β平面上における 2次元乱流の数値計算 Numerical calculation of two-dimensional turbulence on a beta-plane

土屋 貴志

Tsuchiya Takashi

北海道大学理学部地球科学科
地球流体力学研究室

Department of Earth Sciences,
Faculty of Science, Hokkaido University,
Geophysical Fluid Dynamics Laboratory

2006/01/27

要旨

本論文では Rhines(1975) が行った β 平面近似の 2 次元非発散流体の乱流の数値計算を SPMODEL ライブラリを用いて再計算を行い β 効果が 2 次元乱流に与える影響を調べた.

計算の結果 Rhines(1975) が示した以下のことが確認された．β 効果があるとエネルギーで重みをつけた平均波数は大きくなり，エネルギースペクトルのピークを持つ波数は大きくなる．これは 2 次元乱流の特徴であるエネルギーの逆カスケードが β 効果により抑制されていることを示している．この理由は，渦度方程式において β 項が非線形相互作用に対し卓越することにより説明できる．流線関数の分布には β 効果を増加させるにつれて南北方向に縞構造が現れるようになる．その縞構造の南北スケールおよび平均東西風の南北幅は Rhines スケール程度の大きさとなっている．

目 次

図 目 次

1 はじめに

乱流は強い非線形性を持ち運動が非定常であり，大きな輸送能力をもち，大きなエネルギー散逸性を伴う，などの特徴を持つため大気や海洋などの流れに大きな影響を与えていると考えられている．よって 2 次元乱流を考えることは，水平方向の運動スケールに比べ鉛直方向の運動スケールが極めて小さい惑星の大規模な流れを理解する上で有用である．

2 次元乱流は 3 次元乱流に比べ，数値計算を行う上での手軽さゆえに古くから研究され，傾圧性，回転，地形性などの効果を無視した 2 次元乱流は，渦がより大きな渦へと遷移していくことなどが知られていた．回転の効果，すなわち β 効果を考慮した 2 次元乱流は Rhines(1975) によって初めて議論され，数値計算が行われた．本論文では Rhines(1975) が行った数値計算を参考に SPMODEL ライブラリ（竹広ほか，2005）を用い再計算を行い，β 効果が 2 次元乱流に与える影響を考察した．

本論文の構成は以下のとおりである．第 2 章はモデルの定式化と実験設定について述べる．第 3 章は数値計算の結果とそれに関する考察を行う．第 4 章はまとめである．

2　定式化と実験設定

数値計算を行うために β 平面上における 2 次元乱流の定式化を行い，実験設定を述べる．

2-1　支配方程式系

2 次元非圧縮流体を考える. 支配方程式系は 2 次元の運動方程式と連続の式から成る.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u, \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v, \tag{2-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{2-3}$$

ここで u，v は速度の x，y 成分，p は圧力，f はコリオリパラメーターで y の関数，ν は動粘性係数，ρ は密度である．ν と ρ は定数である．境界条件は x，y 両方向に周期的で

$$\begin{aligned} u(0,y)=u(2\pi,y),\quad v(0,y)=u(2\pi,y),\\ u(x,0)=u(x,2\pi),\quad v(x,0)=v(x,2\pi) \end{aligned} \tag{2-4}$$

とする.

2-2　渦度方程式

渦度の時間変化の式を導出する．(2-1) 式に y 微分，(2-2) 式に x 微分を施して差し引くことにより，圧力を消去でき，

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu\right]\\ &=\nu\left(\frac{\partial\nabla^2 v}{\partial x}-\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)
$$
$$
-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{df}{dy}v
$$
$$
=\nu\left(\frac{\partial\nabla^2 v}{\partial x}-\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial y}\right),
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}-f\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{df}{dy}v
$$
$$
=\nu\left(\frac{\partial\nabla^2 v}{\partial x}-\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial y}\right)
$$

とできる．ここで (2-3) 式を用いると

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{df}{dy}v=\nu\left(\frac{\partial\nabla^2 v}{\partial x}-\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial y}\right)
$$

となる．したがって，渦度を

$$
\zeta(x,y,t)=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2-5}
$$

と定義すると，

$$
\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{df}{dy}v=\nu\nabla^2\zeta \tag{2-6}
$$

となる．

2-3　流線関数を用いた表現

連続の式 (2-3) 式から速度場を流線関数 $\psi(x,y,t)$ を用いて表すことができる．すなわち，

$$
u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2-7}
$$

とすると，渦度 ζ は

$$
\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nabla^2\psi \tag{2-8}
$$

と表すことができる．流線関数を用いて渦度方程式 (2-6) 式を表すと

$$
\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{df}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\nu\nabla^2\zeta
$$

となる．ここでヤコビアン

$$J(\psi,\zeta) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{2-9}$$

を用い，さらに β 面近似（β 面近似の詳細は付録 A を参照），

$$\beta = \frac{df}{dy} \tag{2-10}$$

を行うと，

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + J(\psi,\zeta) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu\nabla^2\zeta. \tag{2-11}$$

となる．

2-4　水平離散化に向けた定式化

水平方向にスペクトル法を用いる．各物理量を 2 重フーリエ級数展開すると

$$\zeta(x,y,t) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{\zeta}_{kl}(t)e^{ikx}e^{ily}, \tag{2-12}$$

$$\tilde{\zeta}_{kl}(t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\zeta(x,y,t)e^{-ikx}e^{-ily}dxdy, \tag{2-13}$$

$$\psi(x,y,t) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=-L}^{L}\tilde{\psi}_{kl}(t)e^{ikx}e^{ely}, \tag{2-14}$$

$$\tilde{\psi}_{kl}(t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x,y,t)e^{-ikx}e^{-ily}dxdy \tag{2-15}$$

となる．k, l は x, y 方向の波数，$\tilde{\zeta}_{kl}(t)$ は渦度の波数 k，l 成分，$\tilde{\psi}_{kl}(t)$ は流線関数の波数 k，l 成分，K，L はそれぞれ x，y 方向の切断波数である．これらを (2-11) 式に代入し，重み関数 $e^{-ik'x}e^{-il'y}$ をかけて $[0,2\pi]$ で積分すると，三角関数の直交性により，常微分方程式

$$\frac{d\tilde{\zeta}_{kl}}{dt} = -[\widetilde{J(\psi,\zeta)}]_{kl} - \beta\left[\widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]_{kl} + \nu[\widetilde{\nabla^2\zeta}]_{kl} \tag{2-16}$$

が得られる．ここで $\sim$ はスペクトルであることを示す．

2-5　時間積分

今回の数値計算の時間積分は 2 次精度であるホイン法（修正オイラー法）を使用する．以下では時間に関して差分化し，時間積分を行うための定式化を行う．Δt を時間格子間隔，時刻 t，$t+\Delta t$ における $\tilde{\zeta}_{kl}$ の値をそれぞれ $\tilde{\zeta}^{\tau}_{kl}$，$\tilde{\zeta}^{\tau+1}_{kl}$ と表す．

$$\frac{\tilde{\zeta}^{\tau+1}_{kl}-\tilde{\zeta}^{\tau}_{kl}}{\Delta t} = -[\widetilde{J(\psi,\zeta)}]^{\tau}_{kl} - \beta\left[\widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]^{\tau}_{kl} + \nu[\widetilde{\nabla^2\zeta}]^{\tau}_{kl}, \tag{2-17}$$

$$\tilde{\zeta}^{*}_{kl} = \tilde{\zeta}^{\tau}_{kl} + (\Delta t)\times\left(-[\widetilde{J(\psi,\zeta)}]^{\tau}_{kl} - \beta\left[\widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]^{\tau}_{kl} + \nu[\widetilde{\nabla^2\zeta}]^{\tau}_{kl}\right), \tag{2-18}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}^{\tau+1}_{kl} = \tilde{\zeta}^{\tau}_{kl} + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)\times\Bigg\{&\left(-[\widetilde{J(\psi,\zeta)}]^{\tau}_{kl} - \beta\left[\widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]^{\tau}_{kl} + \nu[\widetilde{\nabla^2\zeta}]^{\tau}_{kl}\right)\\ &+\left(-[\widetilde{J(\psi,\zeta)}]^{*}_{kl} - \beta\left[\widetilde{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right]^{*}_{kl} + \nu[\widetilde{\nabla^2\zeta}]^{*}_{kl}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2-19}$$

2-6　実験設定

格子点数は x, y 方向ともに 64 個，切断波数は x, y 方向ともに 21 とした．ν は 0.004 とする．流線関数の初期条件として全波数 7〜9 の成分をランダムに与える．実験 1 を $\beta=0$，実験 2 を $\beta=3.25$，実験 3 を $\beta=52$, 実験 4 を $\beta=150$ とする．

3 計算結果

3-1 エネルギーの逆カスケード

図 1 は実験 1(β=0) における流線関数を示している．初期場 (図 1) から時間が経つにつれ擾乱のスケールが大きくなっている．つまり小さな波数が卓越していることがわかる．これはエネルギーが波数の小さい方へ移っていることを示している．

