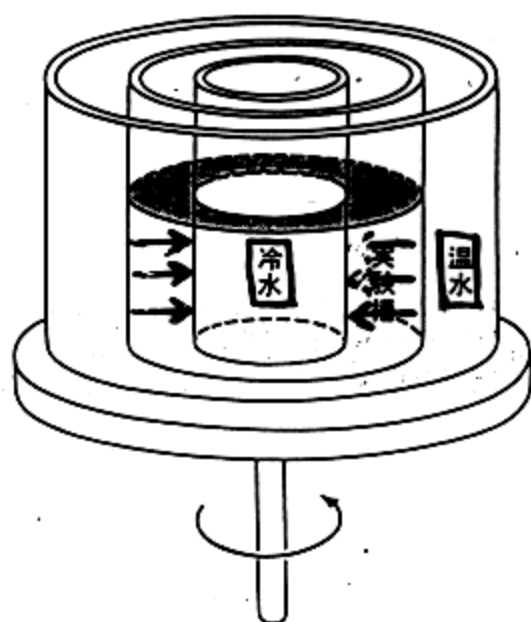
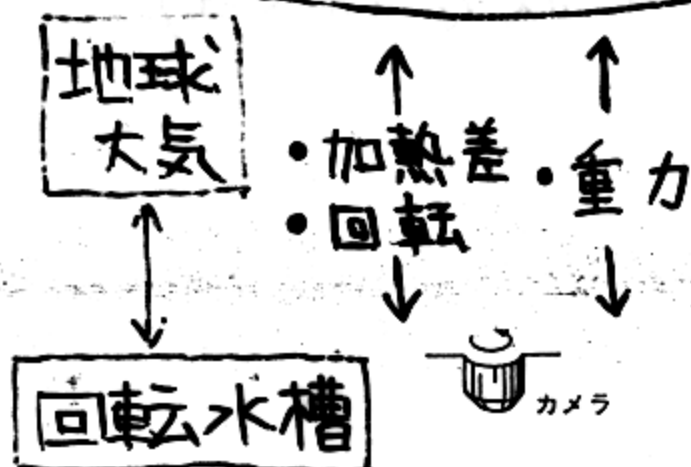
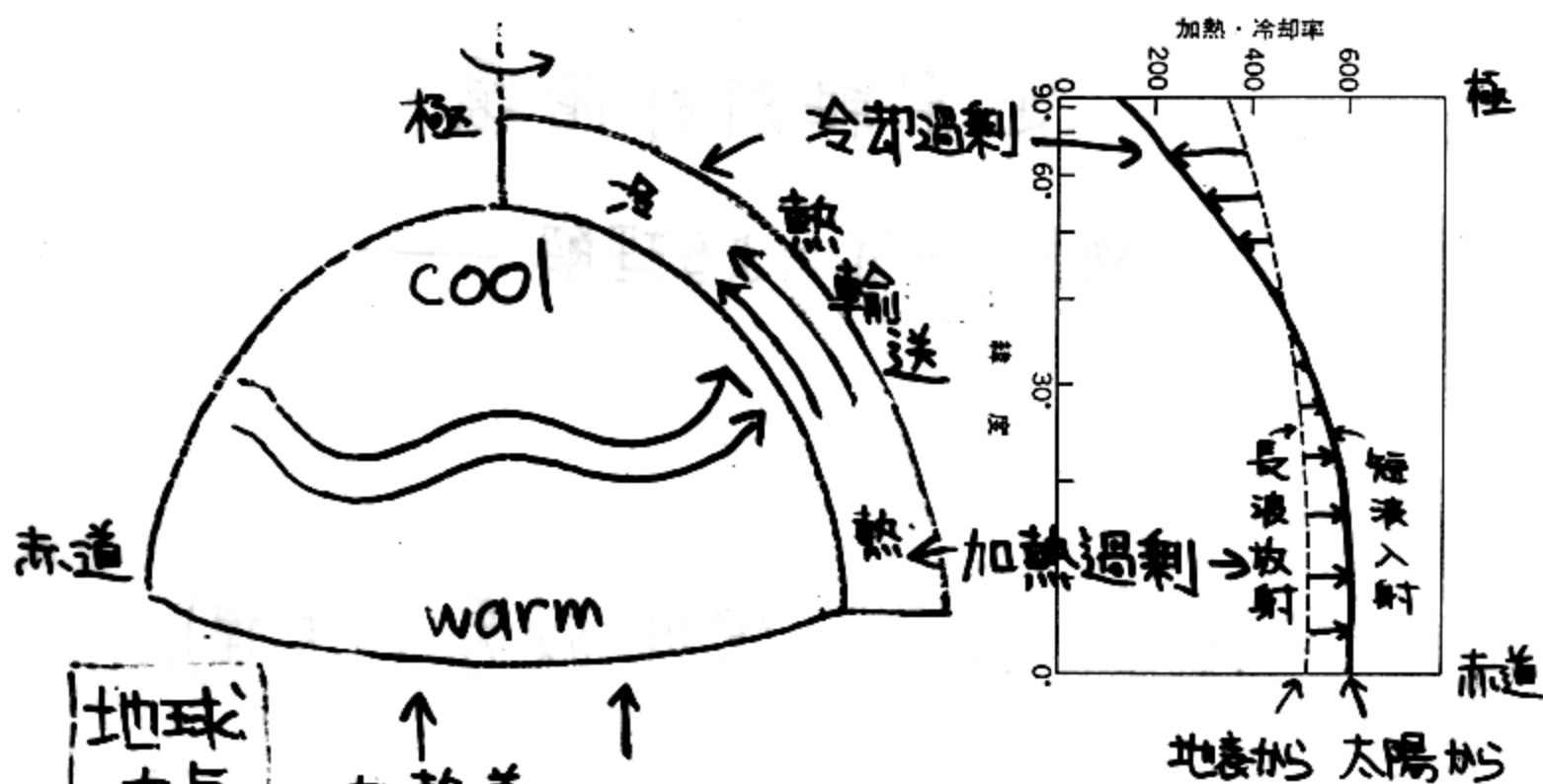


