

# 二次元 $\beta$ 平面乱流における擬似保存量について

京大院理M2 齋藤泉

# $\beta$ 平面上の2次元乱流

- 支配方程式：準地衡 (CHM) 方程式

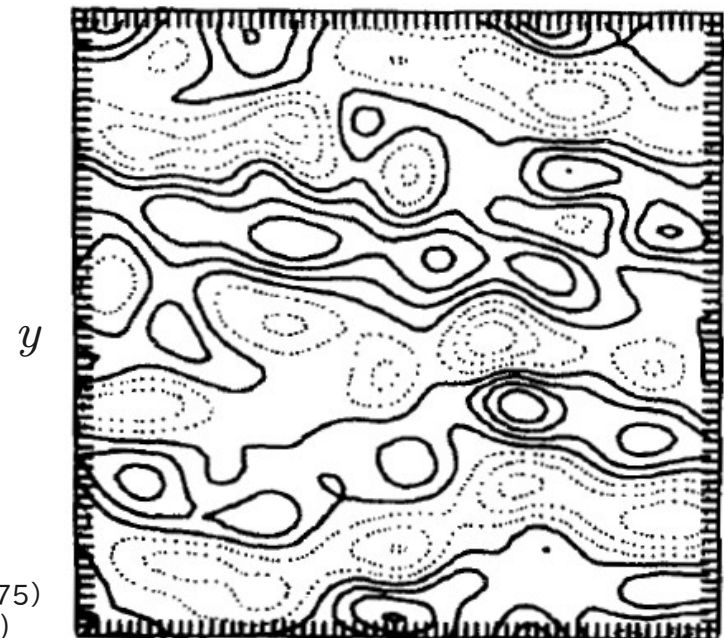
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2 \psi - \frac{1}{\lambda^2} \psi \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0$$

- 大気・海洋の大規模運動のモデル方程式

$\psi$ : 流線関数  
 $t$ : 時間  
 $x$ : 東向き正  
 $y$ : 北向き正  
 $\lambda$ : Rossby の変形半径  
 $\beta$ : Coriolisパラメタの  
 $y$ 微分  
 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

- 経度 ( $x$ ) 方向に引き伸ばされた構造を持つ傾向 (Rhines, 1975)

$\psi$  field



Rhines (1975)  
FIGURE 6 (b)

$x$

# 波数空間での記述

- 準地衡方程式のスペクトル形:

$$i \frac{\partial \psi_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} + i \iint (|\mathbf{k}|^2 + \lambda^{-2}) W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \overbrace{\delta(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}^{\text{Dirac delta}} \psi_{\mathbf{k}_1} \psi_{\mathbf{k}_2} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$$

- 保存量:

- エネルギー :  $E = \int \varepsilon_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$

- エンストロフィー :  $\Omega = \int |\mathbf{k}|^2 \varepsilon_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$

→ エネルギーの逆カスケード

- $\beta$  項の影響

- エネルギーの逆カスケードを妨げる.
- エネルギーカスケードを非等方的にする.  
→ Rhines 効果
- 保存量を用いる説明は無かった.

$$\mathbf{k} = (k, l) = (\text{zonal, meridional})$$

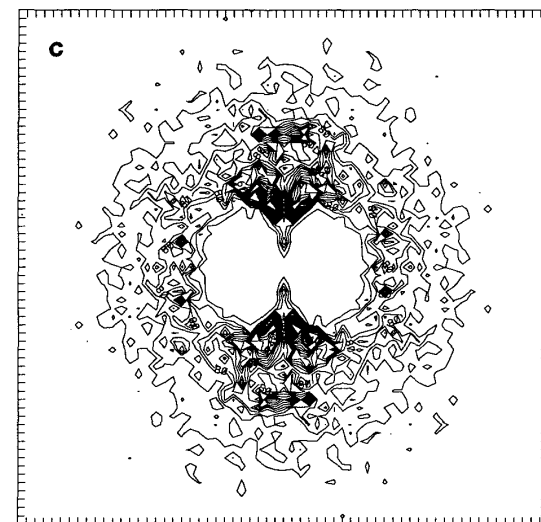
$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(x, y, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

$$W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = (4\pi)^{-1} (k_1 l_2 - k_2 l_1) (|\mathbf{k}_2|^2 - |\mathbf{k}_1|^2)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = -\frac{\beta k}{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^{-2}}$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (|\mathbf{k}|^2 + \lambda^{-2}) |\psi_{\mathbf{k}}|^2$$