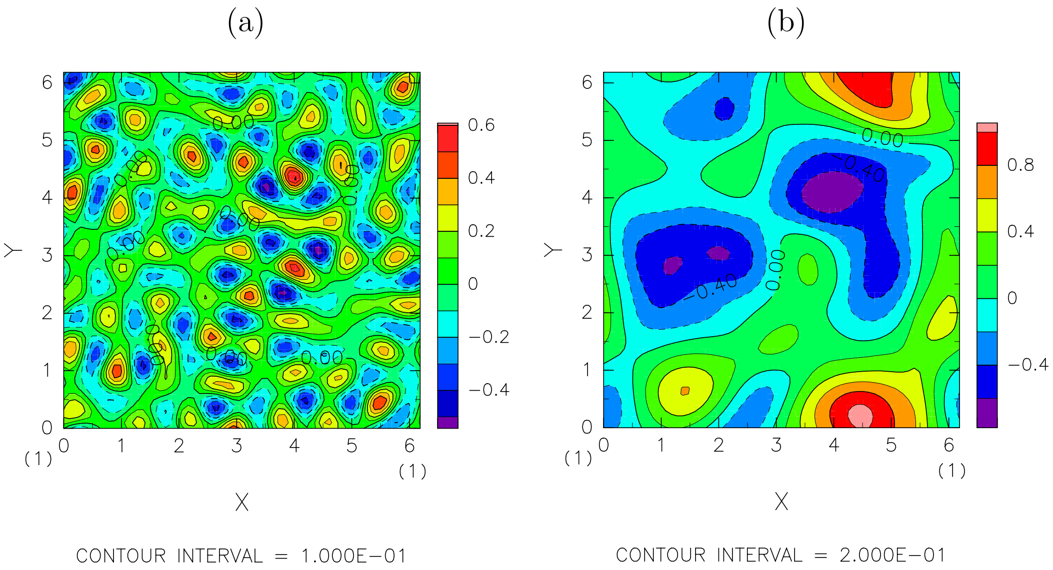


図 1: 実験 1($\beta = 0$) における流線関数．(a)$t = 0$，(b)$t = 7$

このことを定量的に求めるためにある時間における卓越した波数，つまりエネルギーで重みをつけた平均波数

$$\langle k \rangle = \frac{\displaystyle\int_0^\infty kE(k)dk}{\displaystyle\int_0^\infty E(k)dk} \tag{3-1}$$

を求める．ここで k は波数，$E(k)$ はエネルギースペクトルである．$\langle k \rangle$ の時間変化を図 2 に示す．この図より，エネルギーで重みをつけた平均波数が時間が経つにつれ小さくなっていくことがわかる．これはエネルギーの逆カスケードと呼ばれる現象である．

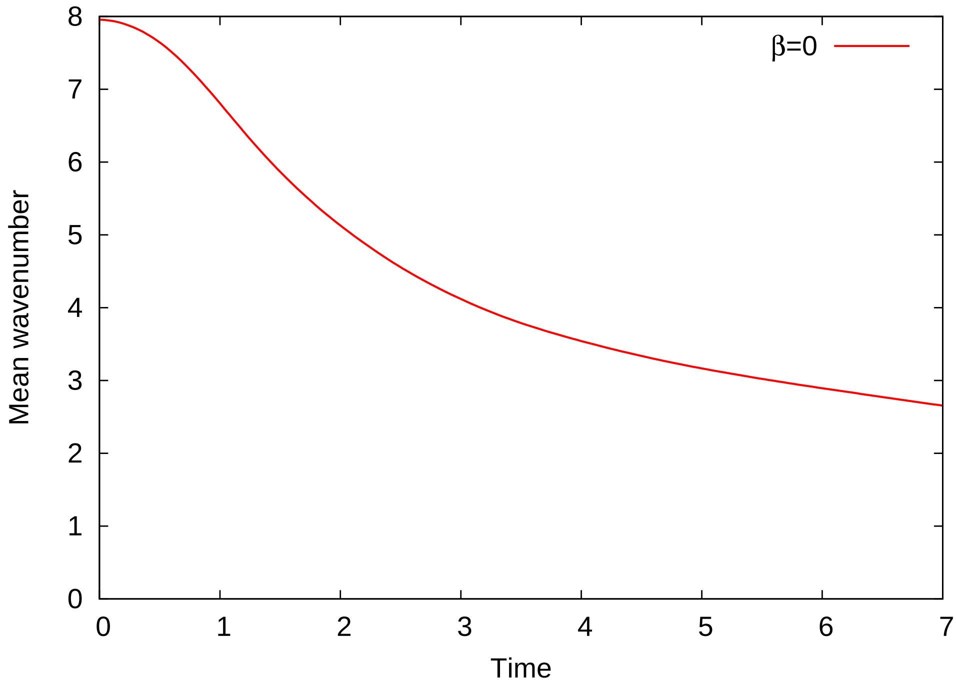


図 2: 実験 1($\beta = 0$) におけるエネルギーで重みをつけた平均波数波数の時間発展.

3-2　波と乱流

図 3 は各実験の流線関数の x-t 断面図，図 4 は各実験のエネルギーで重みをつけた平均波数の時間発展を示し，図 5 は各実験の流線関数の位相速度の時間発展を示す．図 3(a) は β 効果がない場合で，純粋な 2 次元乱流といえる．この場合，前節で見たようにエネルギーの逆カスケードが起こる．図 3(b) と (c) は β 効果が弱い場合，強い場合である．図 4 より，これらの場合，図 3(a) よりもエネルギーの逆カスケードが抑制されている．また図 3(c) は (b) よりもさらに抑制されていることがわかる．そして図 3，図 5 から，図 3(b)，(c) では流線関数の位相が西へ伝播しており，図 3(c) は (b) よりも位相の伝播が速いこと，時間が経つにつれ位相速度の大きさが速くなっていくことがわかる．

β 効果がエネルギーの逆カスケードを抑制していることについて式で考える．β 平面上での粘性を無視した渦度方程式は (2-6) 式，(2-10) 式より

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = 0$$

と書ける．U を代表的速度，L を代表的水平スケールとすると，非線形項に対す

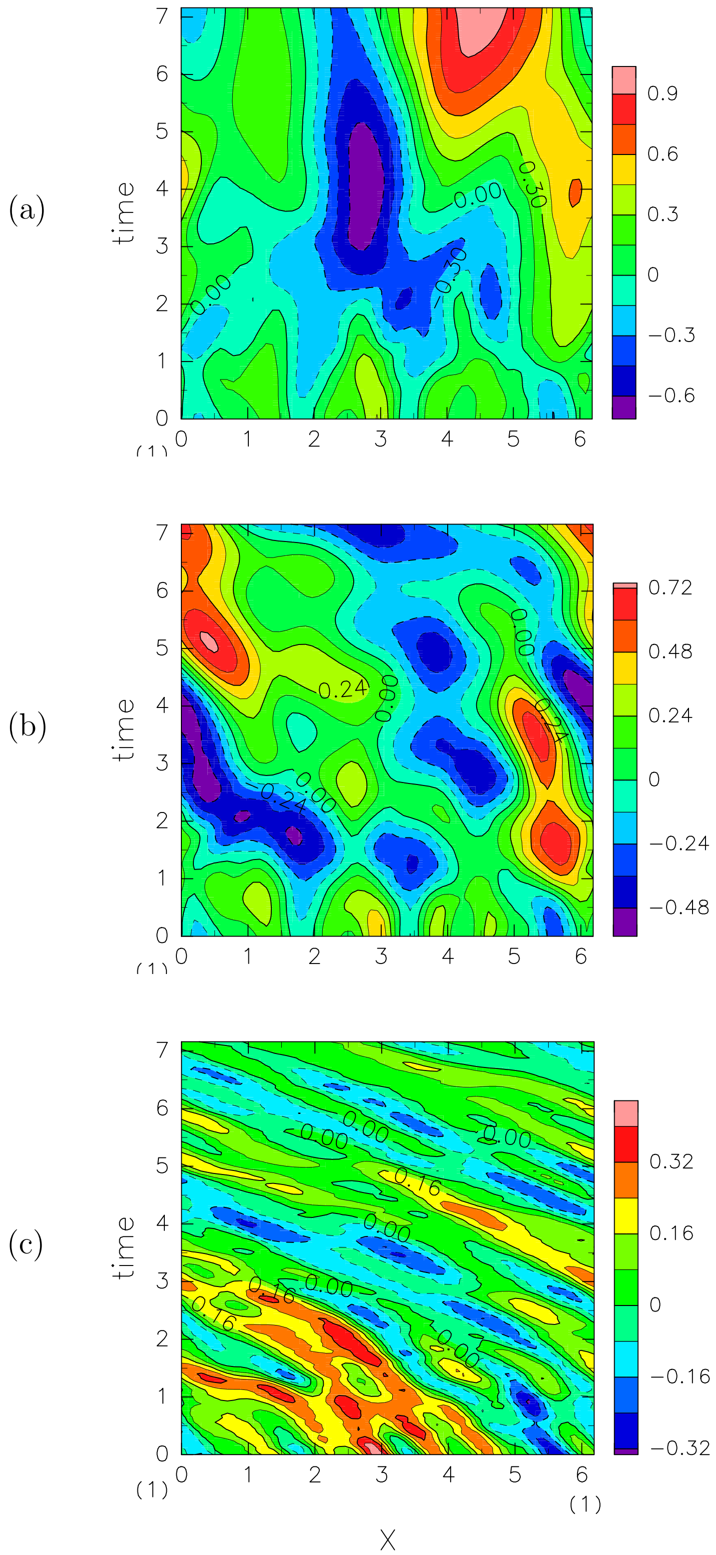


図 3: 流線関数の x-t 断面図 ($y = 0$). (a) 実験 1($\beta = 0$), (b) 実験 2($\beta = 3.15$), (c) 実験 3($\beta = 52$)