回転水槽実験での
定常軸対称循環

—— 簡単モデルによる理解 ——

菅田 誠治・余田 成男 (京大・理)

I Introduction



地球大気運動を
理解する助けと
なる室内実験

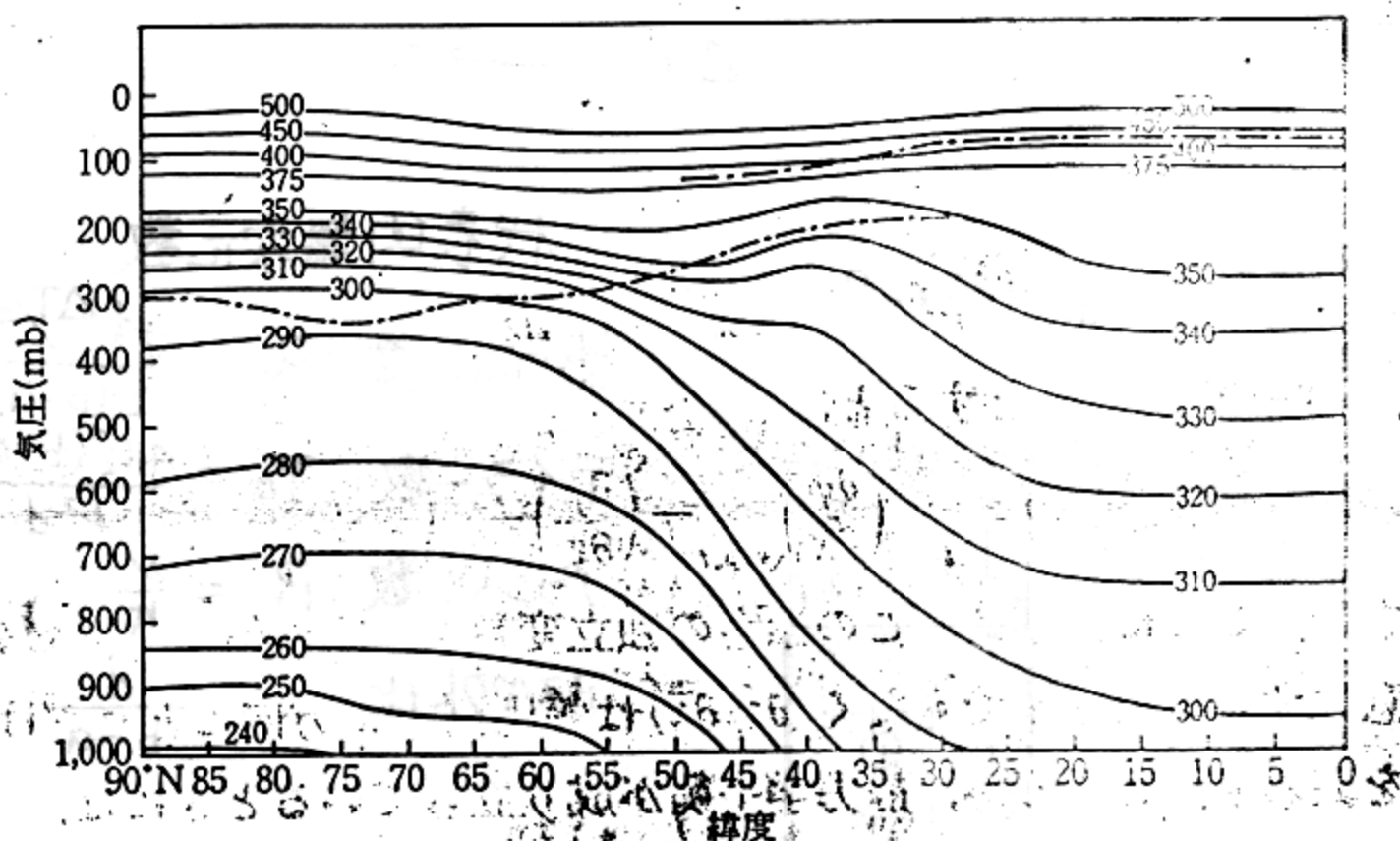
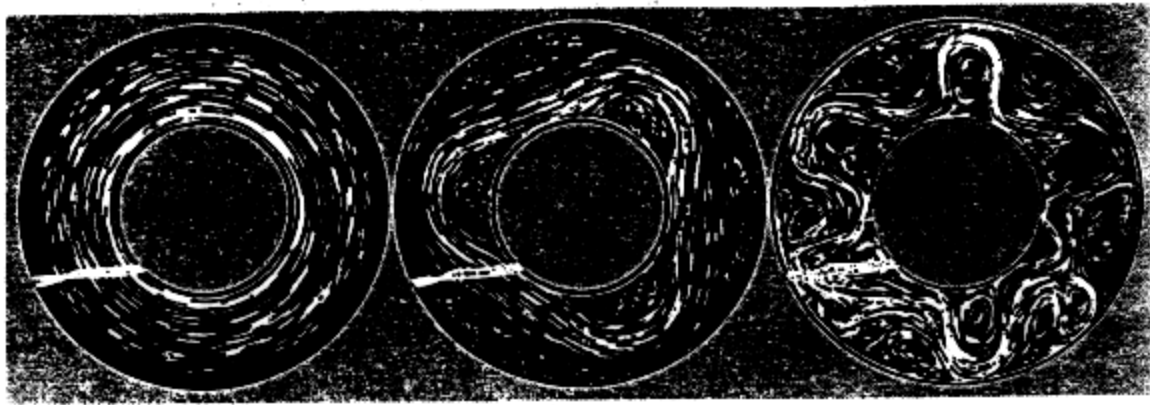