2D エネルギースペクトル



Vallis and Maltrud  
(1993) Fig.5c

k

- 表式

$$Z = \int f_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$$

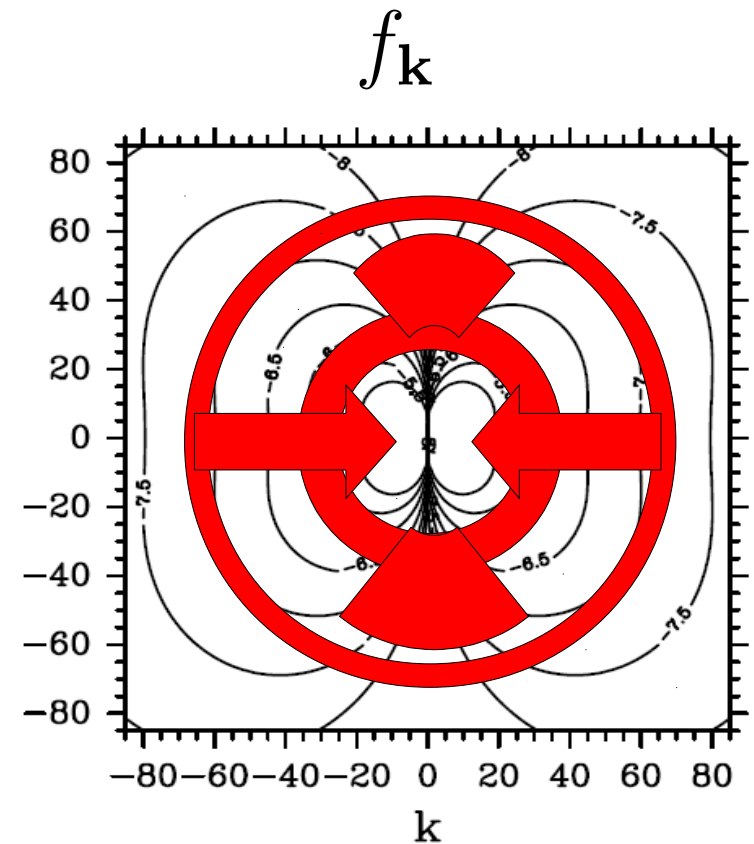
ただし

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^{-2}}{\beta k} \left( \tan^{-1} \left[ \frac{l - k\sqrt{3}}{\lambda |\mathbf{k}|^2} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{l + k\sqrt{3}}{\lambda |\mathbf{k}|^2} \right] \right)$$

- Balk (1991) が発見

- 非等方カスケードを説明するために使われる (Balk, 2005)

- Nazarenko and Quinn (2009) が命名



increase along  $k$ -axis

(Labels :  $10^x$ )  
( $\lambda = \pi$ )

# 発想

- ・ ゾノストロフィーの表式はとても複雑  
→何か別の(数値的な)方法でこの形を導出できないだろうか?

- ・ 二次の量  $\Phi = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}$  を考える

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{エネルギー:} \quad f_{\mathbf{k}} = 1 \\ \text{エンストロフィー:} \quad f_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^2 \\ \text{ゾノストロフィー:} \quad f_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^{-2}}{\beta k} \left( \tan^{-1} \left[ \frac{l - k\sqrt{3}}{\lambda |\mathbf{k}|^2} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{l + k\sqrt{3}}{\lambda |\mathbf{k}|^2} \right] \right) \end{array} \right.$$



保存する

それなら

保存する



$$f_{\mathbf{k}} = ?$$

# 手順

- ・ 離散的な波数空間において、エネルギースペクトルの、任意の重み  $f_{\mathbf{k}}$  付きの和を考える。

$$\Phi = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad (1)$$

- ・ (領域が有限の場合の) 支配方程式を用いると上式は次の様に評価できる。

$$\Phi = \Phi_0 + \underbrace{\frac{i}{3} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \frac{f_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} + f_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2} + f_{\mathbf{k}_2} W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}} \delta_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}_1} \psi_{\mathbf{k}_2}}_{O(\psi^4)} + O(\psi^4) \quad (2)$$

- ・ 非線型性が十分小さいとき、 $\Phi$  の主要な変動はこの部分なので、2乗和をとると、

$$I = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \left( \frac{f_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} + f_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2} + f_{\mathbf{k}_2} W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}} \delta_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} |\psi_{\mathbf{k}}| |\psi_{\mathbf{k}_1}| |\psi_{\mathbf{k}_2}| \right)^2 \quad (3)$$

→保存性の指標とする

- ・  $I$  はベクトル  $\mathbf{F}$  の半正定値対称二次形式で表せる。

$$I = \mathbf{F}^T \mathbf{S} \mathbf{F} \quad (4)$$

ここで  $\mathbf{S}$  は対称行列で次の様に表せる。

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T \quad (5)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N] \quad (6)$$

固有ベクトル  
(正規直行基底)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \quad (8) \quad \text{固有値}$$

- ・ 実際に固有値解析すると

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (9)$$

であり、 $v_1$  と  $v_2$  はエネルギーとエンストロフィーの係数の線型結合であることが分かる。

- ・ 問題:

- 二次形式

$$I = \mathbf{F}^T S \mathbf{F} \quad (10)$$

を、次の拘束条件

$$\Phi = \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = C \quad (11) \quad \text{及び} \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (12)$$