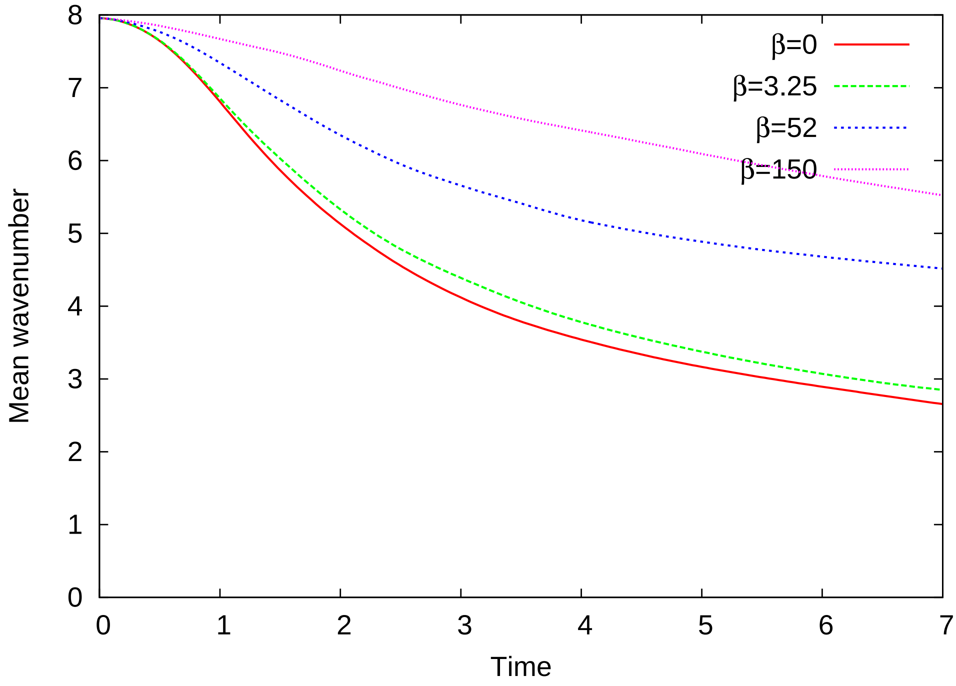


図 4: 各実験におけるエネルギーで重みをつけた平均波数の時間発展

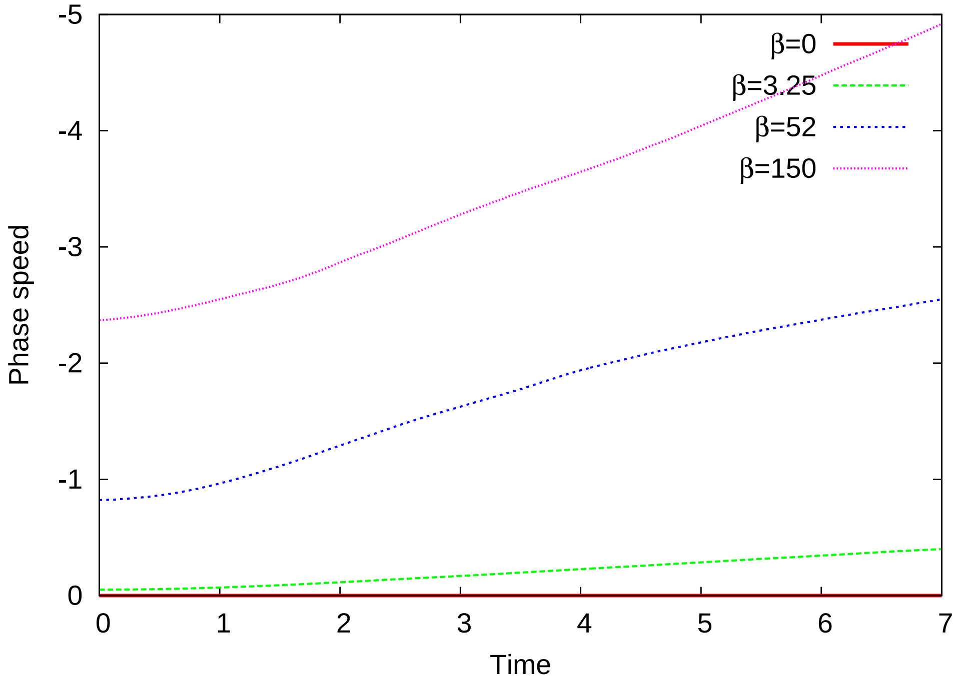


図 5: 各実験における流線関数の位相速度の大きさの時間発展

る β 項の比は，

$$\frac{\beta v}{\boldsymbol{v}\cdot\nabla\zeta} \sim \frac{\beta U}{U(U/L)/L} = \frac{\beta L^2}{U} \tag{3-2}$$

と書ける．初期の乱流が支配する場では L が小さい，つまり $\beta L^2/U$ が小さいので非線形項が卓越する．その場合，非線形相互作用により 2 次元乱流の特徴である逆カスケードが起こり時間とともに L が大きくなっていく．やがて $\beta L^2/U$ が大きくなり，β 項が卓越すると渦度方程式は近似的に，

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \beta v = 0 \tag{3-3}$$

となる．(3-3) 式は線形のロスビー波を記述する式であり，この式が近似的にせよ成り立つと非線形相互作用が終わり，場が乱流というよりもロスビー波として振舞い出し，エネルギーの逆カスケードも止まる．また β が大きければ，初期で L が小さくても，β 項が大きく (3-3) 式が成り立ちやすい．

次に図 3(b)，(c) で波の位相の伝播が起こること．そして，その伝播速度の大きさは β が大きいほど速く，β が小さいほど増加が大きいことについて式で考える．流線関数を

$$\psi = e^{i(kx+ly-\sigma t)} \tag{3-4}$$

とおき，(3-3) 式に代入すると分散関係は

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2+l^2} \tag{3-5}$$

となる．よって位相速度は

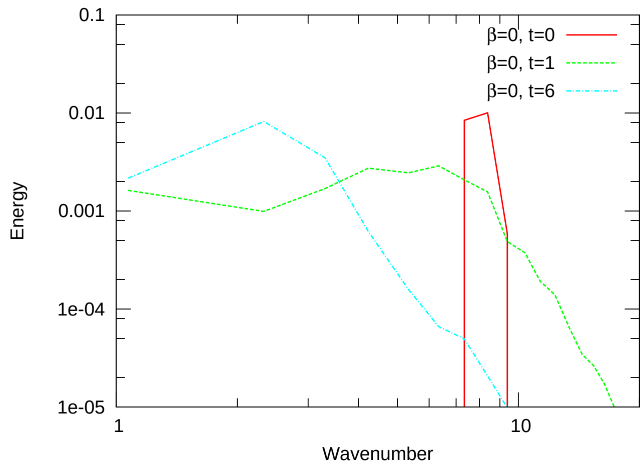
$$c_x = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\beta}{k^2+l^2} \tag{3-6}$$

となる．ここで k^2+l^2，β はともに正なので位相速度は x が負の方向，つまり位相の伝播は西向きとなる．また分子の β より，β 効果が大きいほど流線関数の位相速度の大きさが速いことがわかる．次に分母の k^2+l^2 を考えると，時間とともにエネルギーの逆カスケードが進むと位相速度の大きさを増加させることがわかる．つまり β 効果が小さいほど位相速度大きさの増加が速いことがわかる．

3-3　エネルギースペクトル

図 6 は $\beta = 0$，$\beta = 52$ それぞれのエネルギースペクトルの時間系列を示す図である．これより初期にランダムに与えた 7〜9 の波数が β 効果により，どのような影響を受けていくかを見ることができる．エネルギーの逆カスケードが起こるので時間が経つにつれ波数が主に小さいほうへ移っていくが，少量だが波数が大きい方へも移っていく．β 効果がある場合，エネルギーの逆カスケードが抑制されるので，β 効果がない場合よりも全体的に波数が大きくなることがわかる．

(a)



(b)

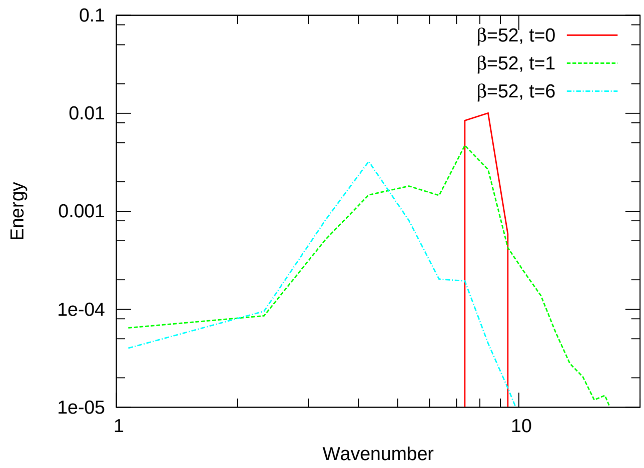


図 6: エネルギースペクトルの時間発展，(a)$\beta = 0$，(b)$\beta = 52$

3-4　帯状流

図 7 は実験 1($\beta = 0$)，実験 3($\beta = 52$) の $t = 7$ における流線関数，平均東西風の速度を示す．図 7(c), (d) から β 効果がある場合，縞構造が形成され，帯状流が作られることがわかる．