図3.1 80°Wに沿った北半球子午面上1月の平均温位の分布図(Dutton, 1976).

代表的な流れのパターン変化



定常軸対称流

定常波動

不規則波動

小 $\leftarrow \Omega \rightarrow$ 大

小 $\leftarrow \Delta T \rightarrow$ 大

代表的無次元数

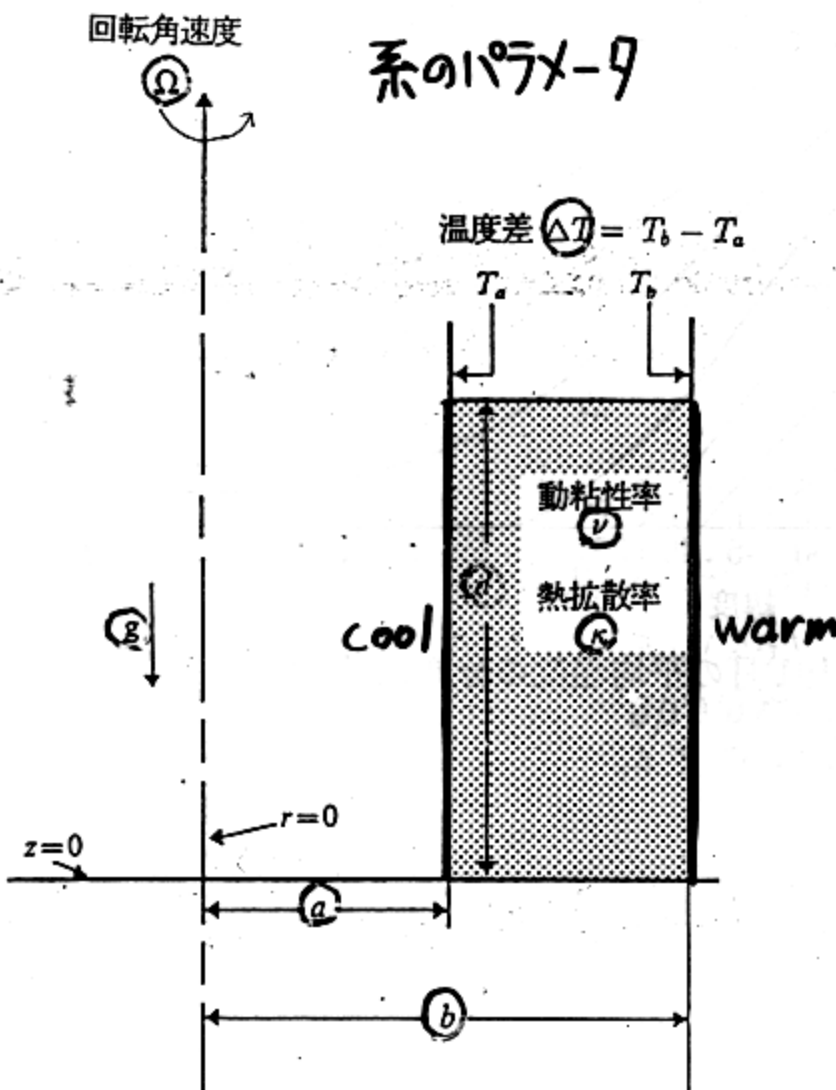
熱ロスビー数 $Ro_T = \frac{gd \Delta T / \tau}{\Omega^2 (b-a)^2}$