の下で最小にするベクトル $\mathbf{F}$ を求める (3番目の保存量)。

- ・ 解:

$$\mathbf{F}' = \frac{C(P\tilde{D}P^T)\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T(P\tilde{D}P^T)\mathbf{e}} \quad (13)$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \lambda_3^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_N^{-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

# 結果

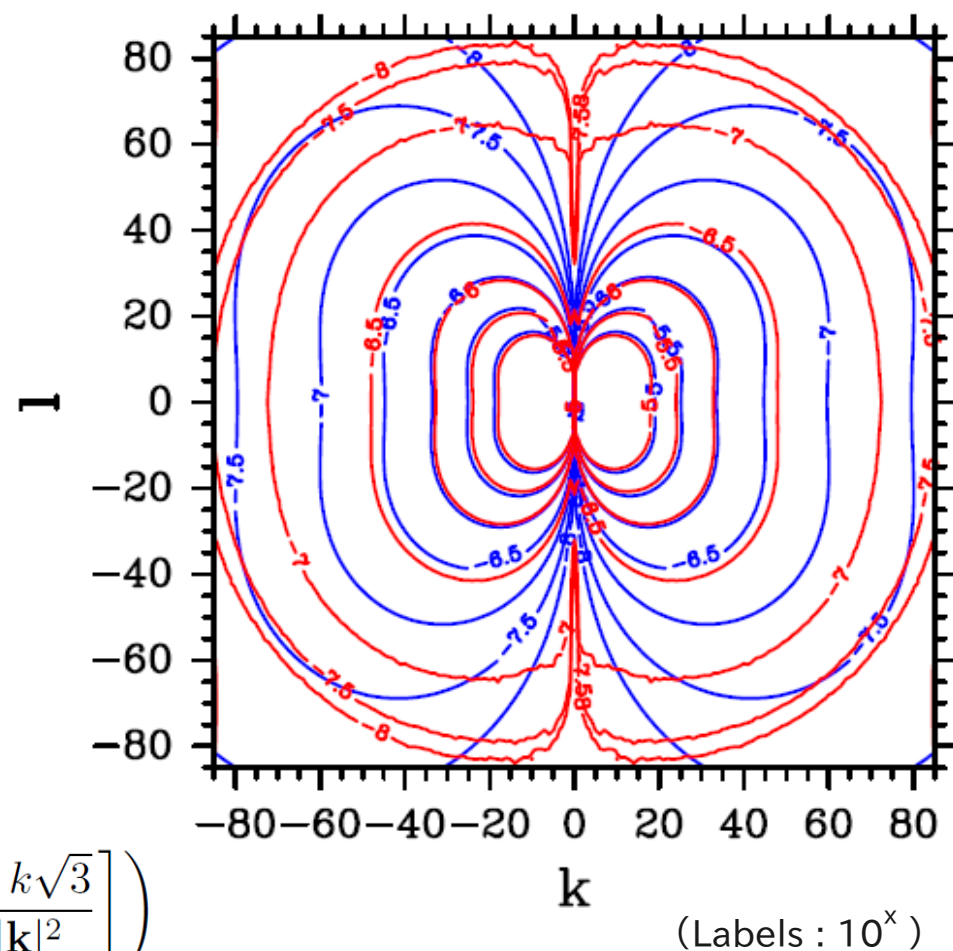
## - 実験設定:

- \*  $\lambda = \pi$
- \* 1Dエネルギースペクトル分布：一様
- \* 切断波数： $K_T = 85$

## - 結果：右図

- \* 赤：3番目の保存量の係数  $f_k$   
(最小化問題で求めた)
- \* 青：ゾノストロフィーの係数

$$f_k = \frac{|\mathbf{k}|^2 + \lambda^{-2}}{\beta k} \left( \tan^{-1} \left[ \frac{l - k\sqrt{3}}{\lambda |\mathbf{k}|^2} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{l + k\sqrt{3}}{\lambda |\mathbf{k}|^2} \right] \right)$$