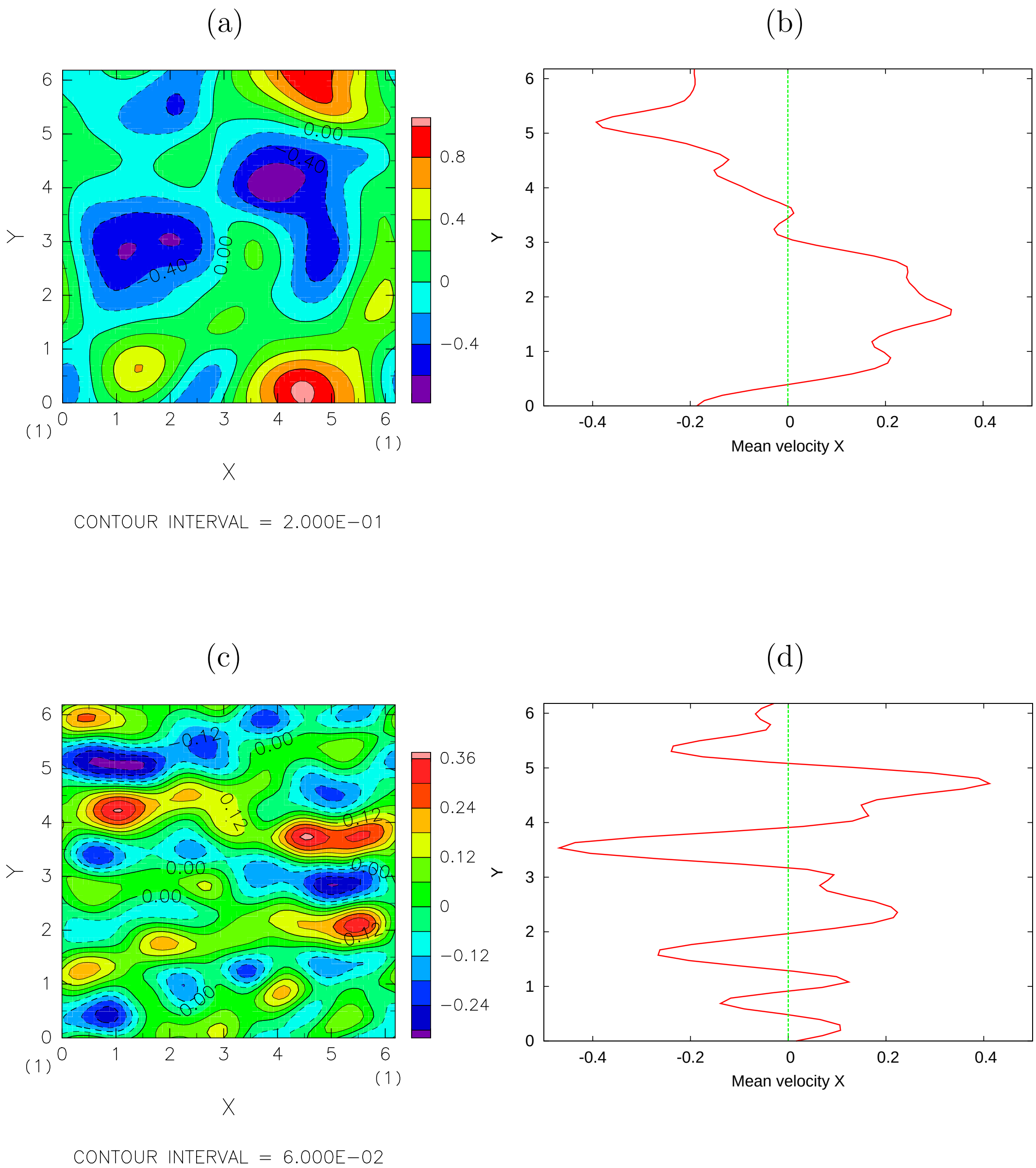


図 7: (a) 実験 1($\beta = 0$)，$t = 7$ の流線関数，(b) 実験 1($\beta = 0$)，$t = 7$ の平均東西風の速度, (c) 実験 3($\beta = 52$)，$t = 7$ の流線関数，(d) 実験 3($\beta = 52$)，$t = 7$ の平均東西風の速度

3-5 Rhines スケール

Rhines(1975) は β 平面上における 2 次元乱流が非線形相互作用の卓越を終え，エネルギーの逆カスケードが止まるスケールを定義した．このスケールは Rhines スケールと呼ばれ，帯状流の南北幅の程度を規定する．Rhines スケールに対応する波数は

$$k_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{2U_{rms}}} \tag{3-7}$$

となる．ここで U_{rms} は

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1}(U_i^2)} = \sqrt{2E(k)} \tag{3-8}$$

である．ここで U_i は各格子点における速度，N は格子点数である．Rhines スケールは (3.2) 式の $\beta L^2/U$ が 1 となる条件から導出される．図 8 は帯状流が生じている場合の平均東西風の速度を示す．計算の結果，Rhines スケールは図 8(a) 約 0.8, (b) 約 0.4 となっており，平均東西風の南北幅を表しているといえる．

(a) (b)

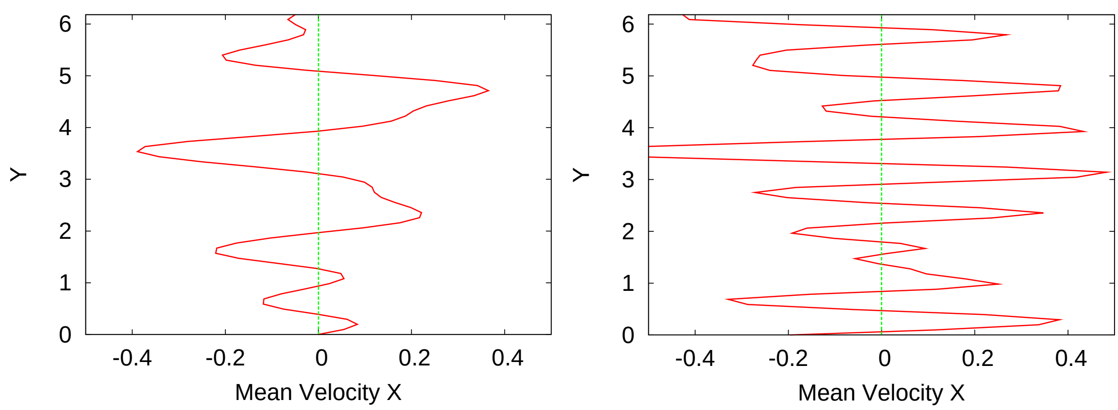


図 8: (a) 実験 3($\beta = 52$)，$t = 7$ の平均東西風の速度, (b) 実験 4($\beta = 150$)，$t = 7$ 平均東西風の速度

図 9 は各実験のエネルギーで重みをつけた平均波数の時間発展と Rhines スケールに対応する波数を示す．粘性によってエネルギーが散逸するために，Rhines スケールが小さくなっていき，エネルギーの逆カスケードが生じ続けている．

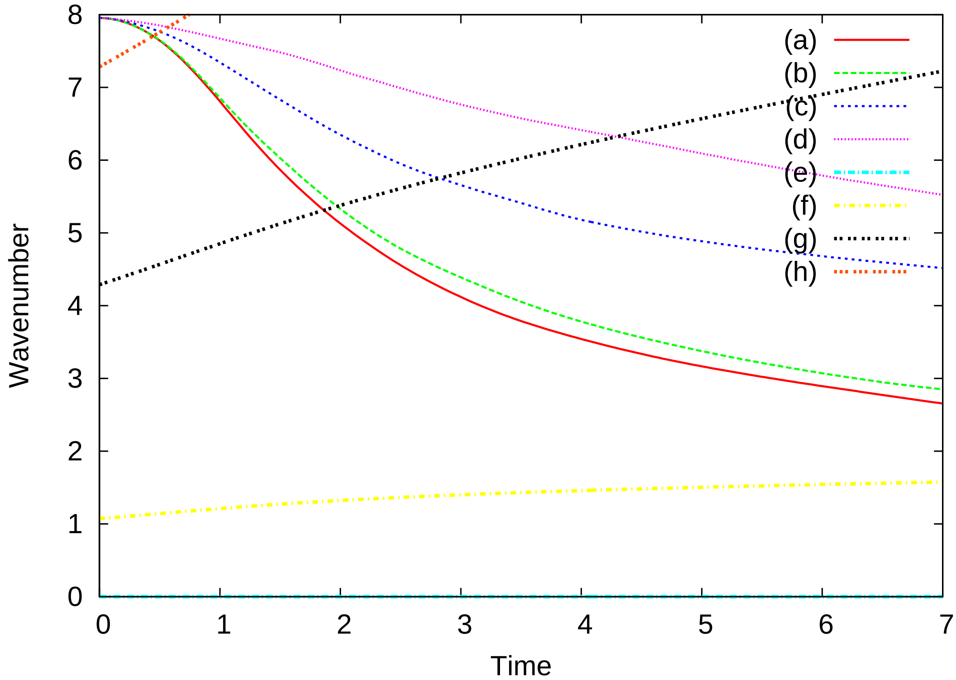


図 9: 各実験におけるエネルギーで重みをつけた平均波数の時間発展．(a) 実験 1($\beta = 0$), (b) 実験 2($\beta = 3.25$), (c) 実験 3($\beta = 52$), (d) 実験 4($\beta = 150$)．各実験における Rhines スケールに対応する波数の時間発展．(e) 実験 1($\beta = 0$), (f) 実験 2($\beta = 3.25$), (g) 実験 3($\beta = 52$), (h) 実験 4($\beta = 150$)．

4　まとめ

本論文では Rhines(1975) が行った β 平面近似の 2 次元非発散流体の乱流の数値計算を SPMODEL ライブラリを用いて再計算を行い β 効果が 2 次元乱流に与える影響を調べた.