テイラー数 $Ta = \frac{4\Omega^2 (b-a)^5}{\nu^2 d}$

プラントル数 $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

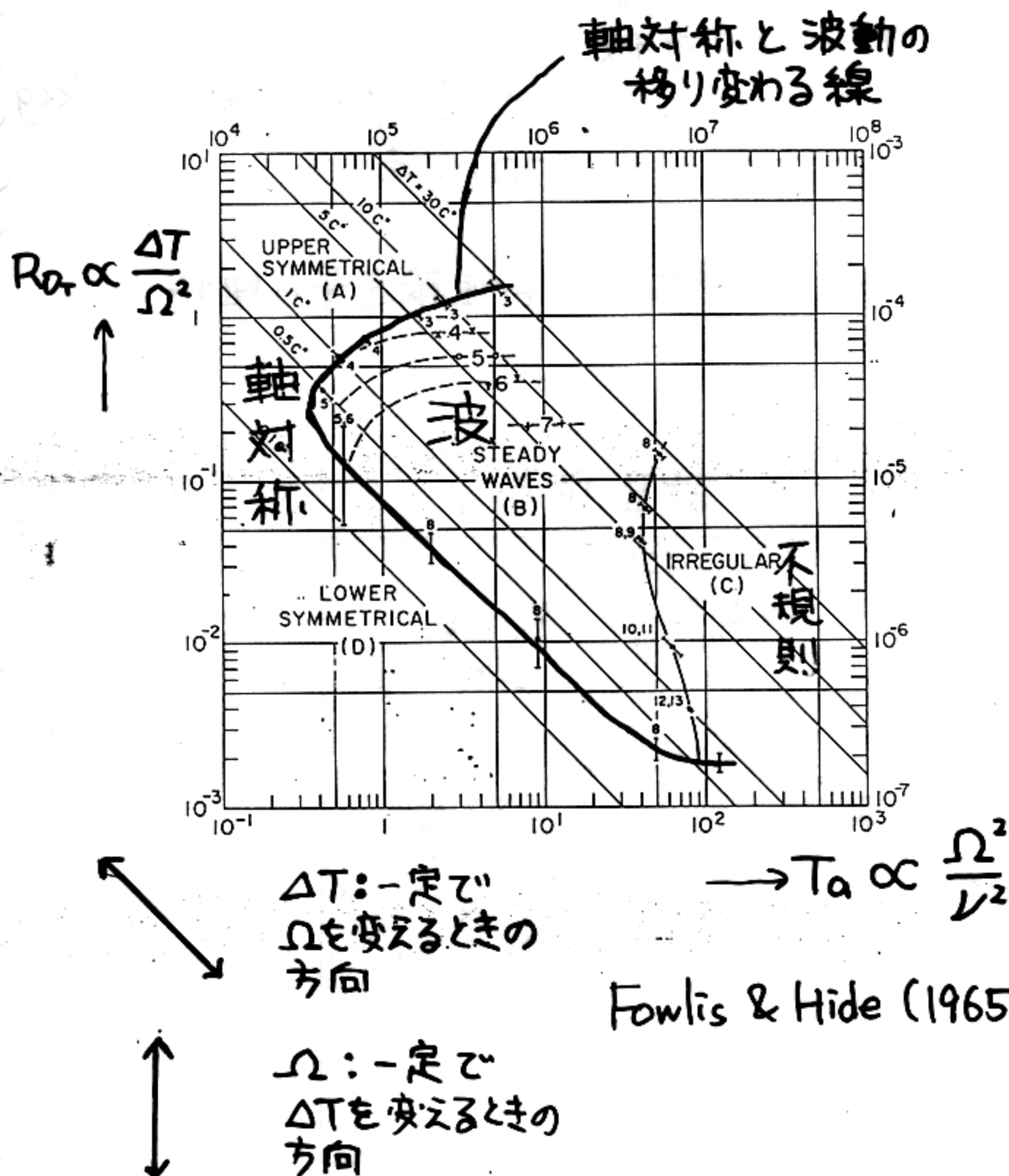
アスペクト比 $\frac{d}{b-a}$

系のパラメータ



パターン遷移の
無次元数依存性

流れのパターンの遷移の
 Ro_τ 数, Ta 数 依存性を
 示す レジームダイアグラム (水の場合)



