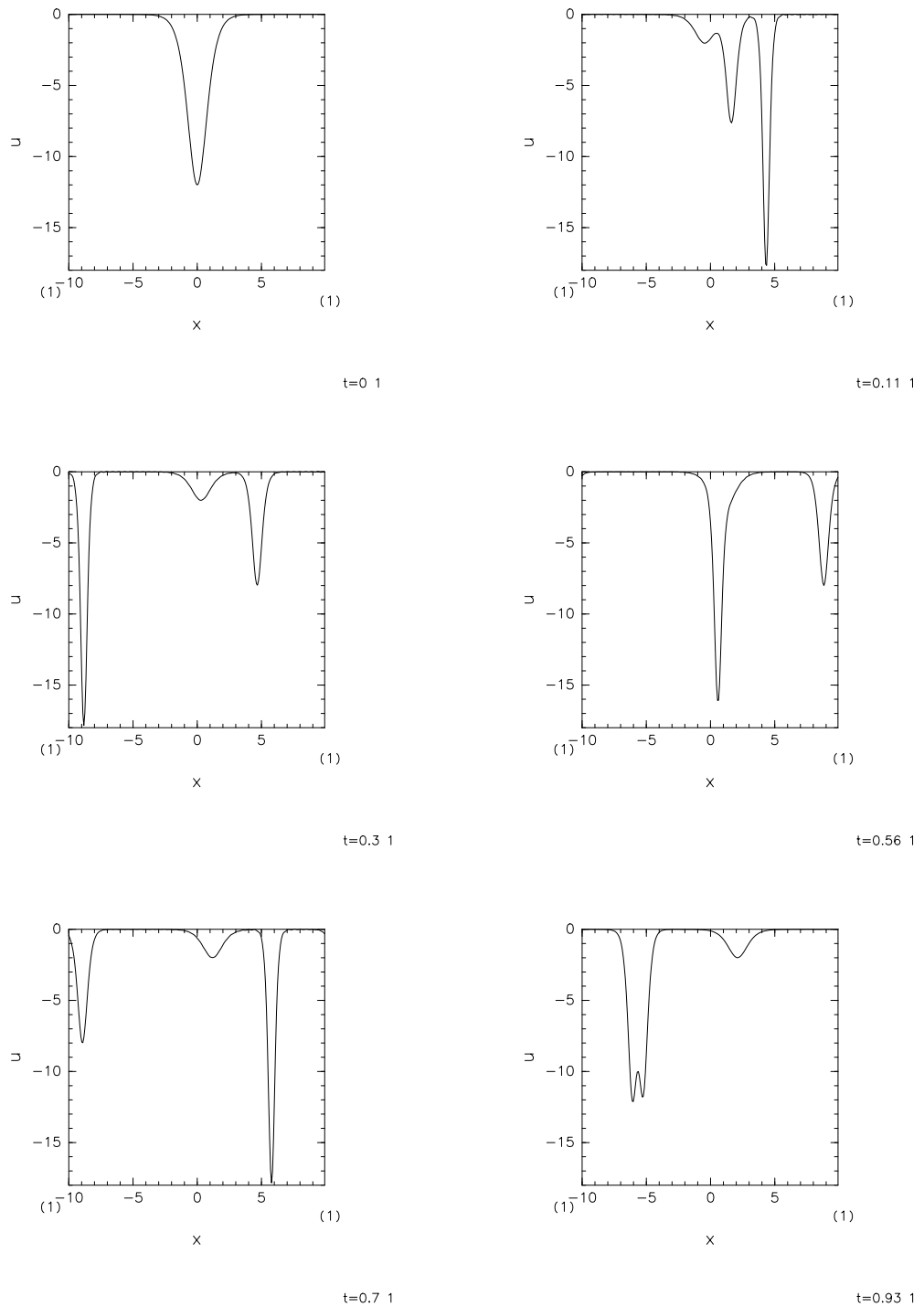


図 4.8: 初期条件 $u(x,0) = -12 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解．上段左，上段右，中段左，中段右，下段左，下段右の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.11, 0.30, 0.56, 0.70, 0.93$ の変位 $u(x,t)$ を表す．

以上の検証より，スペクトル法による数値解は充分信頼に足るものであることが分かった．そこで次は，さまざまな初期条件を与えて得られたいくつかの数値解を考察することとしよう．

2ソリトン解において，ソリトンが十分に離れている場合，変位 $u(x, t)$ が (4.3.29) や (4.3.30) のように2つのパルスの重ね合わせとして近似することが出来るということを4.3節で述べた．この近似が妥当なものであるのか，厳密解から導かれた初期値の時間発展と近似解から導かれた初期値の時間発展とを比較することによって検証する．

いま，2つのソリトンが初期においてある程度離れている状況を考えるために，(4.5.3)の時刻 $t = -0.4$ を初期時刻にとった場合について議論する．すなわち (4.5.3) で t を $t - 0.4$ と置き換えた場合，

$$u(x, t) = -12 \frac{4 \cosh(2x - 8t + 3.2) + \cosh(4x - 64t + 25.6) + 3}{[3 \cosh(x - 28t + 11.2) + \cosh(3x - 36t + 14.4)]^2} \quad (4.5.6)$$

について考える．(4.5.6) で $t = 0$ とすると，厳密解に基づいた初期条件

$$u(x, 0) = -12 \frac{4 \cosh(2x + 3.2) + \cosh(4x + 25.6) + 3}{[3 \cosh(x + 11.2) + \cosh(3x + 14.4)]^2} \quad (4.5.7)$$

を得る．初期条件 (4.5.7) のもとでの変位の時間発展の様子を描いたものが図 4.9 である．

次に近似解に対する初期条件を決定しよう．今の場合の変位は，時刻のずれに注意して，(4.3.29) より

$$u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t + 1.6 + \Delta) - 8 \operatorname{sech}^2(2x - 32t + 12.8 - \Delta) \quad (4.5.8)$$

と書ける．ここで Δ は (4.3.25) より $\tanh \Delta = 0.5$ を満たし， $\Delta \simeq 0.55$ と見積もられる．したがって，近似解に基づく初期条件として

$$u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x + 1.05) - 8 \operatorname{sech}^2(2x + 13.35) \quad (4.5.9)$$

が得られる．(4.5.9) を初期条件とする数値解を描いたものが図 4.10 である．

図 4.9 と図 4.10 の結果はほとんど一致しており，近似解として双曲線関数の2乗の重ね合わせの形で初期条件を与えても結果はほとんど変わらないことが分かる．しかも今の場合，2つのソリトンがあまり離れていない場合について考えたのであるが，それにもかかわらず両者の結果はほぼ一致している．このことから (4.3.29)，(4.3.30) の近似は極めて精度が良いということが分かる．

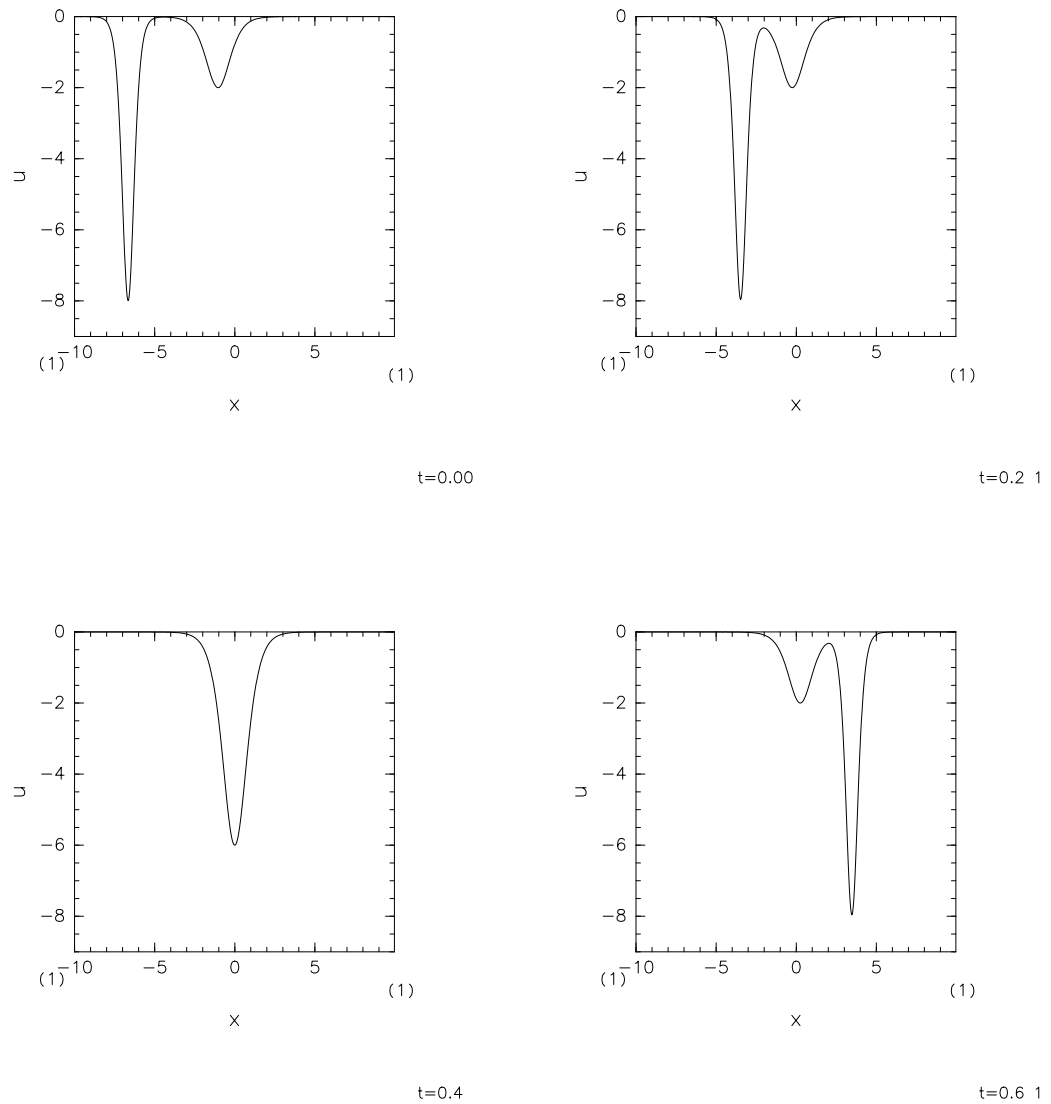


図 4.9: 厳密な初期条件 $u(x, 0) = -12 \frac{4 \cosh(2x+3.2) + \cosh(4x+25.6) + 3}{[3 \cosh(x+11.2) + \cosh(3x+14.4)]^2}$ を与えた場合の数値解. 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.20, 0.40, 0.60$ の変位 $u(x, t)$ を表す.