計算の結果 Rhines(1975) が示した以下のことが確認された．β 効果があるとエネルギーで重みをつけた平均波数は大きくなり，エネルギースペクトルのピークを持つ波数は大きくなる．これは 2 次元乱流の特徴であるエネルギーの逆カスケードが β 効果により抑制されていることを示している．β 効果が強ければ強いほどこの抑制は強くなる．例えば $\beta = 150$ 程度にもなるとエネルギーの逆カスケードはほとんど起こらない．この理由は，渦度方程式において β 項が非線形相互作用に対し卓越することにより説明できる．流線関数の分布には β 効果を増加させるにつれて南北方向に縞構造が現れるようになる．その縞構造の南北スケールおよび平均東西風の南北幅は Rhines スケール程度の大きさとなっている.

これからの課題として，今回減衰性乱流の実験を行ったので，強制 2 次元乱流の実験を行い，β 効果が 2 次元乱流に与える影響が減衰性乱流とどのように違うのかを調べたい.

付録 A β 平面近似

回転の効果によるコリオリパラメータ ($f \equiv 2\Omega \sin\theta$) を考える．ここで θ は緯度，Ω は回転角速度である．コリオリパラメータ f は緯度 θ の関数である．したがって緯度方向に y 軸をとると距離 Δy だけ離れた 2 点間の f の変化 Δf は

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(y+\Delta y) - f(y)\\ &\cong f(y) + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y - f(y)\\ &= \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\end{aligned}$$

となる．y は θ の関数であるから

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dy}\Delta y\\ &= \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta y}\Delta y\end{aligned}$$

となる．r_0 を地球半径とすると $\Delta y = r_0 \Delta\theta$ より

$$\Delta f = \frac{\Delta y}{r_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

となる．ここであらためて $\Delta y = Y$ として，$f = 2\Omega\sin\theta$ を代入すると最終的に Δf の大きさは

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r_0}\frac{\partial f}{\partial \theta}Y\\ &= \frac{Y}{r_0}2\Omega\cos\theta \qquad (-1)\end{aligned}$$

と見積もられる．運動の南北方向の長さスケール Y が十分に小さいとすると，流体層が球面ではなく平らであるとして直交座標系を用いることが可能である．この系において地球が球体であるという性質による唯一の影響はコリオリパラメーター f が緯度に伴って変化するということに現れる．このような系で起こる運動に対して，f は平均緯度 θ_0 のまわりに線形化することができる．すなわち，微小な Y/r_0 に対して

$$f(\theta) \cong f(\theta_0) + \frac{1}{r_0}\frac{df}{d\theta}|_{\theta_0} r_0(\theta-\theta_0) = f_0 + \beta_0(y-y_0) \qquad (-2)$$

と近似するとこができる．ここで緯度 θ_0 における f の y に対する変化率 β_0 は

$$\beta_0 = \frac{1}{r_0}\frac{df}{d\theta}|_{\theta_0} = \frac{2\Omega}{r_0}\cos\theta_0 \qquad (-3)$$

である．このような近似を β 平面近似という．また平面に存在する流体層で f が線形的に変化することによって地球が球体であるという影響をモデル化したものを β 面モデルと呼ぶ．

付録 B 時間発展の図

実験 1($\beta = 0$)，実験 2($\beta = 3.25$)，実験 3($\beta = 52$)，実験 4($\beta = 150$) における $t = 0 \sim 7$ の流線関数と平均東西風の速度の図を示す.

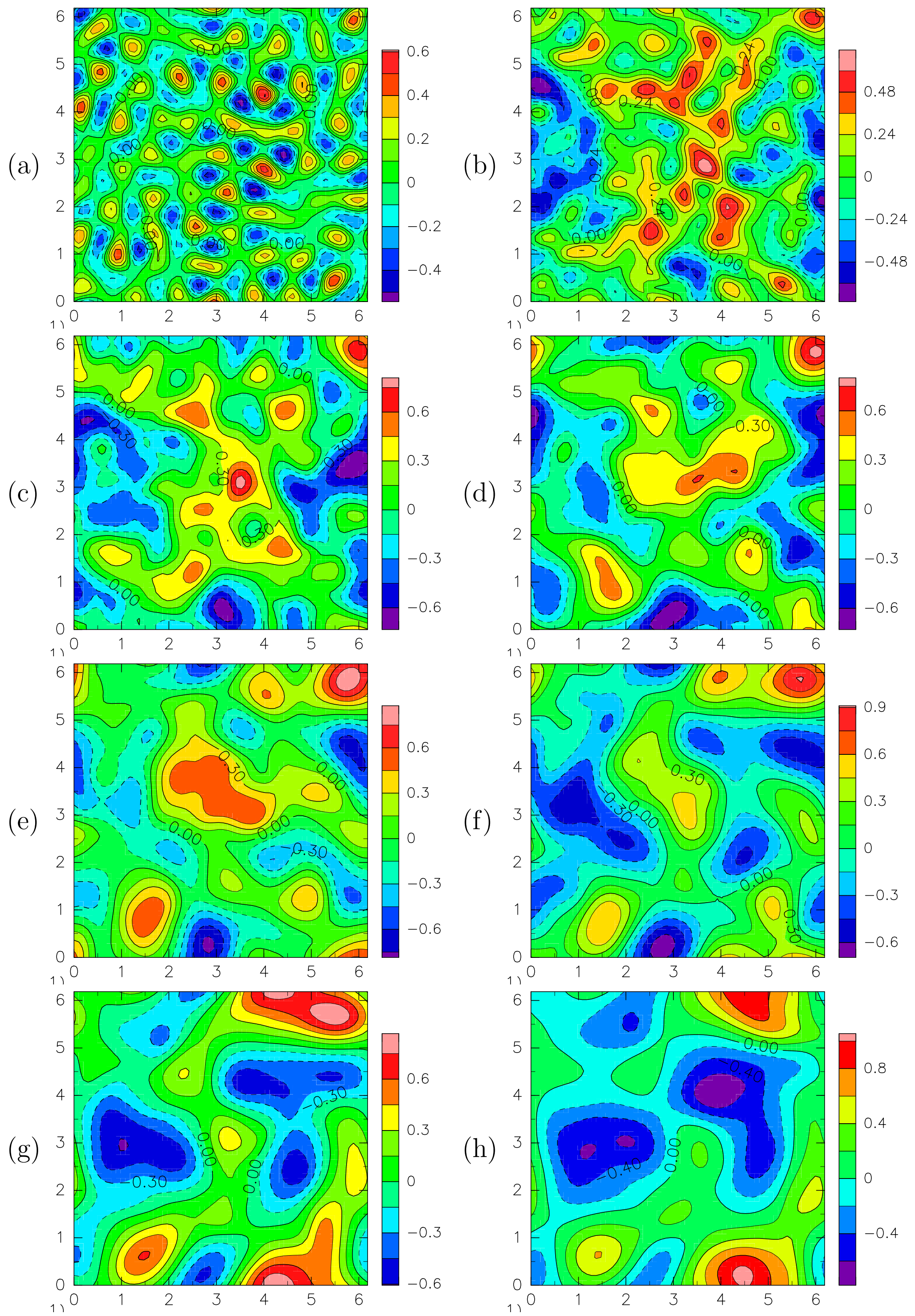


図 B-1: 実験 1($\beta = 0$) の流線関数，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