- ・ 特に低波数で両者はほとんど一致している。



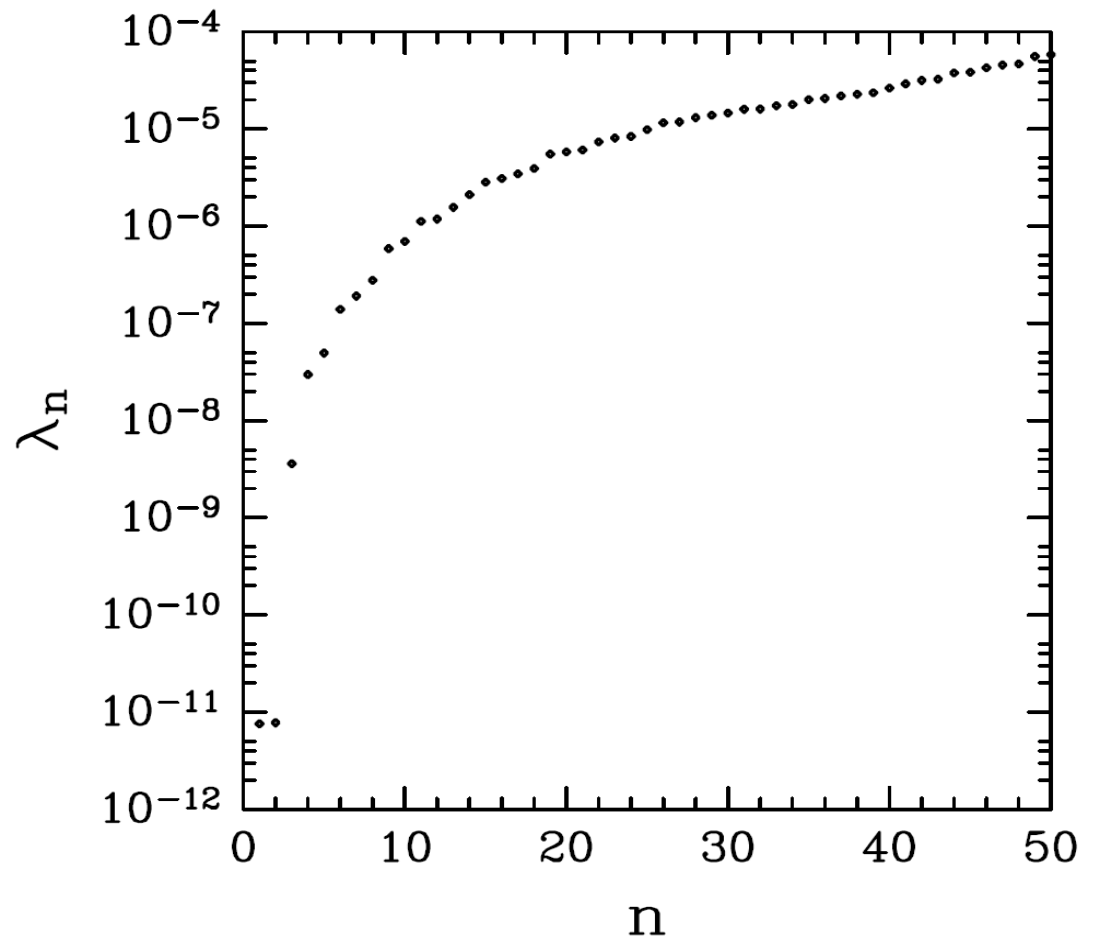
# まとめ

- ゾノストロフィーの係数に似たものを導出することができた.