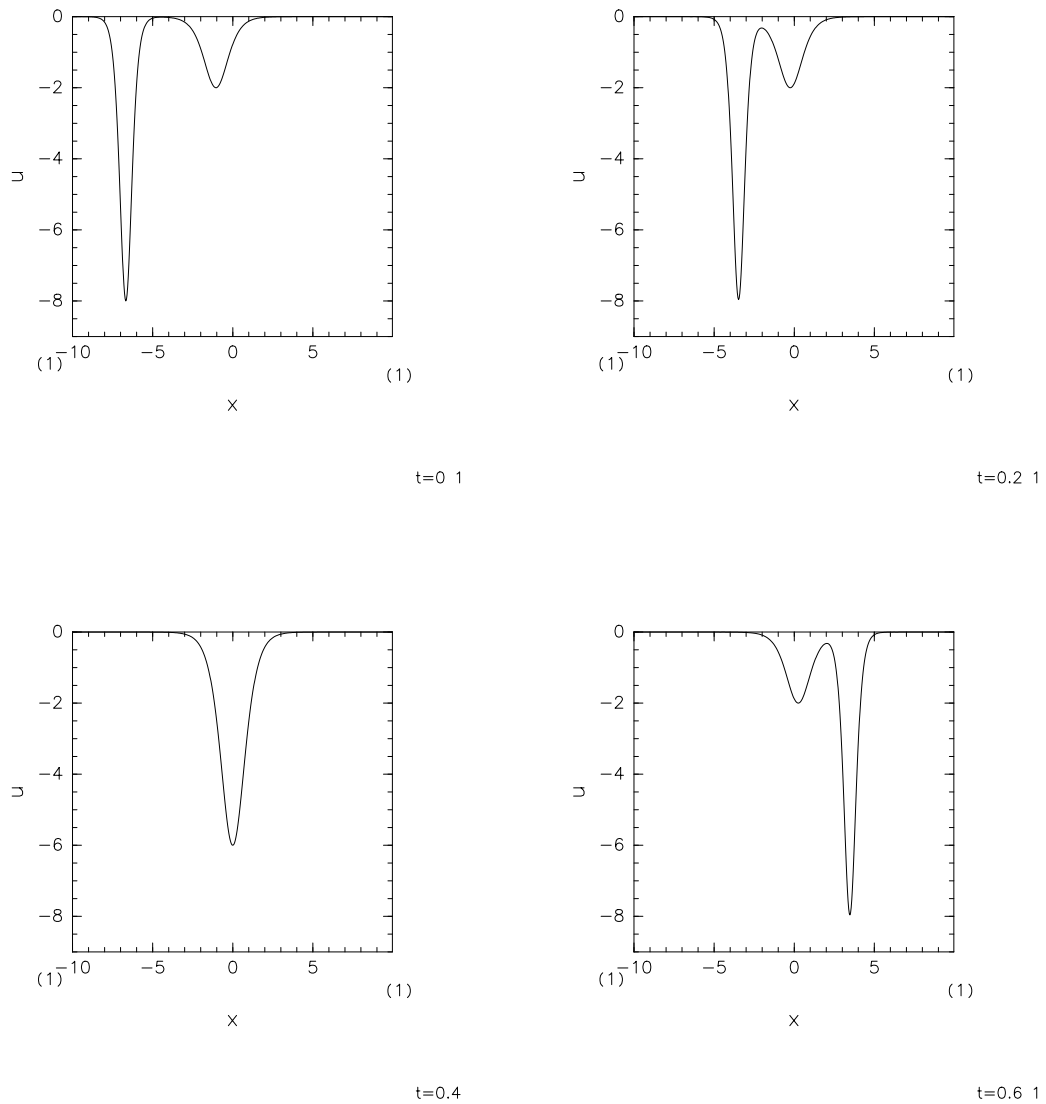


図 4.10: 近似解に基づいた初期条件 $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x + 1.05) - 8 \operatorname{sech}^2(2x + 13.35)$ を与えた場合の数値解. 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.20, 0.40, 0.60$ の変位 $u(x, t)$ を表す.

ここまで $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ や $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ のような $\operatorname{sech}^2 x$ の定数倍という初期値について考えてきた．そこで定数の値を少しずつ変えて，それらの時間発展を比較しよう．以下， $u(x, 0) = -4 \operatorname{sech}^2 x$ ， $u(x, 0) = -8 \operatorname{sech}^2 x$ ， $u(x, 0) = -10 \operatorname{sech}^2 x$ ， $u(x, 0) = -12 \operatorname{sech}^2 x$ という初期条件を与えた場合のそれぞれの数値計算結果を示す．

まず $u(x, 0) = -4 \operatorname{sech}^2 x$ の場合について考察する (図 4.11)．この場合も $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ のときと同様に 2 つの谷に分裂する．大きい方の谷は振幅，移動速度がほぼ一定であり，形状も保たれていることから，ソリトンであると考えられる．一方，小さな谷の方はソリトンであるのかどうかははっきりとは分からない．さらに注目すべきは $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ や $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ の場合には存在しなかったさざ波のような振動的な波列が見られることである．今まで考えてきたソリトン解は GLM 方程式を解く際に反射係数をゼロとみなして得られたものである．この数値解で現れた振動的な波列は反射係数がゼロではないことによって生ずる寄与であると考えられる．

次に $u(x, 0) = -8 \operatorname{sech}^2 x$ の場合の結果に注目する (図 4.12)．この場合も谷は少なくとも 2 つのソリトンに分裂していること，振動的な部分が存在することが確かめられる．この場合，ソリトンの振幅は $u(x, 0) = -4 \operatorname{sech}^2 x$ よりも大きくなる一方で，振動部分の振れ幅はほとんど変わらないので，振動部分のエネルギーはソリトンの持つエネルギーに比べて小さいとすることができる．

さらに $u(x, 0) = -10 \operatorname{sech}^2 x$ の場合を見ると，谷は 3 つに分裂しており，2 つの谷はソリトンの性質をそなえているように見えるが，もうひとつの小さな谷はソリトンであるのかどうか，あまり判然としない．この場合も振動部分が存在するが，ソリトンと比べるとやはり小さい．以上のことを踏まえると，初期の谷の振幅が大きくなるほど，振動部分の変位に対する寄与は小さくなっていくことが予想される．

これらの数値計算例のうち，純粋なソリトン解を記述するのは初期条件が $-2 \operatorname{sech}^2 x$ の場合， $-6 \operatorname{sech}^2 x$ の場合， $-12 \operatorname{sech}^2 x$ の場合であることが分かった．純粋なソリトン解となるときに係数に注目すると，ソリトンの数を n とした場合に $-n(n+1)$ という形になっていることが分かる．このことは一般的な N ソリトン解についても成立することが知られている．実際，散乱問題において $\operatorname{sech}^2 x$ に比例する無反射ポテンシャル $u(x)$ を考えると，その比例係数が $-n(n+1)$ という形になることが示される³．無反射ポテンシャルに対応しない初期条件を与えてもソリトンは出現するが，それに伴って微小振幅の振動部分も現れることになる．この振動部分は反射係数の寄与であると解釈される．反射係数がゼロでない場合の GLM 方程式を解くことは一般に難しく，解析解を陽に記述することは困難であると考えられる．