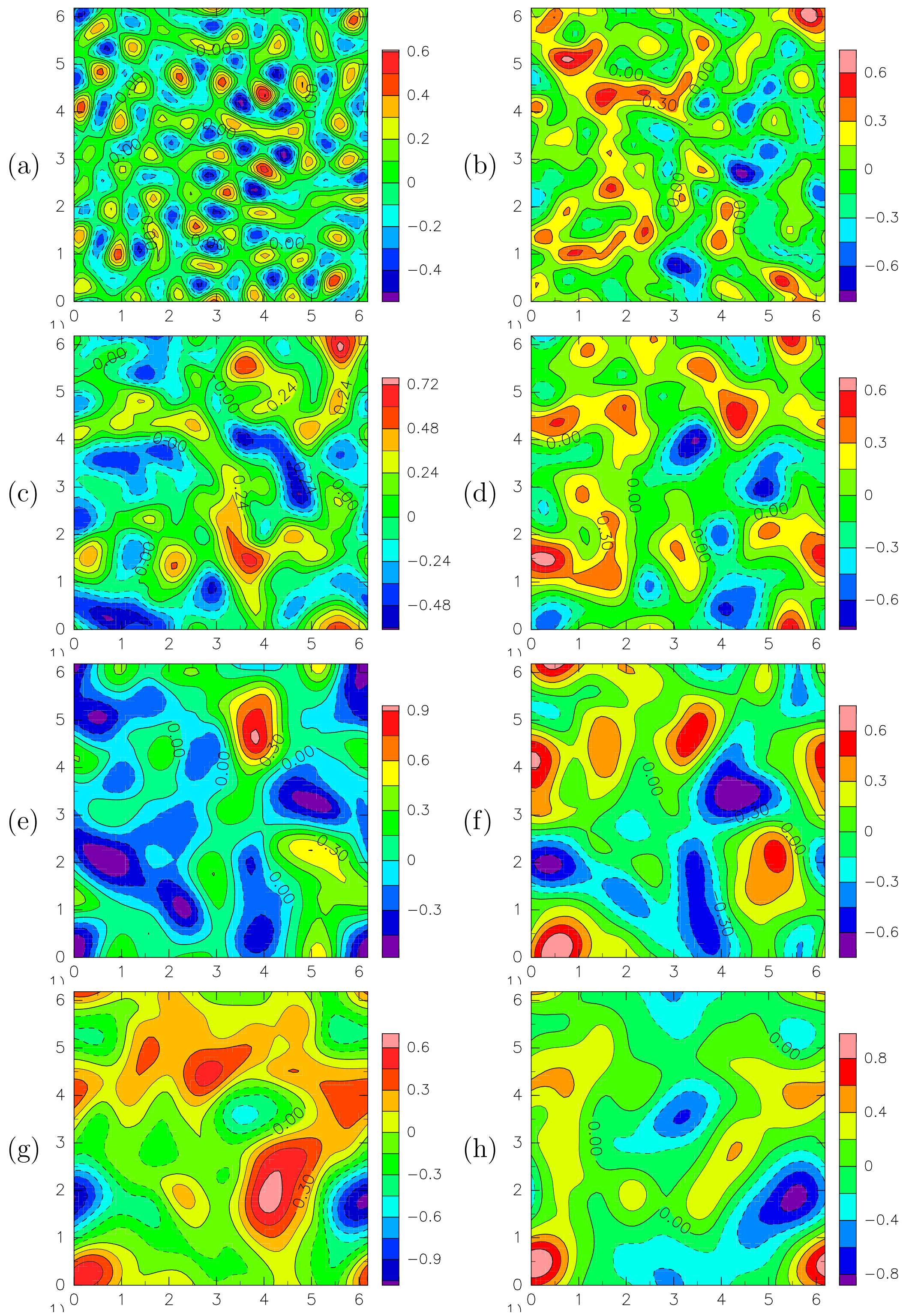


図 B-2: 実験 2($\beta = 3.25$) の流線関数，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

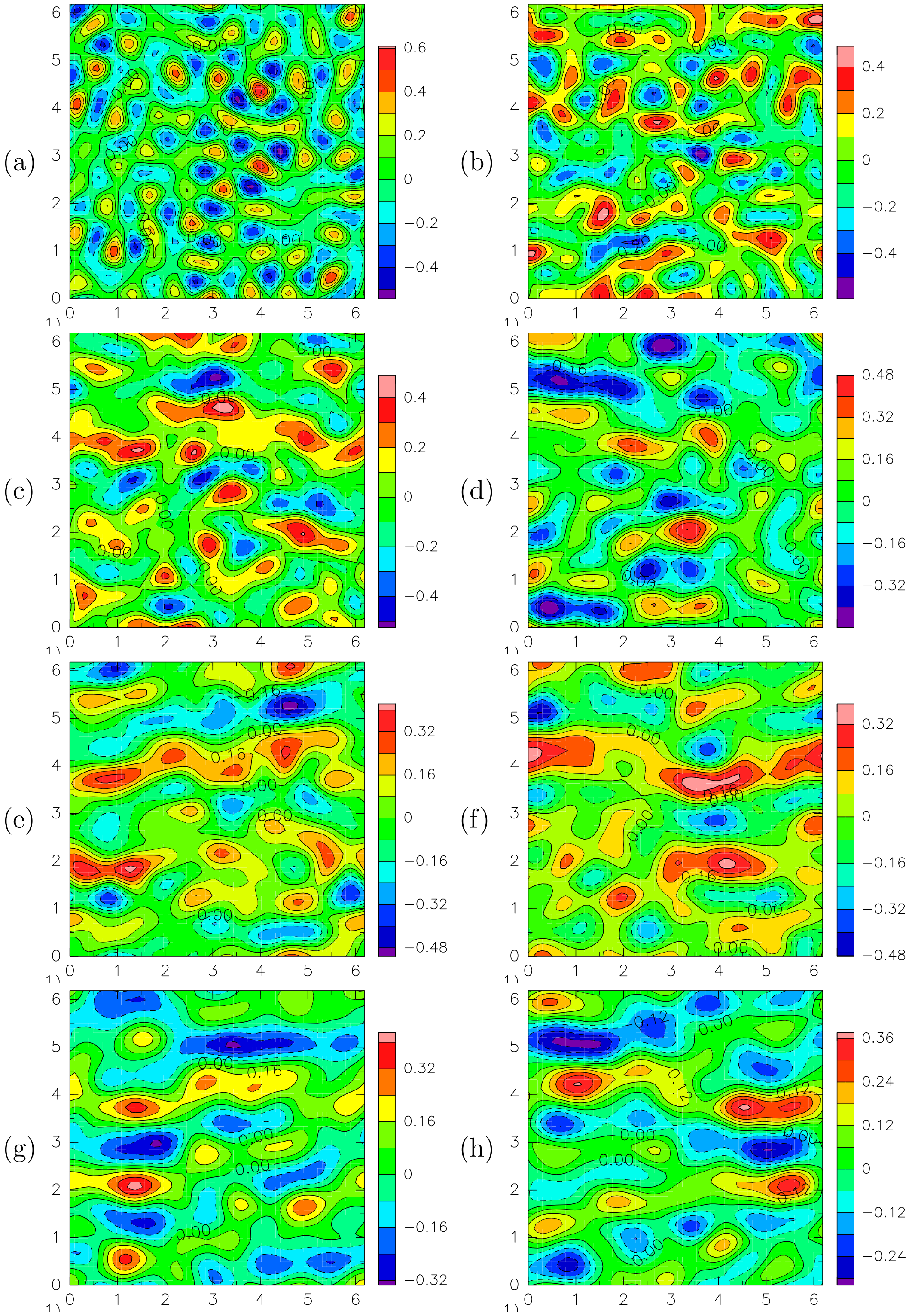


図 B-3: 実験 3($\beta = 52$) の流線関数，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

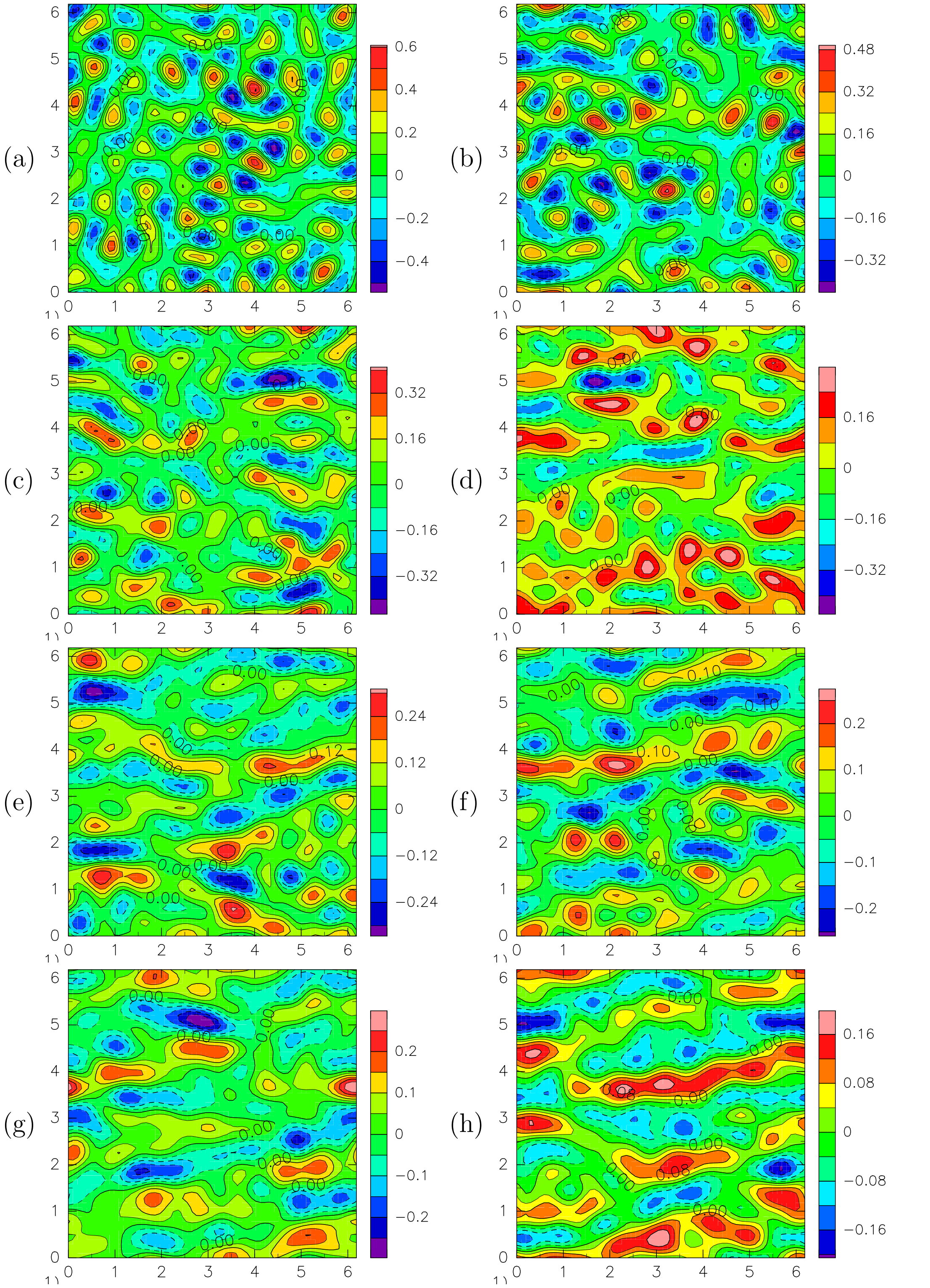


図 B-4: 実験 3($\beta = 150$) の流線関数，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