予備スライド

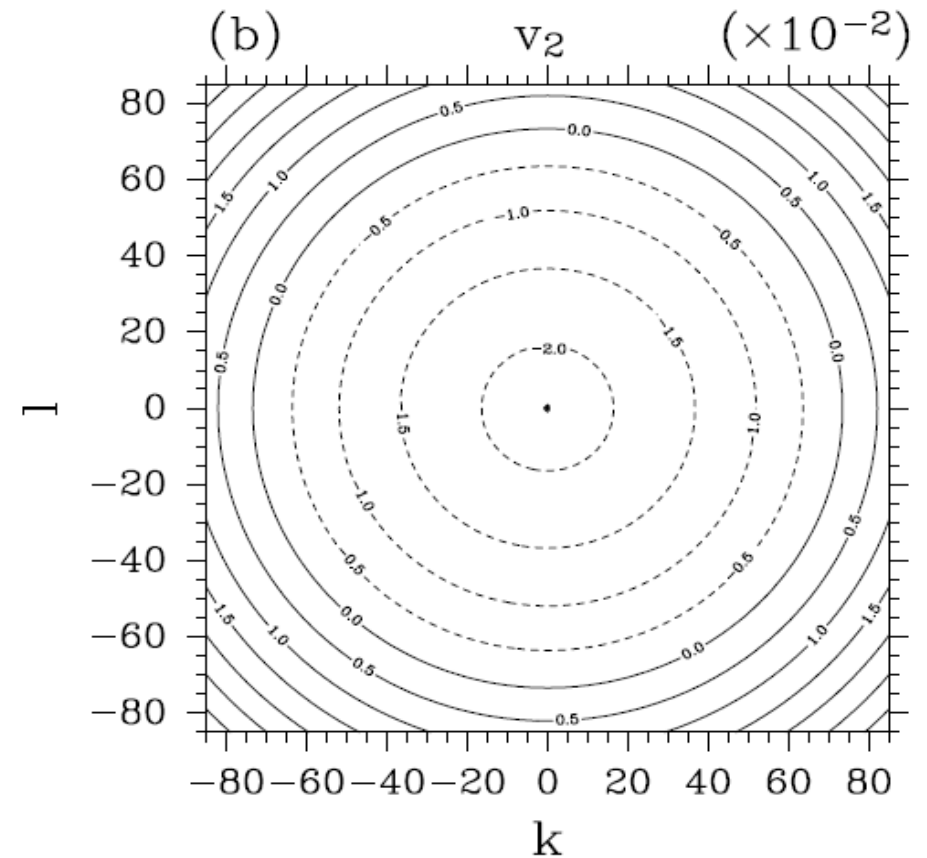
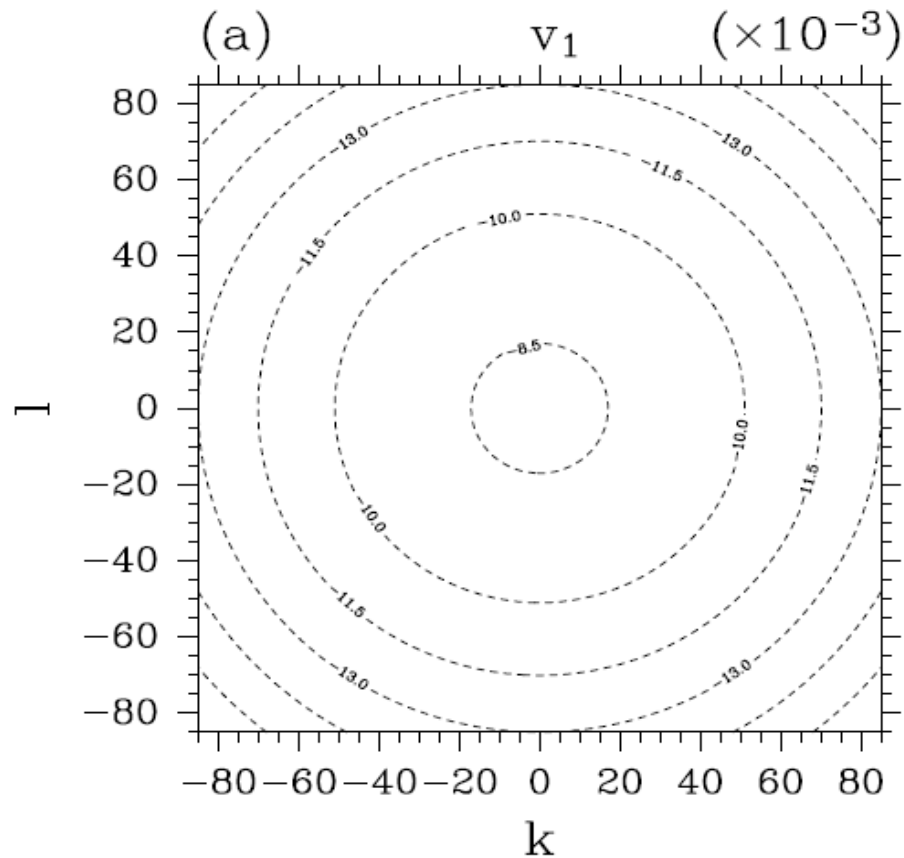
# Eigenvalues

- 50 smallest eigenvalues  
 $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{50}$



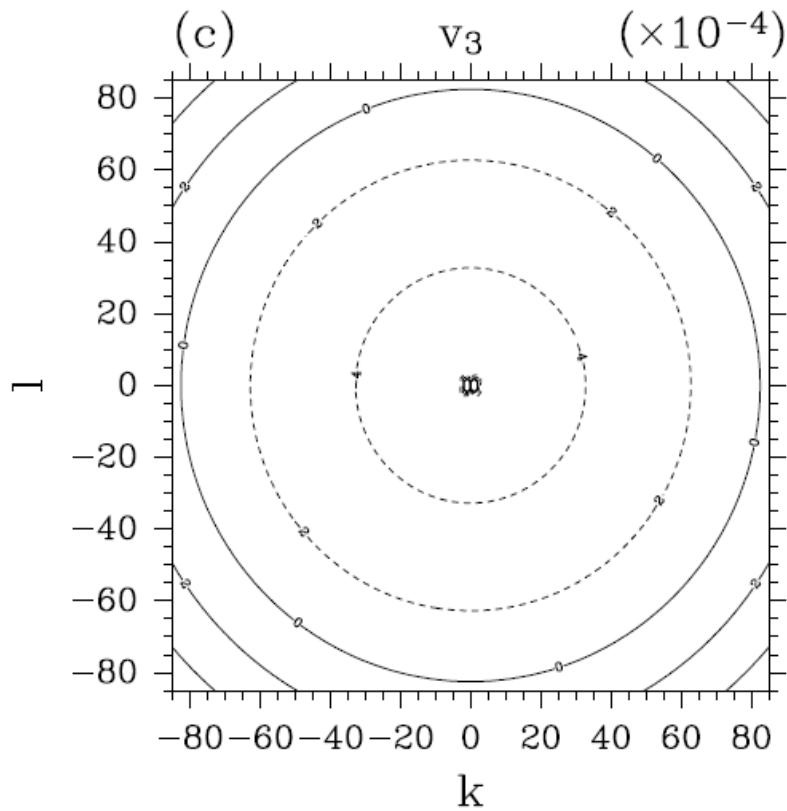
- $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are relatively very small.  
→ corresponding to zero eigenvalues.