³この証明については付録 C 参照．

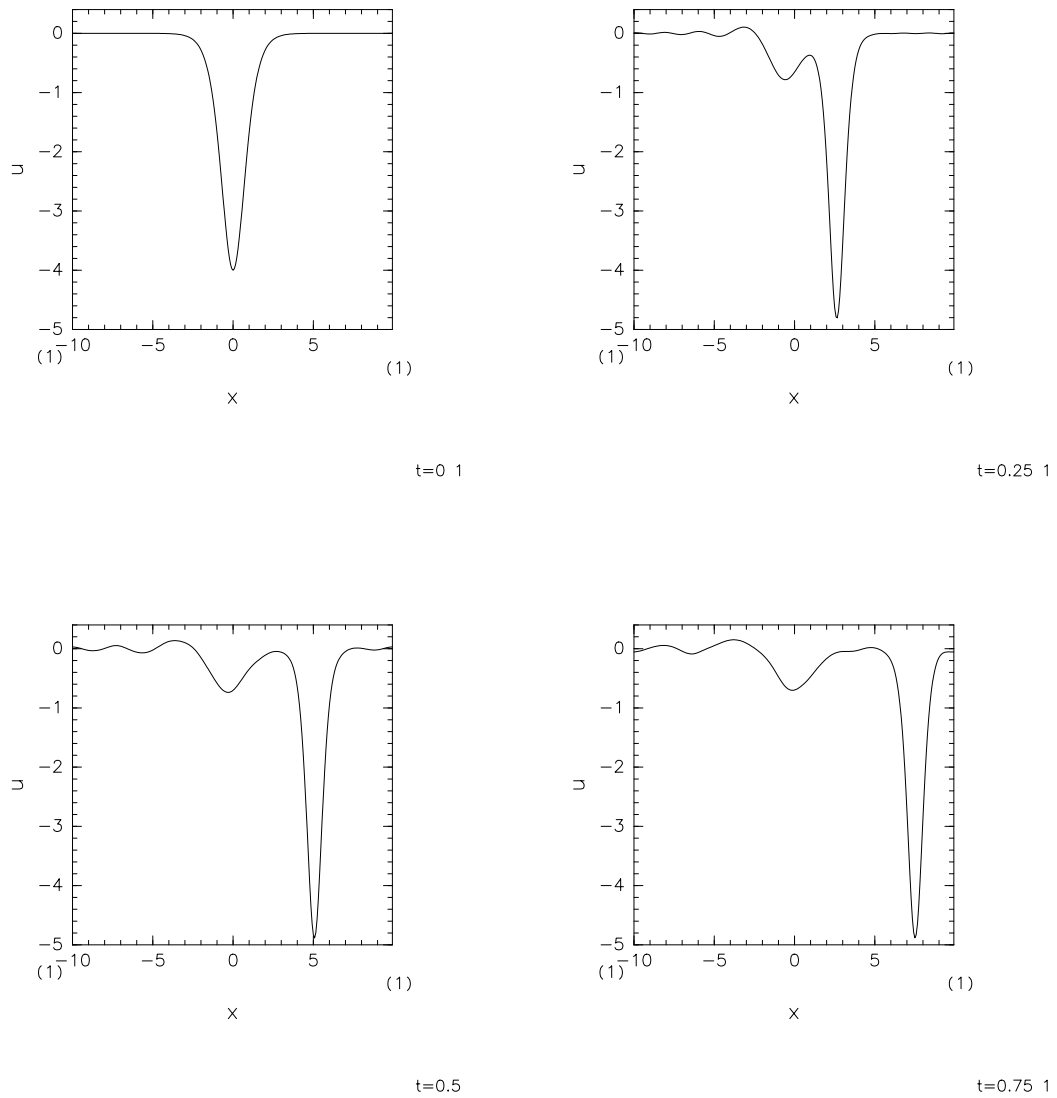


図 4.11: 初期条件 $u(x,0) = -4 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解 . 左上 , 右上 , 左下 , 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.25, 0.50, 0.75$ の変位 $u(x,t)$ を表す .

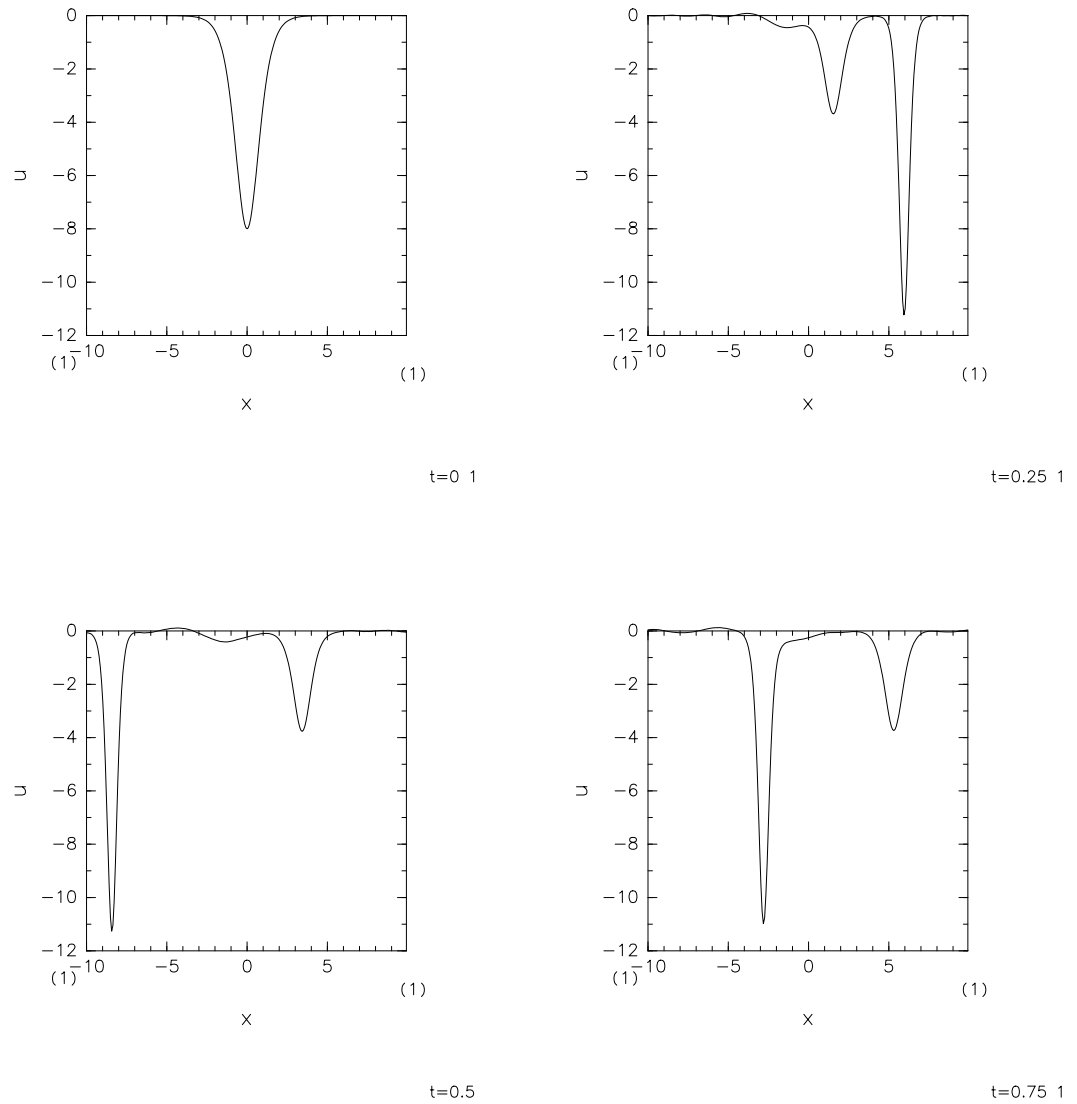


図 4.12: 初期条件 $u(x, 0) = -8 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解. 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.25, 0.50, 0.75$ の変位 $u(x, t)$ を表す.

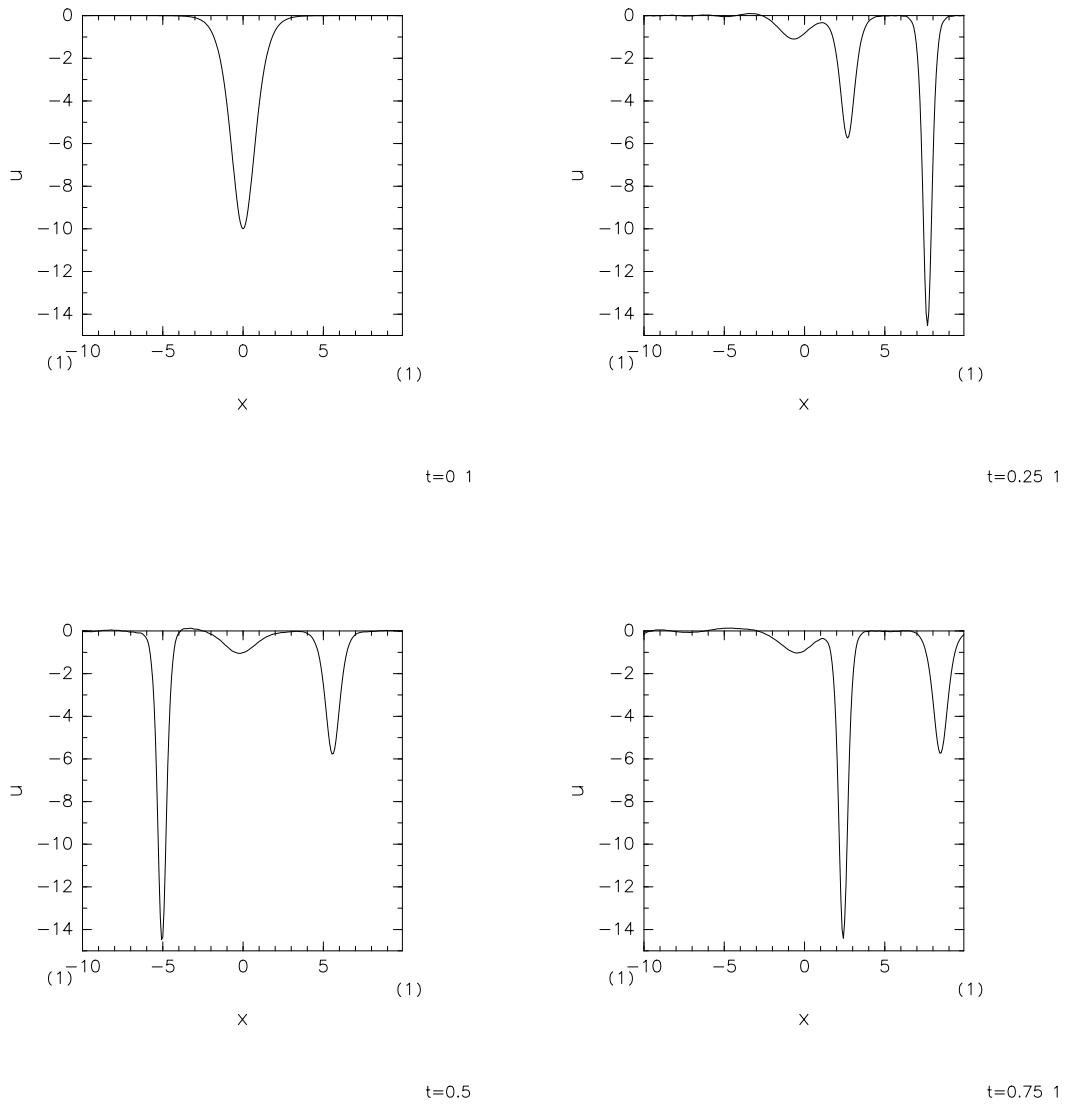


図 4.13: 初期条件 $u(x,0) = -10 \operatorname{sech}^2 x$ を与えた場合の数値解 . 左上 , 右上 , 左下 , 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.25, 0.50, 0.75$ の変位 $u(x,t)$ を表す .