レビュー

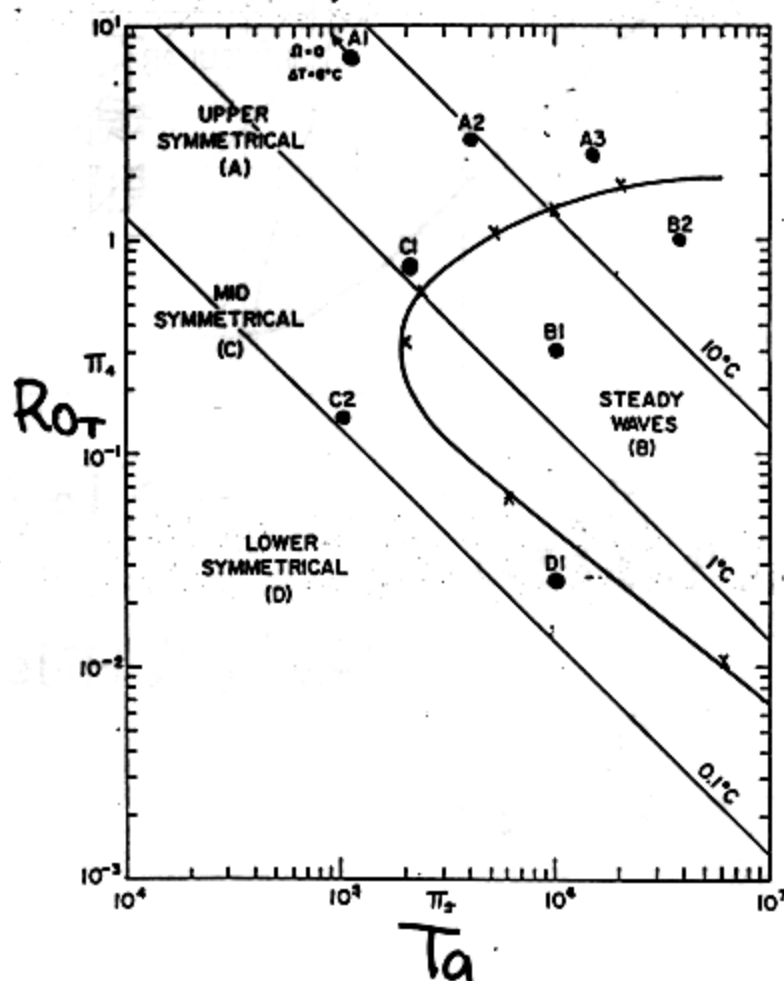
・回転水槽実験の数値実験 (その一)

Williams (1967 a, b)

軸対称解を方程式系の数値的時間発展で求めた。

- ・ 40×40 の空間差分
- ・ 作業流体は水
- ・ フシネスワ近似
- ・ full-nonlinear だが, 遠心力項は無視 ($r\Omega^2 \ll g$)
- ・ 時間方向は リーフフロッド法
- ・ 温度場, 速度場, 各種輸送量の解析

計算地点



レビュー

軸対称流の解析的研究

Hunter (67)

McIntyre (68)

• 主な仮定

伝導が支配

対流が重要

$Ro_T \ll 1$ } 下部軸
 $Ta \ll 1$ } 対称領域

$Ro_T \ll 1$ (Hunterよりは大)

• 各領域での項のバランス

内部領域

温度風バランス(コリオリ項と浮力項)

水平境界層

エワマン層(コリオリ項と粘性項)