# Eigenvector 1 and 2

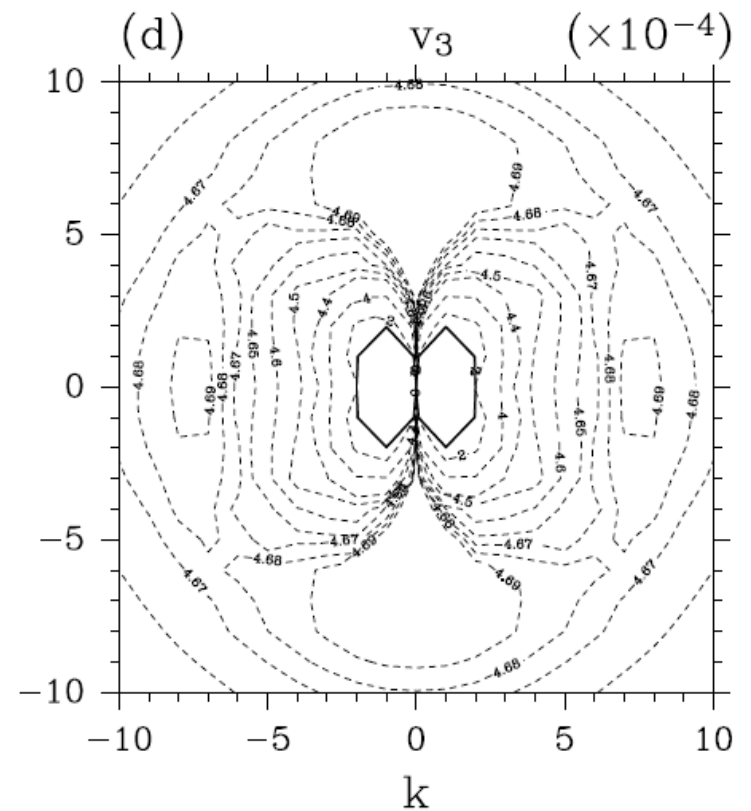


- Parabolic shape.
- Corresponding to linear combinations of energy and enstrophy.

# Eigenvector 3



magnify



- An anisotropic structure appears near the origin.

# Experimental setup 1

- Governing equation

- non-dimensionalized CHM eq. + hyper viscosity

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - \alpha^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = (-1)^{p+1} \nu_p \nabla^{2(p+1)} \psi.$$

(Freely decaying turbulence)

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 5 \\ \nu_p = 1.0 \times 10^{-18} \end{array} \right.$$

$$(\alpha^{-1} = \lambda)$$

- Domain

- $2\pi \times 2\pi$ , double periodic

- Discretization

- Space : Spectral method ( $K_T=85$ )
- Time : Classical 4th order Runge-Kutta  
 $\Delta T = 8 \times 10^{-4}$

# Experimental setup 2

17/24

- Initial condition

- random vorticity ( $\nabla^2 \psi$ ) field
- peak of 1D energy spectrum at  $K_0=15$
- (kinetic energy) = 0.5  
( $\rightarrow$  RMS velocity :  $U=1$ )

- Parameters

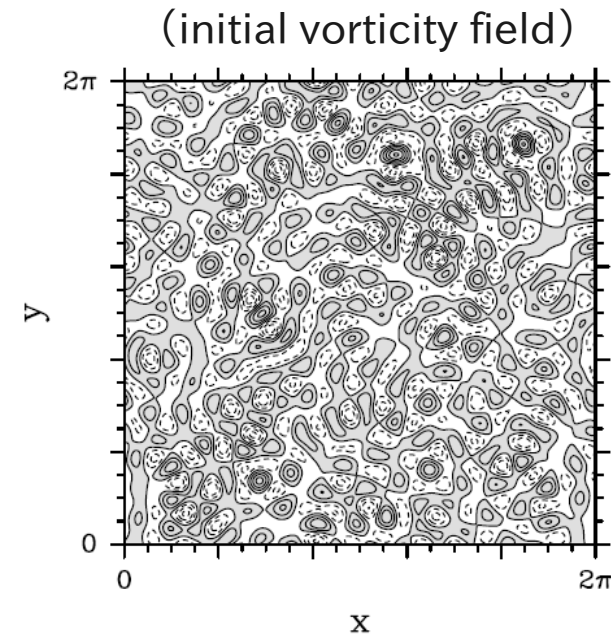
- \*  $\alpha = 1 / \pi$

- \*  $\beta = 200$  (run1), 450 (run2)