以下、興味深い数値計算の例として、もう2つだけ取り上げることにしよう。1つは双曲線関数と良く形状の似た初期条件 $u(x, 0) = -\frac{2}{x^2+1}$ を与えた場合である (図 4.14)。形は純粋な1ソリトンを記述する初期条件 $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 x$ と非常に似ているが、この数値解は純粋なソリトン解とはならない。この場合もソリトンとそれに加えて微小な振動的波列が存在するという傾向はやはり変わらない。

もうひとつは初期条件 $u(x, 0) = -xe^{-x^2}$ を与えた場合である (図 4.15)。 x の負の方向へと広がってゆく孤立波の波列は Zabusky, Kruskal の数値実験を連想させる。ただしこれらの孤立波が本当にソリトンとしての性質をそなえているのかどうかは分からない。ともすれば振幅の大きさから見て、これらを全て単なる振動部分とみなす人もいるかもしれない。結論を見出すにはより精密な数値計算を要するだろう。

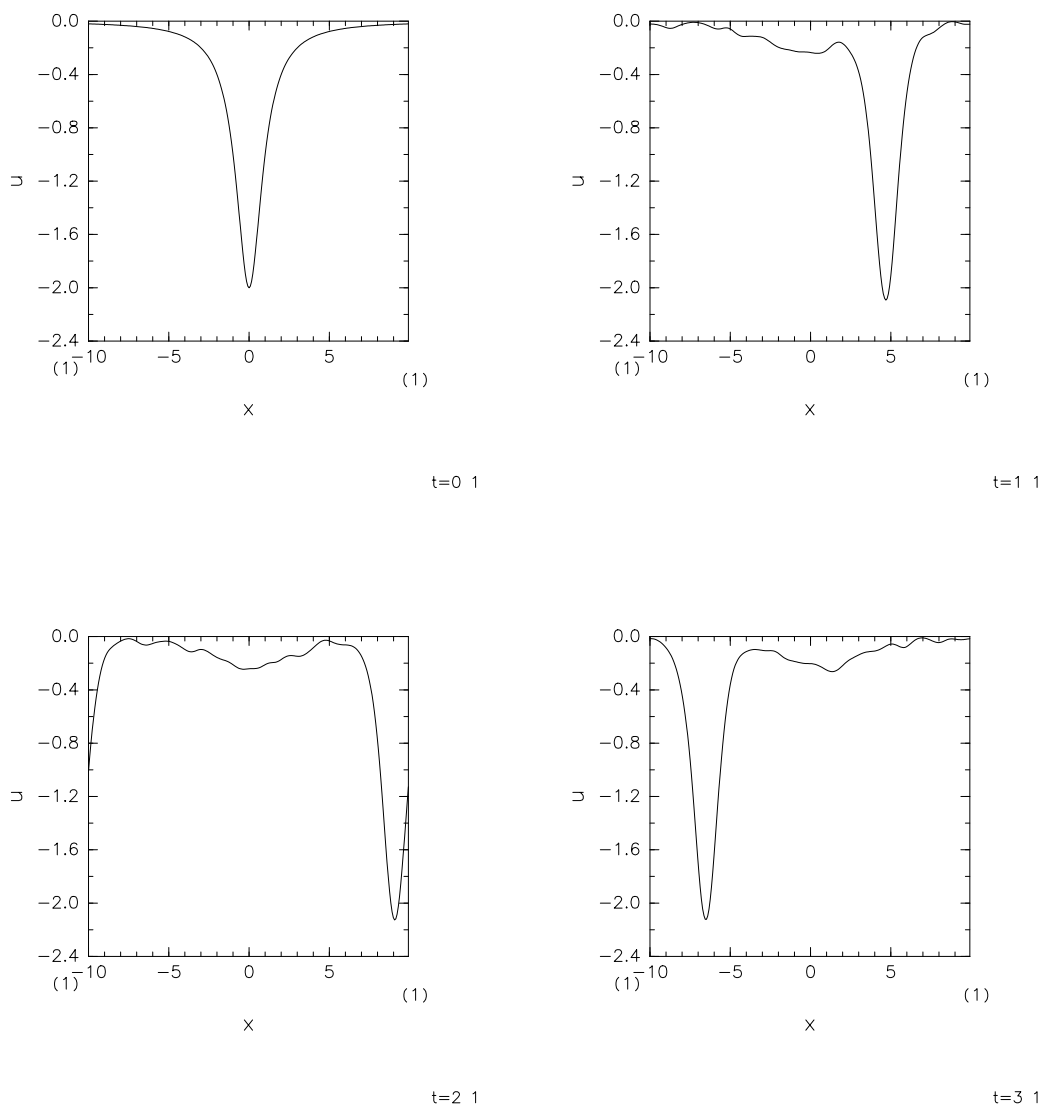


図 4.14: 初期条件 $u(x, 0) = -\frac{2}{x^2+1}$ を与えた場合の数値解. 左上, 右上, 左下, 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 1.0, 2.0, 3.0$ の変位 $u(x, t)$ を表す.

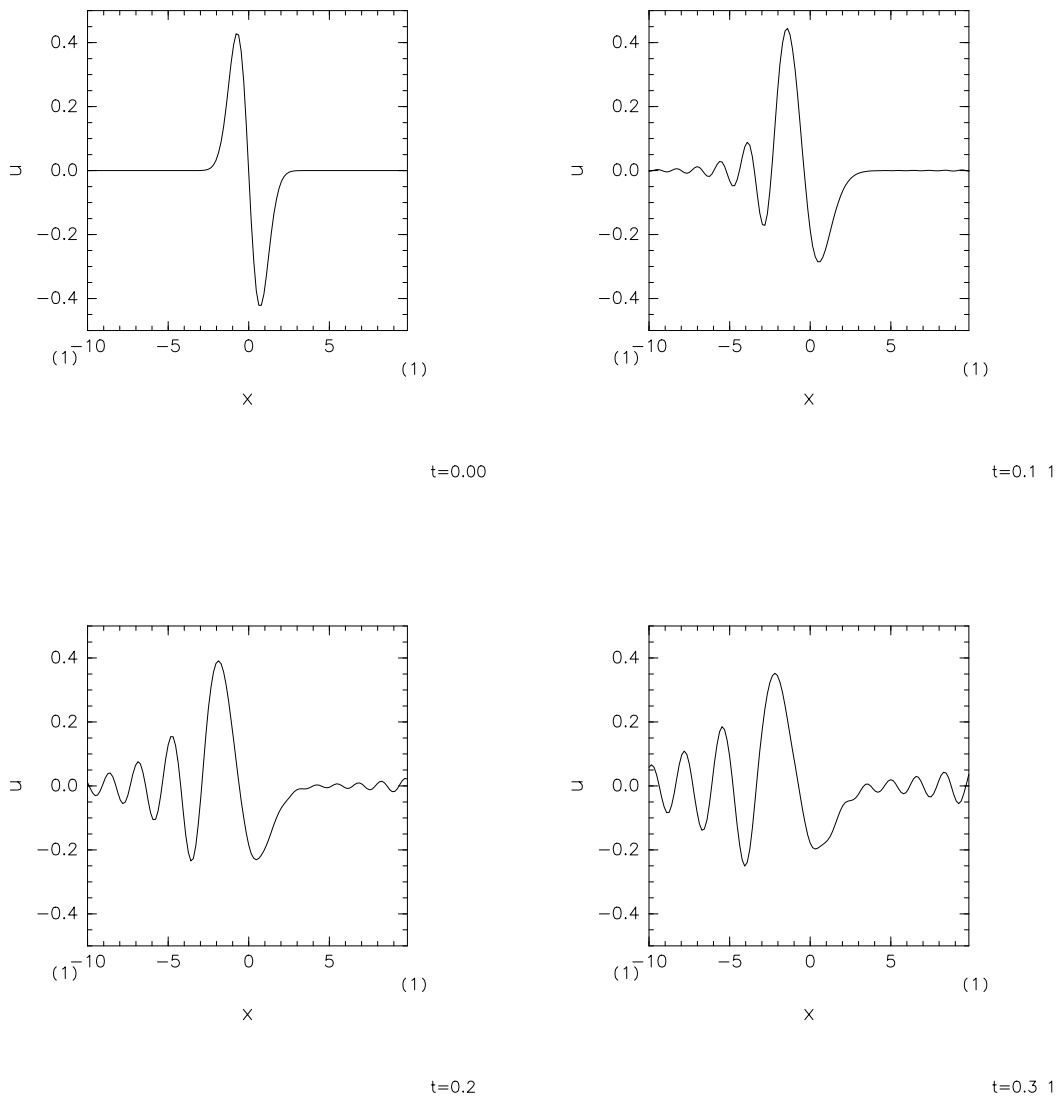


図 4.15: 初期条件 $u(x, 0) = -xe^{-x^2}$ を与えた場合の数値解 . 左上 , 右上 , 左下 , 右下の図はそれぞれ $t = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3$ の変位 $u(x, t)$ を表す .