側面境界層

粘性項と浮力項と
コリオリ項

粘性項と浮力項

• 解の決まり方

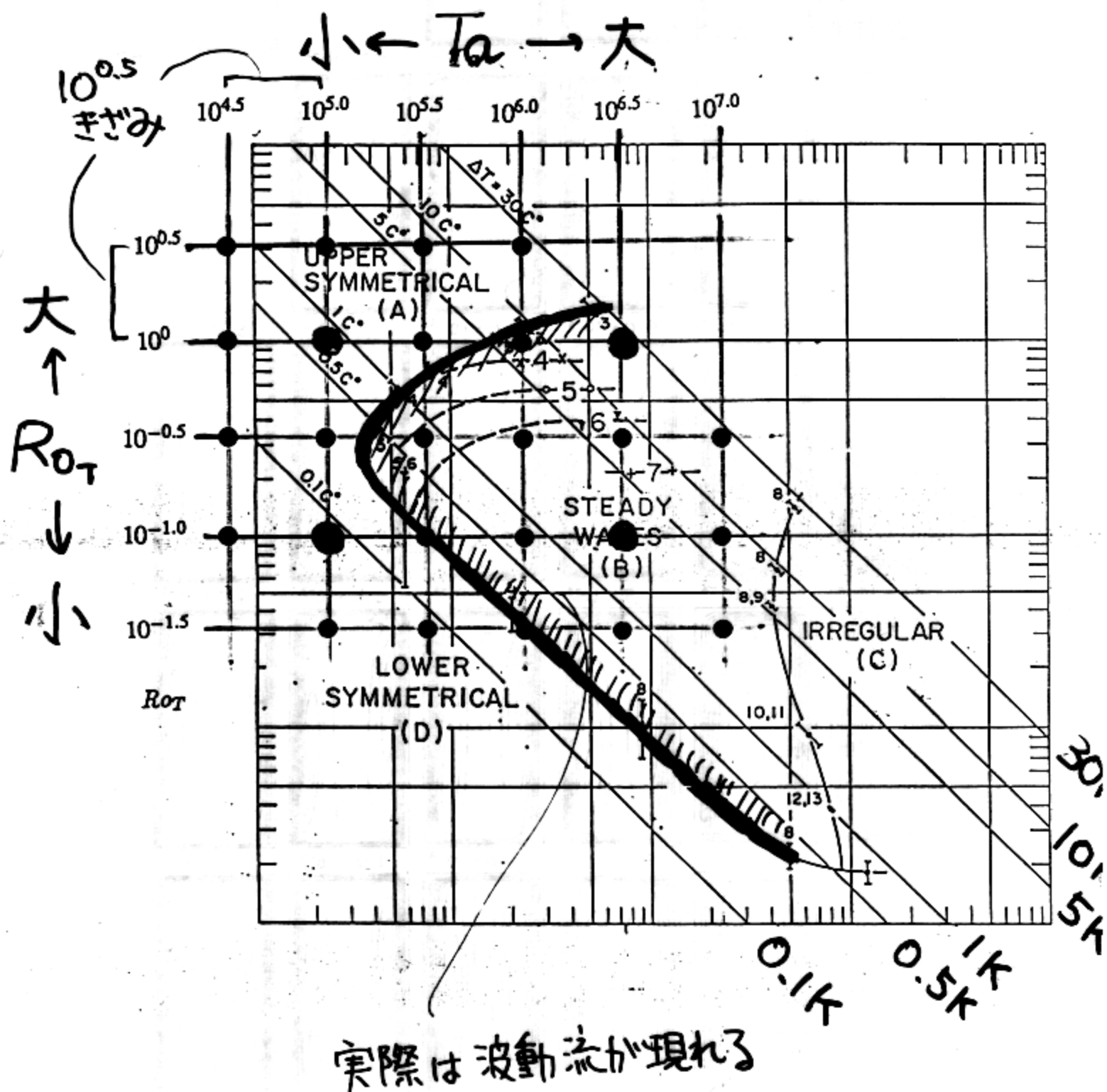
まず純伝導状態の
温度場が決定。
浮力項が既知と
なるので解が出る。

各領域を解くと計三個の
未定定数が登場。
三領域の兼ねあいから
三定数に関する連立
方程式が出る。

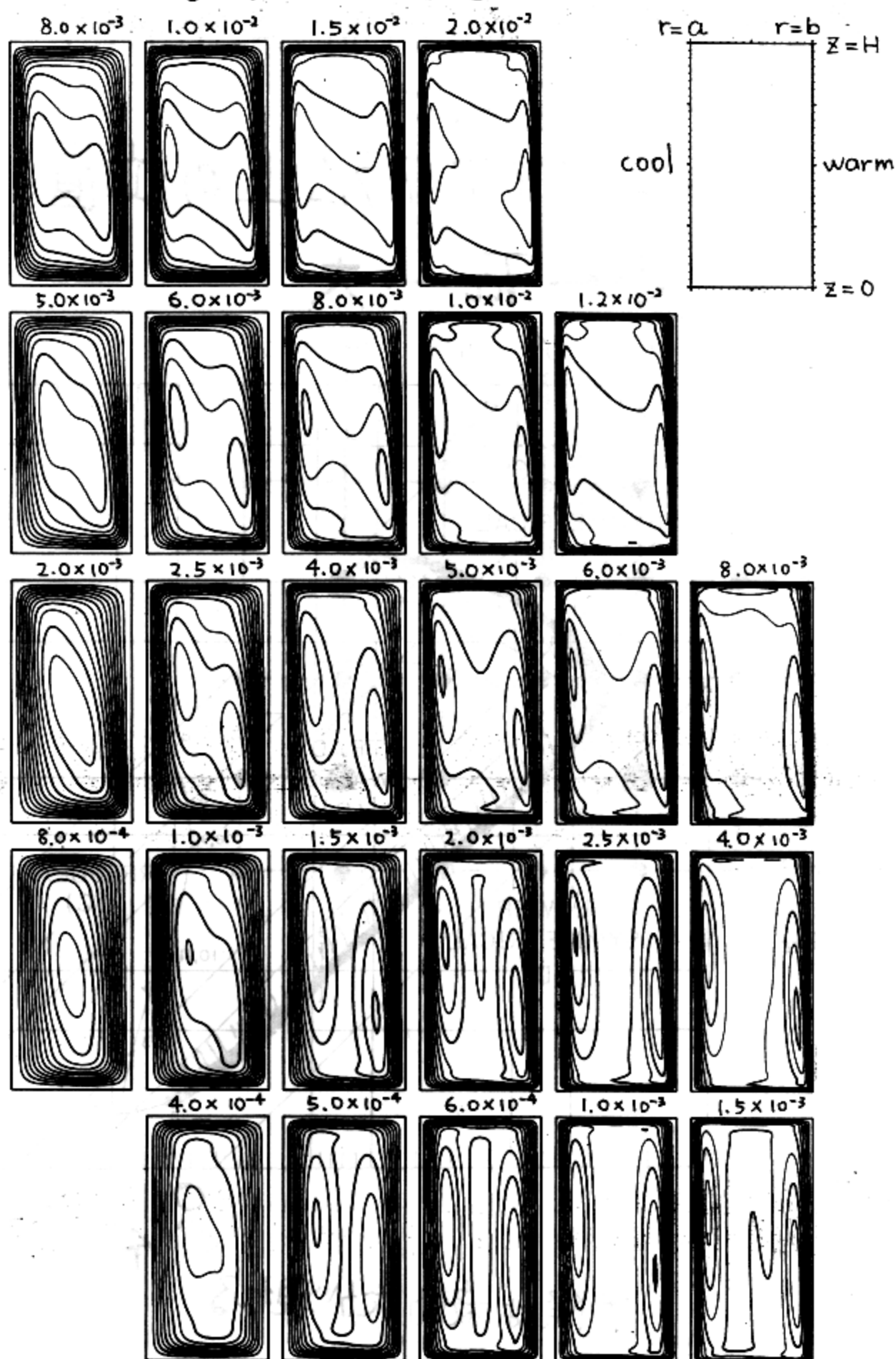
表 1.1: 様々な回転水槽実験

著者		測定量および研究内容
Faller	1956	<u>ディッシュパン型</u> による'前線'や'低気圧'の観測
Riehl and Fultz	1957	ディッシュパン型による'ジェット流'の構造 各変量, 輸送量
Hide	1958	<u>総熱輸送量, 波のドリフト速度, 温度場, 速度場</u>
Riehl and Fultz	1958	Riehl and Fultz(1957) の発展
Bowden and Eden	1965	<u>自由表面と固定表面</u> のときの総熱輸送量と温度場 インクによる可視化, 熱電対温度計
Elder	1965a,b	直方体容器中の加熱差による対流 主としてレイリー数に対する依存性
<u>Fowles and Hide</u>	1965	<u>遷移の各パラメータに対する依存性, 理論</u>
Lamber and Snyder	1966	<u>アスペクト比の影響, 内外筒の回転較差</u>
Pfeffer and Chiang	1967	<u>バシレーション</u> (tilted-trough, amplitude) エネルギー解析