- Rhines wave number

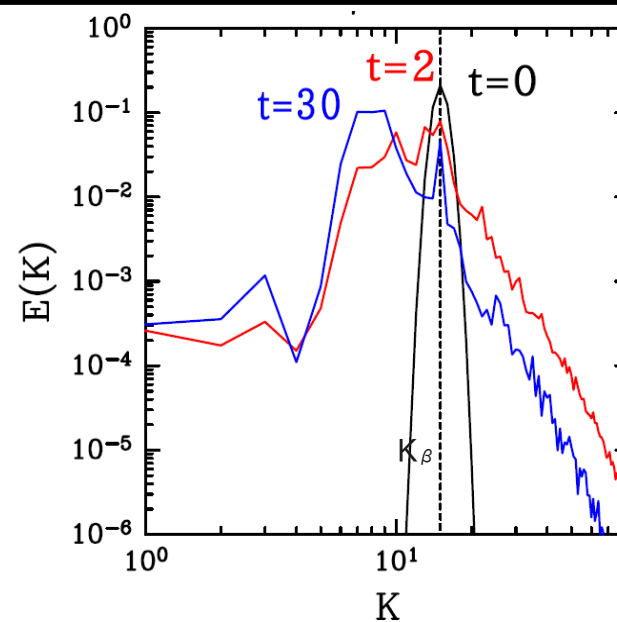
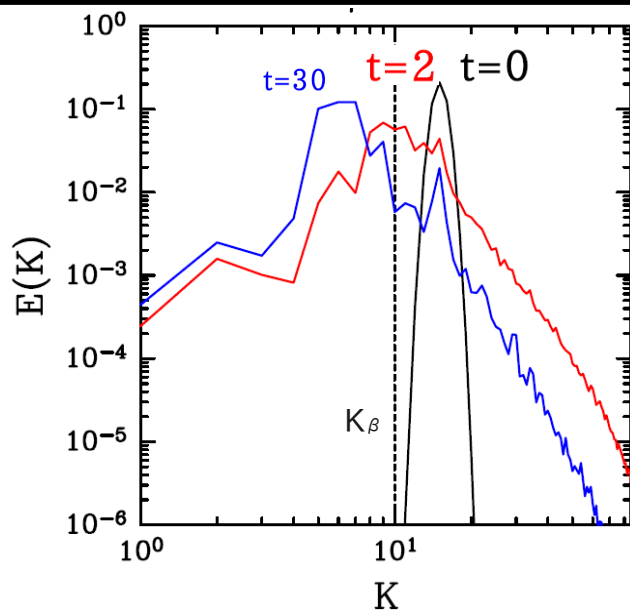
$$K_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{2U}} \quad : 10 \text{ (run1)} < K_0$$
$$: 15 \text{ (run2)} = K_0$$



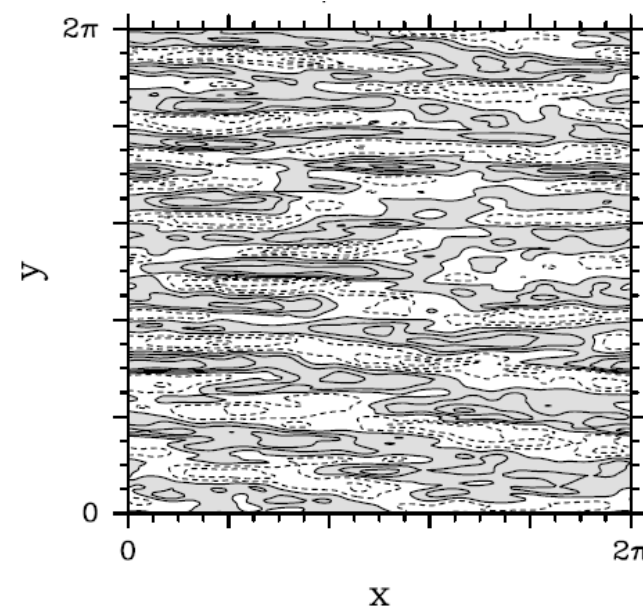
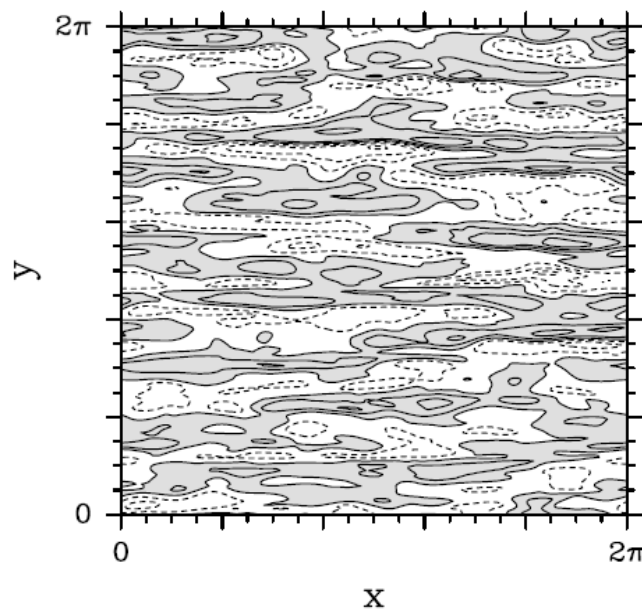
## run1 ( $K_\beta=10$ )

## run2 ( $K_\beta=15$ )

1D  
energy  
spectra  
( $t=0,2,30$ )



Vorticity  
field  
( $t=30$ )