第5章 まとめ

本論文では KdV 方程式の解法の 1 つである逆散乱法について考察し、具体的に 1 ソリトン解、2 ソリトン解、3 ソリトン解の解析解を求めた。またスペクトルモデルを用いて 1 ソリトン解、2 ソリトン解、3 ソリトン解の数値解を求め、解析解と数値解との比較を行なった。その結果、数値解は解析解とほとんど一致しており、充分信頼できるものであることが分かった。

また解析解および数値解からソリトンは以下のような特徴を持っていることが分かった。第一にソリトンが単独で存在する場合に、一定の形状、一定の速さを保ちながら伝播していく。第二に振幅が大きければ大きいほど、伝播の速さが大きくなる。第三にソリトンが衝突するとき、その前後で形は変わらないが、振幅の小さなソリトンは位相が遅れ、振幅の大きいソリトンは位相が進む。

さらに解析的に解くことの難しい場合について数値計算を行なったところ、やはりソリトンが出現することが分かった。この場合はソリトンに加えて、微小な振動部分も現れることが確かめられた。

付録 A 5階 KdV 方程式

2.1 節では Lax(1968) の方法に従い, 固有値 λ が t に依存しない一例として

$$y_t = (aD^3 + fD + g)y$$

と置いて KdV 方程式を導いた. ここではその他の例として, y_t を

$$y_t = By = (aD^5 + fD^3 + gD^2 + hD + \rho)y \quad (\text{A.1})$$

と置いたときにポテンシャル $u(x, t)$ が満たすべき方程式として

$$u_t + 30u^2u_x - 20u_xu_{xx} - 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (\text{A.2})$$

という形の式が得られることを示す. この方程式もまたソリトン解として持つことが知られており, 5階 KdV 方程式と呼ばれることがある¹.

2.1 節と同様の手順で計算を実行する. まず LB_y を計算すると,

$$\begin{aligned} LB_y &= (-D^2 + u)(aD^5 + fD^3 + gD^2 + hD + \rho)y \\ &= -D(aD^6 + f_xD^3 + fD^4 + g_xD^2 + gD^3 + h_xD + hD^2 + \rho_x + \rho D)y \\ &\quad + u(aD^5 + fD^3 + gD^2 + hD + \rho)y \\ &= -(aD^7 + f_{xx}D^3 + 2f_xD^4 + fD^5 + g_{xx}D^2 + 2g_xD^3 + gD^4 \\ &\quad + h_{xx}D + 2h_xD^2 + hD^3 + \rho_{xx} + 2\rho_xD + \rho D^2)y \\ &\quad + u(aD^5 + fD^3 + gD^2 + hD + \rho)y \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる. 一方, BL_y を計算すると,

$$\begin{aligned} BL_y &= (aD^5 + fD^3 + gD^2 + hD + \rho)(-D^2 + u)y \\ &= -aD^7y + a(u_{xxxxx} + 5u_{xxxx}D + 10u_{xxx}D^2 + 10u_{xx}D^3 + 5u_xD^4 + uD^5)y \\ &\quad - fD^5y + f(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2 + uD^3)y \\ &\quad - gD^4y + g(u_{xx} + 2u_xD + uD^2)y \\ &\quad - hD^3y + h(u_x + uD)y \\ &\quad - \rho D^2y + \rho uy \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

¹5階 KdV 方程式のソリトン解の求め方については Wazwaz (2006) を参照するとよい.

となる．したがって，(A.3)，(A.4) より，

$$\begin{aligned}
& LBy - BLy \\
&= -(aD^7 + f_{xx}D^3 + 2f_xD^4 + fD^5 + g_{xx}D^2 + 2g_xD^3 + gD^4 \\
&\quad + h_{xx}D + 2h_xD^2 + hD^3 + \rho_{xx} + 2\rho_xD + \rho D^2)y \\
&\quad + u(aD^5 + fD^3 + gD^2 + hD + \rho)y \\
&\quad + aD^7y - a(u_{xxxxx} + 5u_{xxxx}D + 10u_{xxx}D^2 + 10u_{xx}D^3 + 5u_xD^4 + uD^5)y \\
&\quad + fD^5y - f(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2 + uD^3)y \\
&\quad + gD^4y - g(u_{xx} + 2u_xD + uD^2)y \\
&\quad + hD^3y - h(u_x + uD)y \\
&\quad + \rho D^2y - \rho uy \\
&= -(f_{xx}D^3 + 2f_xD^4 + g_{xx}D^2 + 2g_xD^3 \\
&\quad + h_{xx}D + 2h_xD^2 + \rho_{xx} + 2\rho_xD)y \\
&\quad - a(u_{xxxxx} + 5u_{xxxx}D + 10u_{xxx}D^2 + 10u_{xx}D^3 + 5u_xD^4)y \\
&\quad - f(u_{xxx} + 3u_{xx}D + 3u_xD^2)y \\
&\quad - g(u_{xx} + 2u_xD)y - hu_xy \\
&= -(2f_x + 5au_x)D^4y - (f_{xx} + 2g_x + 10au_{xx})D^3y \\
&\quad - (g_{xx} + 2h_x + 10au_{xxx} + 3u_xf)D^2y \\
&\quad - (h_{xx} + 2\rho_x + 5au_{xxxx} + 3fu_{xx} + 2gu_x)Dy \\
&\quad - (\rho_{xx} + au_{xxxxx} + fu_{xxx} + gu_{xx} + hu_x)y \tag{A.5}
\end{aligned}$$

と表される．ここで D^4y ， D^3y ， D^2y ， Dy の係数がゼロになると仮定すると，

$$2f_x + 5au_x = 0, \tag{A.6}$$

$$f_{xx} + 2g_x + 10au_{xx} = 0, \tag{A.7}$$

$$g_{xx} + 2h_x + 10au_{xxx} + 3u_xf = 0, \tag{A.8}$$

$$h_{xx} + 2\rho_x + 5au_{xxxx} + 3fu_{xx} + 2gu_x = 0 \tag{A.9}$$

の4式が得られる．(A.6) を x について積分すると，

$$f = -\frac{5}{2}au \tag{A.10}$$

が得られる² . (A.7) を x について積分し , (A.10) を代入すると ,

$$\begin{aligned} g &= -\frac{1}{2}f_x - 5au_x \\ &= \frac{5}{4}au_x - 5au_x \\ &= -\frac{15}{4}au_x \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となる . 同様に (A.8) に (A.10) , (A.11) を代入し , x で積分すると ,

$$\begin{aligned} h_x &= -\frac{1}{2}f_{xx} - 5au_{xxx} - \frac{3}{2}u_x f \\ &= \frac{15}{8}au_{xxx} - 5au_{xxx} + \frac{15}{4}au_x u \\ &= -\frac{25}{8}au_{xxx} + \frac{15}{8}a \frac{\partial}{\partial x}(u^2) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

すなわち ,

$$h = -\frac{25}{8}au_{xx} + \frac{15}{8}au^2 \quad (\text{A.13})$$

が得られる . また , (A.5) より ρ については x の 2 次の偏導関数を求めればよいことが分かる . そこで , (A.9) を x について微分し , (A.10) , (A.11) , (A.12) を代入すると ,

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= -\frac{1}{2}[h_{xxx} + 5au_{xxxxx} + 3u_{xxx}f + 3u_{xx}f_x + 2u_{xx}g + 2u_x g_x] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{25}{8}au_{xxx} + \frac{15}{4}auu_x\right)_{xx} \right. \\ &\quad \left. + 5au_{xxxxx} - \frac{15}{2}auu_{xxx} - \frac{15}{2}au_x u_{xx} - \frac{15}{2}au_x u_{xx} - \frac{15}{2}au_x u_{xx}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[-\frac{25}{8}au_{xxxxx} + \frac{15}{4}a(3u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \right. \\ &\quad \left. + 5au_{xxxxx} - \frac{15}{2}auu_{xxx} - \frac{45}{2}au_x u_{xx}\right] \\ &= -\frac{15}{16}au_{xxxxx} + \frac{45}{8}au_x u_{xx} + \frac{15}{8}auu_{xxx} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

²実際には (A.6) を積分すると t の任意関数が現れるはずであるが , 2.1 節で見たようにこの t の任意関数は適当な変数変換によって消去することができる . したがってここでは積分定数がゼロであるとみなした . (A.7) , (A.8) を積分する場合についても , 同様の理由で積分定数をゼロとみなした .