Pfeffer and Fowles	1968	バシレーションの起きる条件, 波の分散 多点温度測定, 表面の写真撮影
Kaiser	1969	測定端子の影響, 温度場, 側面境界層の観測
Fowles and Pfeffer	1969	総熱輸送量, 温度場, 多点測定
Snyder and Youtz	1969	一方の壁温のサイン型時間変化による波数の遷移
Stone et al.	1969	リチャードソン数の変化による影響 <u>上下面の温度調節</u>
Hide and Mason	1970	半径方向の温度分布の変化の影響 (内部熱源) <u>内筒の大小有無の影響</u>
Fultz and Kaiser	1971	<u>測定端子の影響</u>
Kaiser	1971	総熱輸送量
Douglas et al.	1972	うきの撮影による流れの三次元構造
Hart	1972a	ディッシュパン型, 二層準地衡方程式 上ぶたの回転による不混和二流体の実験
Kaiser	1972	外部パラメータと内部熱的パラメータの関係 温度場
Ketchum	1972	高テイラー数 ($b-a$: 大) における実験, 温度場 4×4の熱電対
Douglas and Mason	1973	軸対称と非軸対称の遷移の主としてアスペクト比 に対する依存性
Fein	1973	表面 (自由, 固定) の影響
Hart	1973	ディッシュパン型, 不混和二流体の実験, バシレーション
Kaiser	1973	総熱輸送量, Nusselt 数依存性
Pfeffer et al.	1974	バシレーション (wave-amp.), 多点観測 エネルギー解析, 波数解析