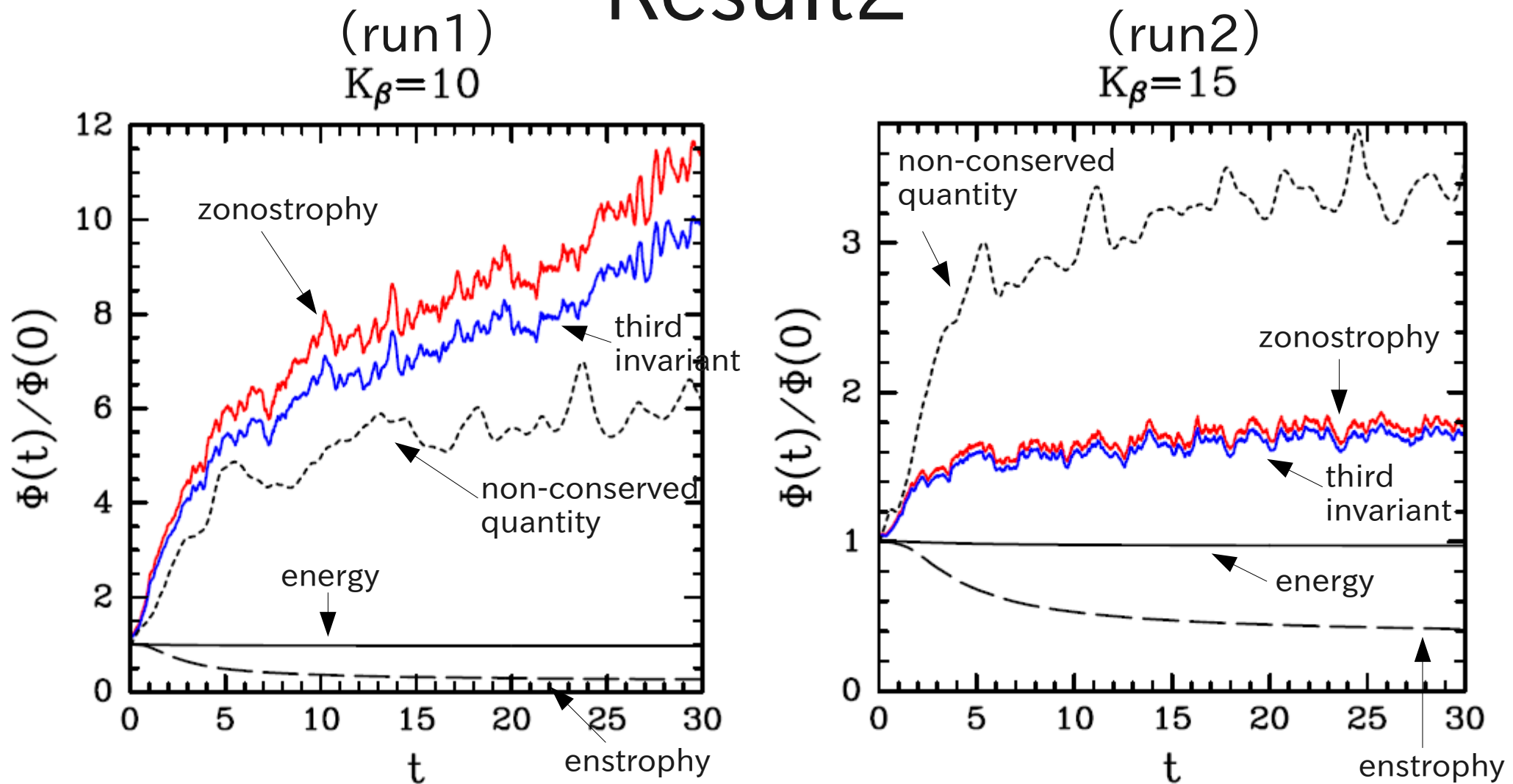
## List of quantities

$$\Phi = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}$$

where

	$f_{\mathbf{k}}$
energy	1
enstrophy	$ \mathbf{k} ^2 = k^2 + l^2$
zonostrophy	$\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \arctan \left[ \frac{\alpha(l - k\sqrt{3})}{ \mathbf{k} ^2} \right] - \arctan \left[ \frac{\alpha(l + k\sqrt{3})}{ \mathbf{k} ^2} \right] \right\}$
third invariant	solution of the minimization problem
a non-conserved quantity	$\frac{1}{ \mathbf{k} ^2 + \alpha^2}$

## Result2



- The conservation property of third invariant is comparable to that of zonestrophy.

# $\psi$ の分布が異なるとき

- Distribution of 1D energy spectrum

$$E_K \propto \left( \frac{2}{\sqrt{K/K_0} + \sqrt{K_0/K}} \right)^G \quad \begin{array}{l} K_0 = 7 \\ G = 18 \end{array}$$

$$K = \sqrt{k^2 + l^2}$$

- Coefficient of third invariant

\* truncation wavenumber :  $K_T=42$