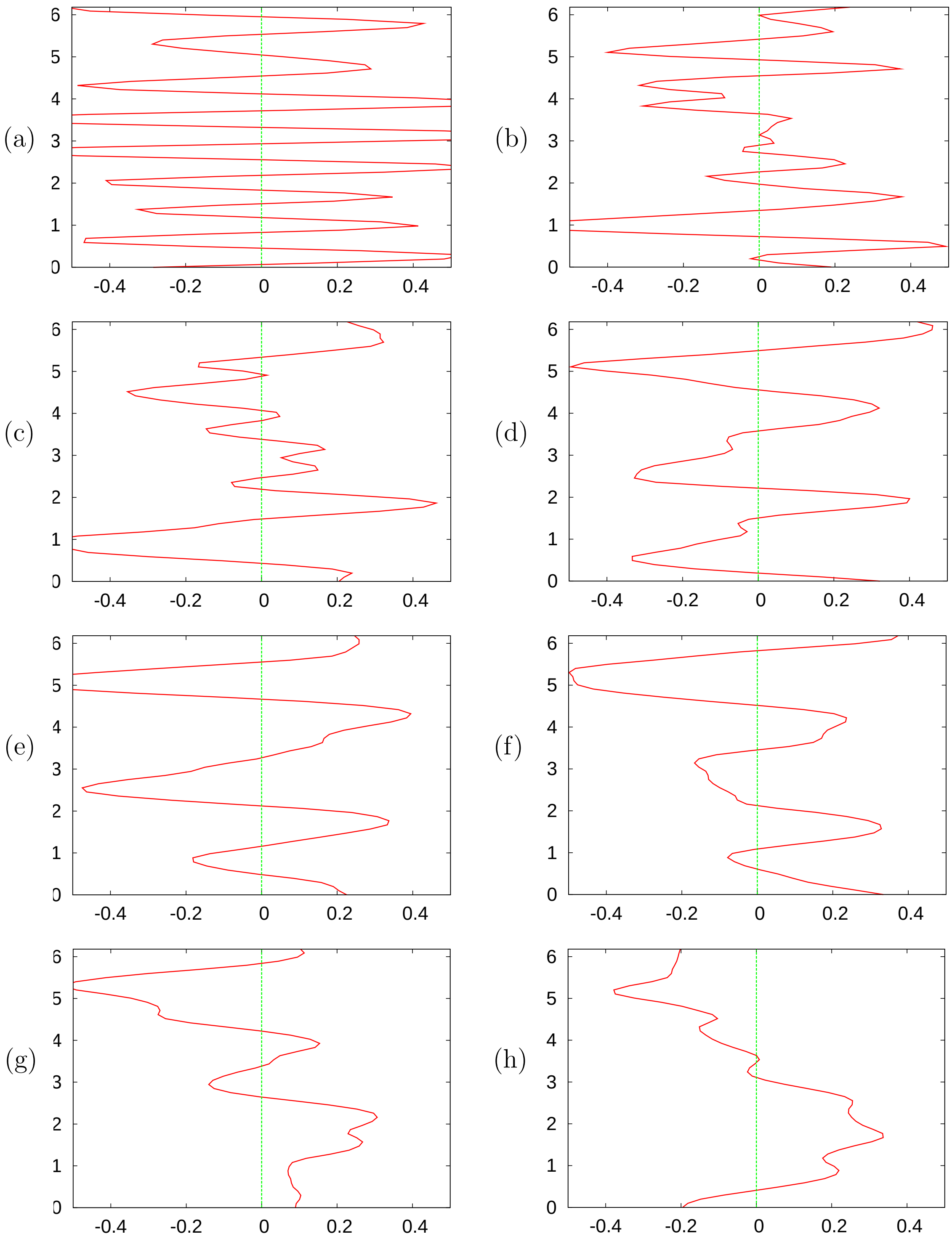


図 B-5: $\beta = 0$ の平均東西風の速度，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

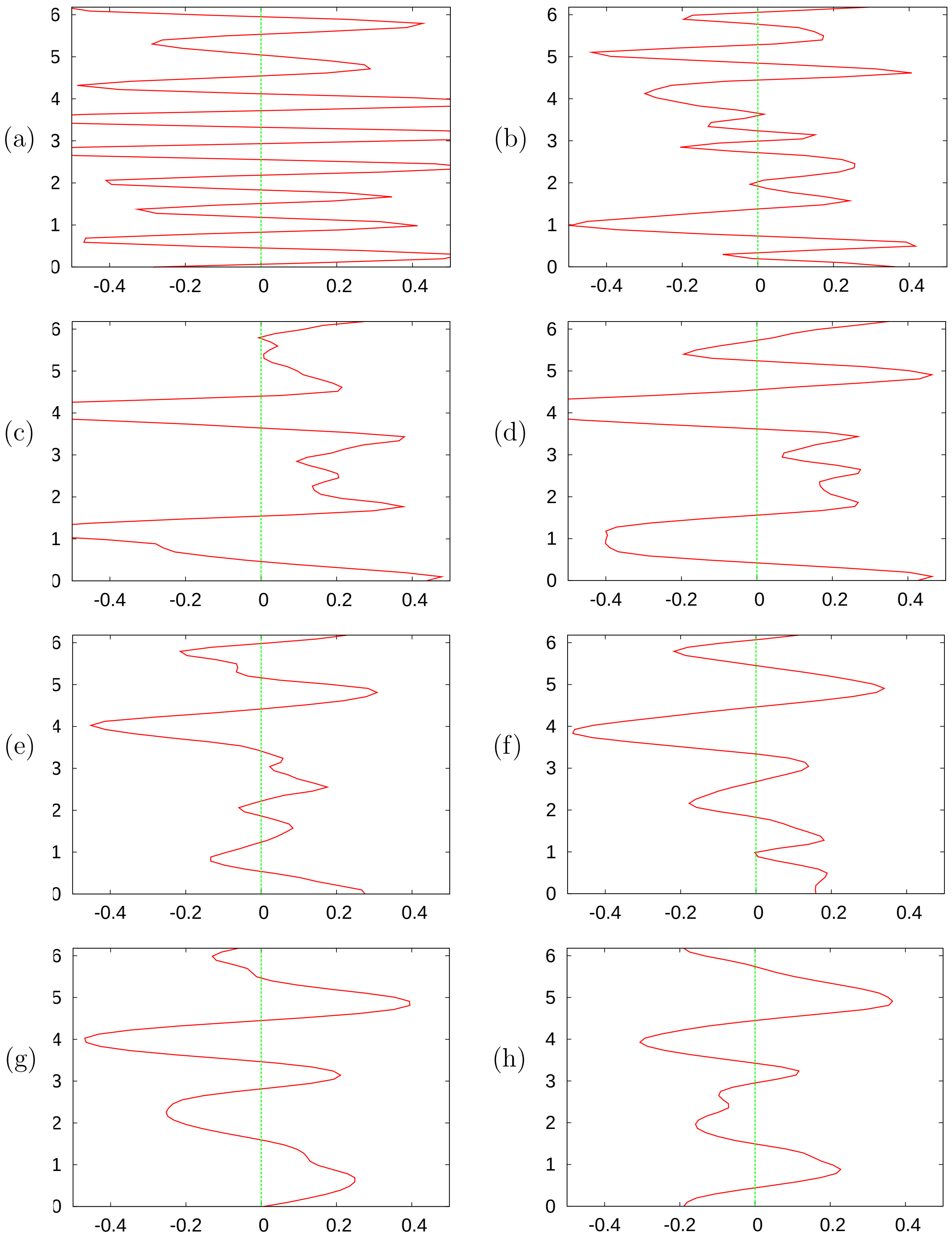


図 B-6: $\beta = 3.25$ の平均東西風の速度，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