となる．以上で求めた (A.10), (A.11), (A.12), (A.14) を (A.5) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & LBy - BLy \\
 &= -(\rho_{xx} + au_{xxxxx} + fu_{xxx} + gu_{xx} + hu_x)y \\
 &= -\left[\left(-\frac{15}{16}au_{xxxxx} + \frac{45}{8}au_xu_{xx} + \frac{15}{8}auu_{xxx} \right) \right. \\
 &\quad \left. + au_{xxxxx} - \frac{5}{2}auu_{xxx} - \frac{15}{4}au_xu_{xx} + \left(-\frac{25}{8}au_{xx} + \frac{15}{8}au^2 \right) u_x \right] y \\
 &= -\frac{1}{16}au_{xxxxx} + \frac{5}{8}auu_{xxx} + \frac{5}{4}au_xu_{xx} - \frac{15}{8}au^2u_x \\
 &= -\frac{1}{16}a(u_{xxxxx} - 10uu_{xxx} - 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x) \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

が得られる．ここで, $a = -16$ の場合を考えると, $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ となるための条件 (2.1.12) は

$$u_t + 30u^2u_x - 20u_xu_{xx} - 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \tag{A.16}$$

となり, 5階の KdV 方程式が得られた．

一般に奇数次の線形演算子 B を考えることによって, u に関する方程式を無数に構成することができることが知られている．

付録 B (2.2.17), (2.2.21) の積分の $\text{Im } k > 0$ での収束性

本付録では (2.2.17), (2.2.21) の方程式の中の積分が $\text{Im } k > 0$ のときに収束することを示す。

まず $f_1(x, k)$ に関する積分の収束性について議論する。(2.2.17) のような Volterra の第 2 種積分方程式の解を見出す方法の 1 つとして、逐次近似法(successive iteration) がある。いま (2.2.17) において $f_1(x, k)$ が形式的に

$$f_1(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1^n(x, k) \quad (\text{B.1})$$

と級数展開できるとみなす。このとき $f_1(x, k)$ は

$$\begin{aligned} f_1(x, k) &= e^{ikx} - \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-x') u(x') f_1(x', k) dx' \\ &= e^{ikx} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-x') u(x') f_1^n(x', k) dx' \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と表せる。(B.2) で

$$f_1^0(x, k) = e^{ikx}, \quad (\text{B.3})$$

$$f_1^{n+1}(x, k) = -\frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-x') u(x') f_1^n(x', k) dx' \quad (n \text{ は自然数}) \quad (\text{B.4})$$

とみなすと、級数展開の各項は逐一積分を実行することによって決定することができ、原理的には $f_1(x, k)$ を求めることができる。ここで

$$M_1^{n+1}(x, k) \equiv e^{-ikx} f_1^{n+1}(x, k) \quad (\text{B.5})$$

と置くと、(B.4) は

$$\begin{aligned} M_1^{n+1}(x, k) &= -e^{-ikx} \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x-x') u(x') e^{ikx'} M_1^n(x', k) dx' \\ &= -\int_x^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}}{2ki} u(x') e^{ik(x'-x)} M_1^n(x', k) dx' \\ &= \int_x^{\infty} \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2ki} u(x') M_1^n(x', k) dx' \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

となる．(B.6) の絶対値をとると，

$$\begin{aligned} |M_1^{n+1}(x, k)| &= \left| \int_x^\infty \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2ki} u(x') M_1^n(x', k) dx' \right| \\ &\leq \int_x^\infty \left| \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2ki} u(x') M_1^n(x', k) \right| dx' \\ &= \int_x^\infty \frac{1}{|k|} \left| \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2} \right| |u(x')| |M_1^n(x', k)| dx' \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

が成り立つ．ここで $k = \text{Re } k + i \text{Im } k$ と表すと，

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2} \right| &= \frac{1}{2} |e^{2i(x'-x)(\text{Re } k + i \text{Im } k)} - 1| \\ &= \frac{1}{2} |e^{2i(x'-x)\text{Re } k} \cdot e^{-2(x'-x)\text{Im } k} - 1| \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

と書ける．一般に正の実数 α ，任意の実数 θ に対して恒等式

$$|e^{i\theta}\alpha - 1| \leq 1 + \alpha \quad (\text{B.9})$$

が成立することに注目すると，(B.8) は

$$\left| \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (1 + e^{-2(x'-x)\text{Im } k}) \quad (\text{B.10})$$

となる．ここで条件 $\text{Im } k > 0$ を考慮すると， $x \leq x' < \infty$ であるので，

$$0 < e^{-2(x'-x)\text{Im } k} \leq 1 \quad (\text{B.11})$$

が成り立つ．したがって

$$\left| \frac{e^{2ik(x'-x)} - 1}{2} \right| \leq 1 \quad (\text{B.12})$$

が得られる．(B.12) を (B.7) に適用すると，

$$|M_1^{n+1}(x, k)| \leq \int_x^\infty \frac{1}{|k|} |u(x')| |M_1^n(x', k)| dx' \quad (\text{B.13})$$

となる．

ここで

$$U(x) \equiv \int_x^\infty |u(x')| dx' \quad (\text{B.14})$$

という関数を導入する．このとき

$$|M_1^n(x, k)| \leq \frac{[U(x)]^n}{|k|^n n!} \quad (\text{B.15})$$

が成立することを数学的帰納法によって証明しよう．まず $n = 0$ の場合を考えると， $M_1^0 = e^{-ikx} \cdot f_1^0 = 1$ ， $\frac{[U(x)]^0}{|k|^{0 \cdot 0}!} = 1$ となり (B.15) は成立する．次に $n = j$ の場合に (B.15) は成立すると仮定し， $n = j + 1$ の場合について考える．このとき (B.13) を用いると

$$\begin{aligned} |M_1^{j+1}(x, k)| &\leq \int_x^\infty \frac{1}{|k|} |u(x')| |M_1^j(x', k)| dx' \\ &= \int_x^\infty |u(x')| \frac{[U(x')]^j}{|k|^{j+1} j!} dx' \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

となる．(B.16) において

$$s = U(x') \quad (\text{B.17})$$

と変数変換すると，

$$ds = \frac{dU}{dx'} dx' = -u(x') dx' \quad (\text{B.18})$$

となり積分区間は $[U(x), U(\infty)] = [U(x), 0]$ となるので，

$$\begin{aligned} |M_1^{j+1}(x, k)| &\leq \frac{1}{|k|^{j+1} j!} \int_{U(x)}^0 |u(x')| s^j \left(-\frac{ds}{|u(x')|} \right) \\ &= \frac{1}{|k|^{j+1} j!} \int_0^{U(x)} s^j ds \\ &= \frac{1}{|k|^{j+1} j!} \cdot \frac{1}{j+1} [U(x)]^{j+1} \\ &= \frac{[U(x)]^{j+1}}{|k|^{j+1} (j+1)!} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

が得られる．したがって， $n \geq 2$ の場合についても (B.15) が成り立つことが示された．

(B.2) に (B.5)，(B.15) を適用し，絶対値をとると，

$$\begin{aligned} |f_1(x, k) - e^{ikx}| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{ikx} M_1^n(x, k) \right| \\ &= |e^{ix(\text{Re } k + i \text{Im } k)}| \left| \sum_{n=1}^{\infty} M_1^n(x, k) \right| \\ &\leq e^{-x \text{Im } k} \sum_{n=1}^{\infty} |M_1^n(x, k)| \\ &\leq e^{-x \text{Im } k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|U(x)|^n}{|k|^n n!} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

となる．ここで

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{B.21})$$

となることに注意すると，

$$|f_1(x, k) - e^{ikx}| \leq e^{-x \text{Im } k} \cdot \left| e^{\frac{U(x)}{|k|}} - 1 \right| \quad (\text{B.22})$$

が得られる．(B.22) の左辺に (2.2.17) を適用すると，

$$\left| \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(x - x') u(x') f_1(x', k) dx' \right| \leq e^{-x \text{Im } k} \cdot \left| e^{\frac{U(x)}{|k|}} - 1 \right| \quad (\text{B.23})$$

となる．(B.23) の右辺は任意の x に対して発散することはないので， $\text{Im } k > 0$ という条件のもとで (2.2.17) の積分が有限値となることが示された．(2.2.21) の積分の収束性についても同様の手順によって示すことができる．

付録 C sech^2 型の無反射ポテンシャル

4.5 節で, $u(x, 0) = -\alpha \operatorname{sech}^2 x$ という初期条件を与えた場合に, 振動部分が存在せずに n 個のソリトンのみが現れるための条件は $\alpha = n(n+1)$ であると述べた. 本付録では散乱問題を解いてこの条件を導く. 4.5 節で言及したように, 純粋なソリトン解は反射係数がゼロの場合のポテンシャルに対応する. したがって, Sturm-Liouville 方程式

$$y_{xx} + [k^2 + \alpha \operatorname{sech}^2 x]y(x) = 0 \quad (\text{C.1})$$

を $y(x)$ について解き, 反射が起こらない条件を求めればよい. (C.1) で

$$\beta = -ik, \quad (\text{C.2})$$

$$y(x) = A \operatorname{sech}^\beta x \cdot Y(x) \quad (\text{A は任意定数}) \quad (\text{C.3})$$

とすると,

$$\begin{aligned} y_x &= A\beta \operatorname{sech}^{\beta-1} x \frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) \cdot Y(x) + A \operatorname{sech}^\beta x \cdot \frac{dY(x)}{dx} \\ &= A\beta \operatorname{sech}^{\beta-1} x \left[-\frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \right] \cdot Y(x) + A \operatorname{sech}^\beta x \cdot \frac{dY(x)}{dx} \\ &= -A\beta \operatorname{sech}^\beta x \tanh x \cdot Y(x) + A \operatorname{sech}^\beta x \cdot \frac{dY(x)}{dx} \\ &= A \operatorname{sech}^\beta x \left(\frac{dY(x)}{dx} - \beta \tanh x \cdot Y(x) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} y_{xx} &= A\beta \operatorname{sech}^{\beta-1} x \cdot \operatorname{sech} x \tanh x \left(\frac{dY(x)}{dx} - \beta \tanh x \cdot Y(x) \right) \\ &\quad + A\beta \operatorname{sech}^\beta x \left(\frac{d^2Y(x)}{dx^2} - \beta \operatorname{sech}^2 x \cdot Y(x) - \beta \tanh x \frac{dY(x)}{dx} \right) \\ &= A \operatorname{sech}^\beta x \left[\frac{d^2Y(x)}{dx^2} - 2\beta \tanh x \frac{dY(x)}{dx} + (\beta^2 \tanh^2 x + \beta \operatorname{sech}^2 x - \beta)Y \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