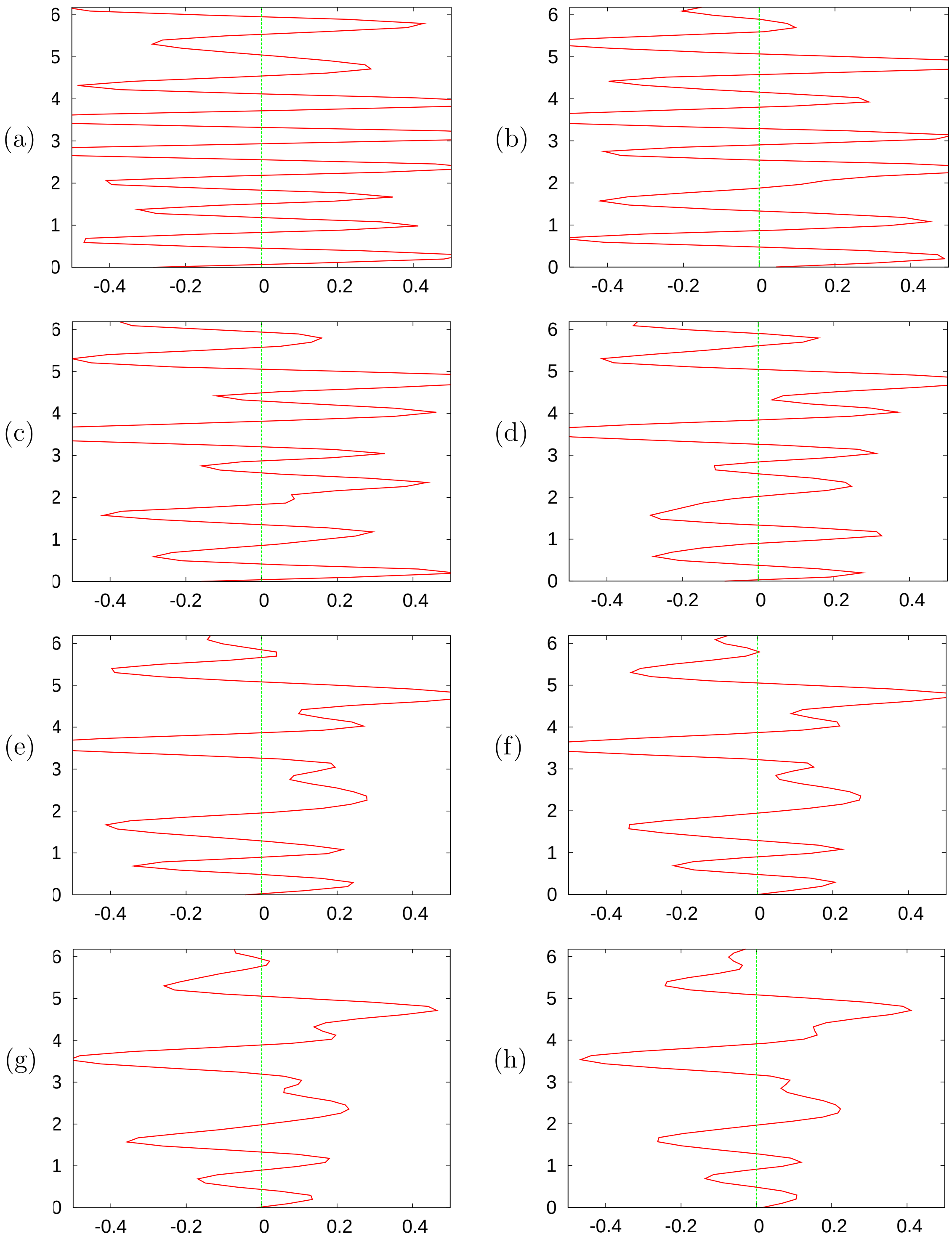


図 B-7: $\beta = 52$ の平均東西風の速度，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

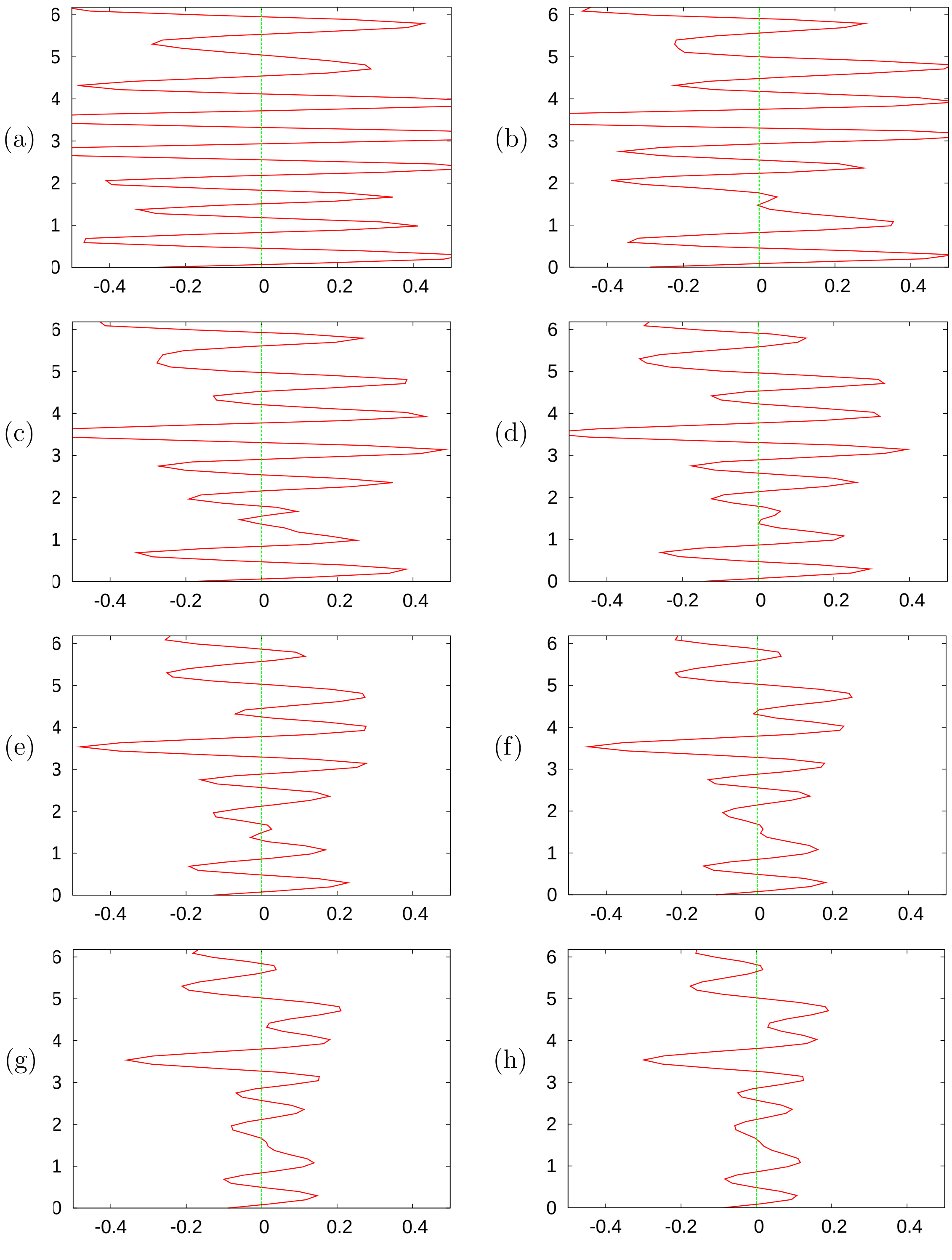


図 B-8: $\beta = 150$ の平均東西風の速度，(a)$t = 0$，(b)$t = 1$，(c)$t = 2$，(d)$t = 3$，(e)$t = 4$，(f)$t = 5$，(g)$t = 6$，(h)$t = 7$

付録 C 各物理量のデータ

β	ν	time	$\langle k \rangle$	C_x	$U_{r.m.s}$	k_β	L_β
0	0.004	0	7.95633	0	1.41414	-	-
		1	6.80759	0	1.10842	-	-
		2	5.12953	0	0.93292	-	-
		3	4.11913	0	0.83752	-	-
		4	3.54154	0	0.77879	-	-
		5	3.16583	0	0.73723	-	-
		6	2.89378	0	0.70539	-	-
		7	2.65475	0	0.67961	-	-
3.25	0.004	0	7.95633	-0.05134	1.41414	1.07196	5.85842
		1	6.85550	-0.06915	1.10830	1.21087	5.18635
		2	5.32974	-0.11441	0.92938	1.32230	4.74930
		3	4.38857	-0.16875	0.82890	1.40016	4.48520
		4	3.78140	-0.22729	0.76461	1.45783	4.30777
		5	3.37548	-0.28524	0.71876	1.50361	4.17661
		6	3.07116	-0.34457	0.68332	1.54211	4.07234
		7	2.85026	-0.40005	0.65477	1.57536	3.98639
52	0.004	0	7.95633	-0.82144	1.41414	4.28786	1.46460
		1	7.34324	-0.96434	1.10463	4.85152	1.29443
		2	6.34913	-1.28996	0.89898	5.37788	1.16774
		3	5.65673	-1.62507	0.76653	5.82400	1.07829
		4	5.17994	-1.93800	0.67322	6.21455	1.01053
		5	4.88559	-2.17856	0.60241	6.56961	0.95591
		6	4.68010	-2.37407	0.54558	6.90331	0.90970
		7	4.51602	-2.54971	0.49826	7.22365	0.86936
150	0.004	0	7.95633	-2.36955	1.41414	7.282560	0.86277
		1	7.67066	-2.54933	1.10101	8.253430	0.76128
		2	7.23412	-2.86629	0.87262	9.270820	0.67774
		3	6.76423	-3.27835	0.70862	10.28787	0.61074
		4	6.41378	-3.64639	0.49807	12.27111	0.51203
		6	5.78909	-4.47580	0.42773	13.24179	0.47450
		7	5.52231	-4.91869	0.37241	14.19130	0.44275

β：β 効果，ν：動粘性係数，$\langle k \rangle$：平均波数，C_x：x 軸方向の位相速度，U：速度の r.m.s，k_β：Rhines スケールに対応する波数，L_β：Rhines スケール

表 C-1: 数値計算の結果データ

謝辞

本論文の作成にあたり，指導教官である林 祥介教授，小高 正嗣助手には本研究の題材を与えて頂き, ご指導を賜りました．森川 靖大さん，山田 由貴子さん，小西丈予さんには貴重な時間を割いて論文をチェックして頂き，多くの助言を頂きました．地球流体力学研究室の皆様に様々なことを助けられました．本論文の作成にあたりご協力頂いた皆様に心より感謝いたします.

参考文献

石岡圭一，2004: スペクトル法による数値計算入門，東京大学出版会, 1–52.

九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻，2001: 地球環境を学ぶための流体力学，成山堂書店，158–193.

松田佳久，2000: 惑星気象学，東京大学出版会，169–192.

Rhines, R. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J.FluidMech.*, 69, 3, 417–443.

竹広真一, 石岡圭一, 柿並義宏, 西澤誠也, 森川靖大, 小高正嗣, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2005: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL) http://www.gfddennou.org/library/spmodel/ 地球流体電脳倶楽部