となる．したがって，(C.1)は

$$\begin{aligned}
 & y_{xx} + [k^2 + \alpha \operatorname{sech}^2 x]y(x) \\
 &= A \operatorname{sech}^\beta x \left[\frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - 2\beta \tanh x \frac{dY}{dx} + (\beta^2 \tanh^2 x + \beta \tanh^2 x - \beta)Y \right] \\
 & \quad + [-\beta^2 + \alpha \operatorname{sech}^2 x]A \operatorname{sech}^\beta x \cdot Y(x) \\
 &= A \operatorname{sech}^\beta x \left\{ \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - 2\beta \tanh x \frac{dY}{dx} \right. \\
 & \quad \left. + [\beta^2(\tanh^2 x - 1) + \beta(\tanh^2 x - 1) + \alpha \operatorname{sech}^2 x] \right\} \\
 &= A \operatorname{sech}^\beta x [Y_{xx} - 2\beta \tanh x \cdot Y_x + (\alpha - \beta^2 - \beta) \operatorname{sech}^2 x] \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

すなわち

$$Y_{xx} - 2\beta \tanh x \cdot Y_x + (\alpha - \beta^2 - \beta) \operatorname{sech}^2 x \cdot Y = 0 \quad (\text{C.6})$$

となる．更に(C.6)で

$$w = \frac{1 - \tanh x}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{C.7})$$

なる変数変換を行なうと，

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dx} &= \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dY}{dw} \\
 &= \left[-\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \right] \cdot \frac{dY}{dw} \\
 &= -\frac{e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} [e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}] \cdot \frac{dY}{dw} \\
 &= -\frac{2}{(e^x + e^{-x})^2} \cdot \frac{dY}{dw} \\
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 x \cdot \frac{dY}{dw},
 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 Y}{dx^2} &= -\frac{1}{2} \frac{d \operatorname{sech}^2 x}{dx} \frac{dY}{dw} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 x \frac{dw}{du} \frac{d^2 Y}{dw^2} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(-8 \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3} \right) \frac{dY}{dw} + \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 x \frac{d^2 Y}{dw^2} \\
 &= -\frac{1}{2} (-2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x) \frac{dY}{dw} + \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 x \frac{d^2 Y}{dw^2} \\
 &= \operatorname{sech}^2 x \tanh x \frac{dY}{dw} + \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 x \frac{d^2 Y}{dw^2}
 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

となる．したがって (C.6) は

$$\begin{aligned}
 & Y_{xx} - 2\beta \tanh x \cdot Y_x + (\alpha - \beta^2 - \beta) \text{sech}^2 x \cdot Y \\
 &= \text{sech}^2 x \tanh x \cdot Y_w + \frac{1}{4} \text{sech}^4 x \cdot Y_{ww} - 2\beta \tanh x \cdot \left(-\frac{1}{2} \text{sech}^2 x \cdot \frac{dY}{dw} \right) \\
 &\quad + (\alpha - \beta^2 - \beta) \text{sech}^2 x \cdot Y \\
 &= \text{sech}^2 x \cdot \left[\frac{1}{4} \text{sech}^2 \cdot Y_{ww} + (1 + \beta) \tanh x \cdot Y_w + (\alpha - \beta^2 - \beta) \cdot Y \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

と書き換えられる．いま (C.7) より

$$\begin{aligned}
 \text{sech}^2 x &= 1 - \tanh^2 x \\
 &= 1 - (1 - 2w)^2 \\
 &= 4w - 4w^2 \\
 &= 4w(1 - w)
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

となるので，(C.10) は

$$w(1 - w)Y_{ww} + [(1 + \beta)(1 - 2w)]Y_w + (\alpha - \beta^2 - \beta) \cdot Y = 0 \tag{C.12}$$

と書き換えられる．ここで

$$c \equiv 1 + \beta, \tag{C.13}$$

$$a + b + 1 \equiv 2(1 + \beta), \tag{C.14}$$

$$ab \equiv \beta^2 + \beta - \alpha \tag{C.15}$$

と置くと，(C.12) は

$$w(1 - w)Y_{ww} + [c - (a + b + 1)w]Y_w - abY = 0 \tag{C.16}$$

となる．(C.16) は超幾何微分方程式(hypergeometric differential equation)と呼ばれる．(C.16) は 2 階の線形常微分方程式であるので，2 つの独立な基本解を持つ．そのうちの 1 つは $w = 0$ のまわりでの級数展開として

$$\begin{aligned}
 Y &\equiv F(a, b, c, w) \\
 &= 1 + \frac{ab}{c}w + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{w^2}{2!} + \dots \\
 &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{w^n}{n!}
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

と与えられる^{3,4} . ここで $\Gamma(a)$ はガンマ関数(Gamma function) と呼ばれる関数で ,

$$\Gamma(a) \equiv \int_0^{\infty} e^{-z} z^{a-1} dz \quad (\text{C.18})$$

と定義される⁵ . (C.17) でガンマ関数についての関係式

$$\Gamma(a) = a\Gamma(a-1) \quad (\text{C.19})$$

を用いた . 基本解 (C.16) で $w \rightarrow 0$ の極限を考えると , $F(a, b, c, w) \rightarrow 1$ となる . また , (C.7) より $w = 1/(e^{2x} + 1)$ となるので , $w \rightarrow 0$ のとき $x \rightarrow \infty$ となる . このとき $\operatorname{sech} x = 2/(e^x + e^{-x}) \simeq 2e^{-x}$ と近似できるので , (C.20) , (C.3) より $F(a, b, c, w)$ に比例する解 $y(x)$ は $x \rightarrow \infty$ の極限で

$$\begin{aligned} y(x) &= A \operatorname{sech}^{\beta} x \cdot Y(x) \\ &\rightarrow A \cdot \left(\frac{2}{e^x}\right)^{\beta} \cdot 1 \\ &= A \cdot 2^{\beta} \cdot e^{-\beta x} \\ &= A \cdot 2^{\beta} \cdot e^{ikx} \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

となる . 次に $w \rightarrow 1$, すなわち $x \rightarrow -\infty$ なる極限を考える . (C.17) は $F(a, b, c, w)$ を $w = 0$ の周りでの級数展開として表現したものであり , $w \rightarrow 1$ の極限を考える上であまり便利な表現であるとは言えない . そこで $F(a, b, c, w)$ を $w = 1$ の周りで展開された 2 つの解の線形結合で表現する . この場合 $F(a, b, c, w)$ は

$$\begin{aligned} F(a, b, c, w) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b-c+1, 1-w) \\ &\quad + (1-w^{c-a-b}) \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-w) \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

³基本解の 1 つが (C.17) のように書けることの証明については西本 (1998) などを参照されたい .

⁴(C.17) に対するもう 1 つの基本解は

$$Y = w^{1-c} \cdot F(1+a-c, 1+b-c, 2-c, w)$$

と書けることが知られている . この証明についても西本 (1998) などを参照されたい .

⁵2.2 節で現れた透過係数 $T(k)$ に関する Fourier 変換 $\Gamma(z)$ とは異なるものなので注意されたい .

と表される⁶ . $x \rightarrow -\infty$ の極限において

$$\begin{aligned}
 (1-w)^{c-a-b} &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^{1+\beta-2(1+\beta)+1} \\
 &= \left(\frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\right)^{-\beta} \\
 &= \left(\frac{1}{1 + e^{-2x}}\right)^{-\beta} \\
 &\simeq \left(\frac{1}{e^{-2x}}\right)^{-\beta} \\
 &= e^{-2\beta x}
 \end{aligned} \tag{C.22}$$

と近似できる . また (C.17) より

$$F(a, b, a + b - c + 1, 1 - w) \rightarrow 1 \quad (w \rightarrow 1), \tag{C.23}$$

$$F(c - a, c - b, a + b - c + 1, 1 - w) \rightarrow 1 \quad (w \rightarrow 1) \tag{C.24}$$

となる . このとき $\operatorname{sech} x = 2/(e^x + e^{-x}) \simeq 2 \cdot e^x$ となることに注意すると , (C.21) , (C.3) より

$$\begin{aligned}
 y(x) &= A \operatorname{sech}^\beta x \cdot F(a, b, c, w) \\
 &= A \operatorname{sech}^\beta x \cdot \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a + b - c + 1, 1 - w) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - w^{c-a-b}) \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-w) \right] \\
 &\rightarrow A \cdot 2^\beta \cdot e^{\beta x} \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot 1 + e^{-2\beta x} \cdot \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot 1 \right] \\
 &= A \cdot 2^\beta \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} e^{\beta x} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\beta x} \right] \\
 &= A \cdot 2^\beta \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{ikx} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} e^{-ikx} \right] \quad (x \rightarrow -\infty)
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

が得られる .

(C.20) より $F(a, b, c, w)$ は $x \rightarrow \infty$ の極限で e^{ikx} に比例するので , 2.2 節での議論した基本解 $f_1(x, k)$ に相当すると考えられる . したがって (2.2.34) と (C.25) の各係数を比較すると ,

$$c_{21}(k) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \tag{C.26}$$

⁶この恒等式の証明については犬井 (1976) などを参照されたい .

$$c_{22}(k) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (\text{C.27})$$

が得られる。(C.26), (C.27) を (2.2.35) に代入して反射係数 $R_L(k)$ を求めると,

$$\begin{aligned} R_L(k) &= \frac{c_{22}(k)}{c_{21}(k)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} \\ &= \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

となる.

ここで (C.13), (C.14), (C.15) を a, b, c について解き, k の関数として表現する. まず c については (C.13) より直ちに

$$c = 1 - ik \quad (\text{C.29})$$

が得られる. 次に a, b について考える. (C.14), (C.15) の両式から b を消去すると,

$$\begin{aligned} \beta^2 + \beta - \alpha &= ab \\ &= a[2(1 + \beta) - a - 1] \\ &= -a^2 + (2\beta + 1)a, \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} a^2 - (2\beta + 1)a + \beta^2 + \beta - \alpha &= 0 \\ &= a^2 - (-2ik + 1)a - (k^2 + \beta + ik) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

が得られる. これを a に関する 2 次方程式と見て, a について解くと,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}[(-2ik + 1) \pm \sqrt{(-2ik + 1)^2 + 4(k^2 + \beta + ik)}] \\ &= \frac{1}{2} - ik \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4k^2 - 4ik + 1 + 4k^2 + 4\beta + 4ik} \\ &= \frac{1}{2} - ik \pm \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

となる. いま, (C.14), (C.15) は a, b に関する対称式となっているので, (C.31) の右辺の符号のとり方について特に制約はない. そこで正の符号を選ぶことにすると,

$$a = \frac{1}{2} - ik + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}, \quad (\text{C.32})$$

$$b = \frac{1}{2} - ik - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \quad (\text{C.33})$$

を得る .

(C.29) , (C.32) , (C.33) より

$$c - a - b = 1 - ik - 1 + 2ik = ik, \quad (\text{C.34})$$

$$c - a = 1 - ik - \frac{1}{2} + ik - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}, \quad (\text{C.35})$$

$$c - b = 1 - ik - \frac{1}{2} + ik + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}, \quad (\text{C.36})$$

となるので , (C.28) は

$$R_L(k) = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(\frac{1}{2} - ik + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}})\Gamma(\frac{1}{2} - ik + \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}})\Gamma(\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}})\Gamma(-ik)} \quad (\text{C.37})$$

と書き換えられる . ここでガンマ関数に関する恒等式⁷

$$\Gamma(\frac{1}{2} - z)\Gamma(\frac{1}{2} + z) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \quad (\text{C.38})$$

を用いると ,

$$R_L(k) = \frac{\cos(\pi\sqrt{\alpha + \frac{1}{4}})}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(ik)\Gamma(\frac{1}{2} - ik + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}})\Gamma(\frac{1}{2} - ik + \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}})}{\Gamma(-ik)} \quad (\text{C.39})$$

となる . (C.39) において , $\cos(\pi\sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}) = 0$ を満たすとき , $R_L(k) = 0$ となる . すなわち

$$\sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + n \quad (n \text{ は自然数}) \quad (\text{C.40})$$

という条件を満たすとき , 無反射となる . (C.40) を α について解くと ,

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 - \frac{1}{4} = n(n+1) \quad (\text{C.41})$$

が得られる . 以上より , $u(x) = -\alpha \text{sech}^2 x$ が無反射ポテンシャルとなるための条件は , n を自然数として , $\alpha = n(n+1)$ であることが示された .

⁷この恒等式の証明についても西本 (1998) を参照するとよい .

付録 D 双曲線関数に関する公式集

本論文では双曲線関数に関する様々な関係式を導き、式変形に用いた。そこで本付録では双曲線関数の定義と、論文中で用いたそれらの関係式を公式集としてまとめ記す。

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{D.1})$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{D.2})$$

$$\tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{D.3})$$

$$\operatorname{sech} x \equiv \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{D.4})$$

$$\operatorname{cosech} x \equiv \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{D.5})$$

$$\operatorname{coth} x \equiv \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{D.6})$$

$$\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \quad (\text{D.7})$$

$$\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1 \quad (\text{D.8})$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 \quad (\text{D.9})$$

$$\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x \quad (\text{D.10})$$

$$\operatorname{cosech} 2x = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x \quad (\text{D.11})$$

$$\operatorname{coth} 2x = \tanh x + \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{cosech} x \quad (\text{D.12})$$

$$\tanh 3x = \tanh x \frac{3 + \tanh^2 x}{1 + 3 \tanh^2 x} \quad (\text{D.13})$$

$$\operatorname{sech} 3x = \operatorname{sech}^3 x \frac{1}{1 + 3 \tanh^2 x} \quad (\text{D.14})$$

$$1 + \operatorname{cosech}^2 x = \frac{1}{\tanh^2 x} = \operatorname{coth}^2 x \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \coth x = -\operatorname{cosech}^2 x \quad (\text{D.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad (\text{D.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{cosech}^2 x = -2 \coth x \operatorname{cosech}^2 x \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sech}^2 x = -2 \tanh x \operatorname{sech}^2 x \quad (\text{D.19})$$

謝辞

本論文を作成するにあたり，指導教官の林祥介教授，小高正嗣助手，石渡正樹助手に様々な助言，指導をして頂きました．また，博士課程の森川靖大氏，修士課程の土屋貴志氏には多くの時間を割いて頂き，論文の確認，校正をして頂きました．さらにその他の地球流体力学研究室の皆様にも多くの有益な意見を頂きました．多くの御迷惑をお掛けしたことをお詫びするとともに，皆様のご厚意に心より感謝致します．

参考文献

Boussinesq, J. , 1871: Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. Institute de France, Academie des Sciences, Comptes Rendus, 72, 755 – 759

Faddeev, L. D. , 1967: Properties of the S - matrix of the one - dimensional Schrödinger equation . American Mathematical Society Translations Series 2 , 65 , 139 – 166

Gardner, C. S. , Greene, J. M. , Kruskal, M. D. , Miura, R. M. , 1967: Method for solving the Korteweg - de Vries equation . Physical Review Letters , 19 , 19 , 1095 – 1097

Hirota, R. , 1971: Exact solution of the Korteweg - de Vries equation for multiple collisions of solitons . Physical Review Letters, 27, 18, 1192 – 1194

Klaus, B. , 2000: The Korteweg - de Vries equation : history , exact solutions , and graphical representation

<http://www.usf.uni-osnabrueck.de/~kbrauer/solitons/KdV.pdf>

Koelink, E. , 2006: Scattering theory

<http://aw.twi.tudelft.nl/~koelink/dictaat-scattering.pdf>

Korteweg, D. J. , de Vries, F. , 1895: On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal , and on a new type of long stationary waves. Philosophical Magazine, 5, 36, 422 – 443

Lamb. Jr., G. L. , 戸田 盛和監訳 , 1983: ソリトン [理論と応用] , 培風館, 277 pp

Lax, P. D. , 1968: Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves . Communications on Pure and Applied Mathematics , 21 , 5 , 467 – 490

Rayleigh, L. , 1876: On waves. Philosophical Magazine, 5, 1, 257 – 279

Russell, J. S. , 1844: Report on waves . Report of the 14th meeting of British Association for the advancement of science , London , 311 – 390

- Takehiro, S. , Odaka, M. , Ishioka, K. , Ishiwatari, M. , Hayashi, Y.-Y. , SPMODEL Development Group, 2006: A series of hierarchical spectral models for geophysical fluid dynamics , Nagare, 25 , Nagare Multimedia 2006
<http://www.nagare.or.jp/mm/2006/spmodel/>
- Wazwaz, A-M. , 2006: Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation . Applied Mathematics Letters , 19 , 1162 – 1167
- Zabusky, N. J. , Kruskal, M. D. , 1965: Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and recurrence of initial states . Physical Review Letters , 15 , 6 , 240 – 243
- Zabusky, N. J. , 1968: Solitons and bound states of the time - independent Schrödinger equation . Physical Review , 168 , 1 , 124 – 128
- 泉屋 周一 , 上見 練太郎 , 石川 剛郎 , 三波 篤郎 , 陳 蘊剛 , 西森 敏之 , 1996: 行列と連立一次方程式 , 共立出版 , 110 pp
- 犬井 鉄郎 , 1976: 球函数 , 円筒函数 , 超幾何函数 , 生産技術センター新社 , 584 pp
- 小高 正嗣 , 2004: SPMODEL サンプルプログラム 1次元 KdV 方程式モデル
<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/1d-cyclic-e/kdv/sample/pub/kdv.pdf>
- 竹広 真一 , 石岡 圭一 , 柿並 義宏 , 西澤 誠也 , 森川 靖大 , 小高 正嗣 , 石渡 正樹 , 林 祥介 , SPMODEL 開発グループ , 2005: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL)
<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/> 地球流体電脳倶楽部
- 戸田 盛和 , 1995: 物理学 30 講シリーズ 波動と非線形問題 30 講 , 朝倉書店 , 219 pp
- 戸田 盛和 , 2006: ソリトンと物理学 , サイエンス社 , 196 pp
- 朝永 振一郎 , 1952: 量子力学 II , みすず書房 , 442 pp
- 西本 敏彦 , 1998: 超幾何・合流型超幾何微分方程式 , 共立出版 , 186 pp
- 日本気象学会 , 1993: 気象研究ノート 気象とソリトン・モドン - 気象現象中の孤立波 (上) , 212 pp
- 広田 良吾 , 1992: 直接法によるソリトンの数理 , 岩波書店 , 202 pp