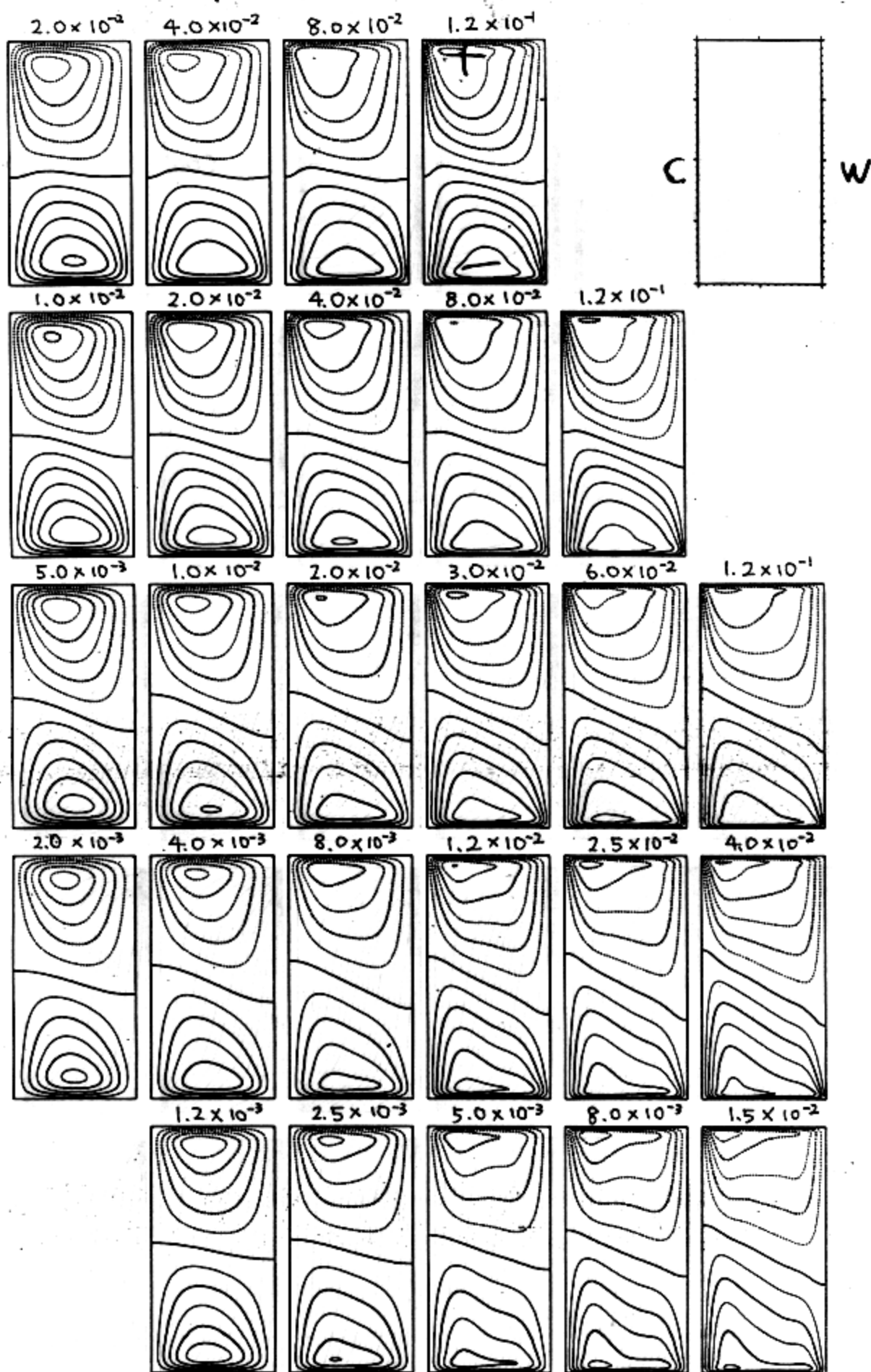
数値的に軸対称定常解を
求めた 26 点の
レジームダイアグラム上の位置



子午面循環



東西風



Ro_T

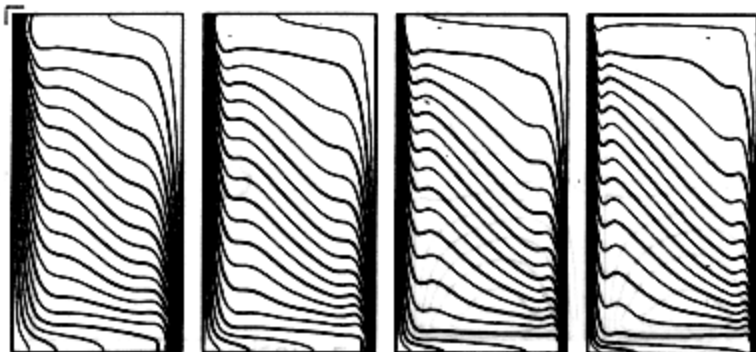
(無次元) 温度場

内 外

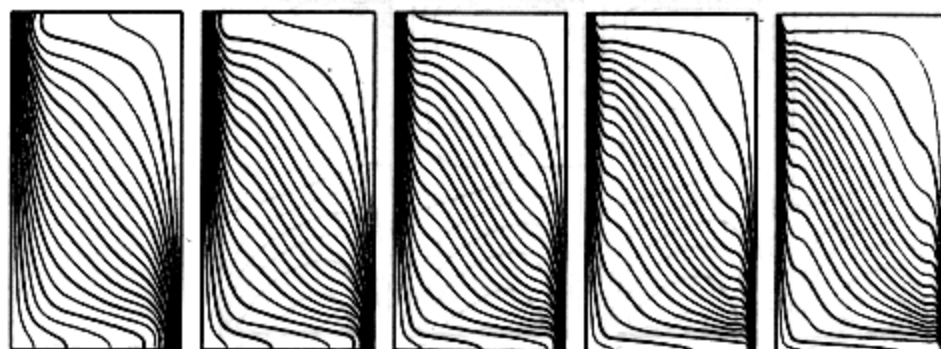
cool

warm

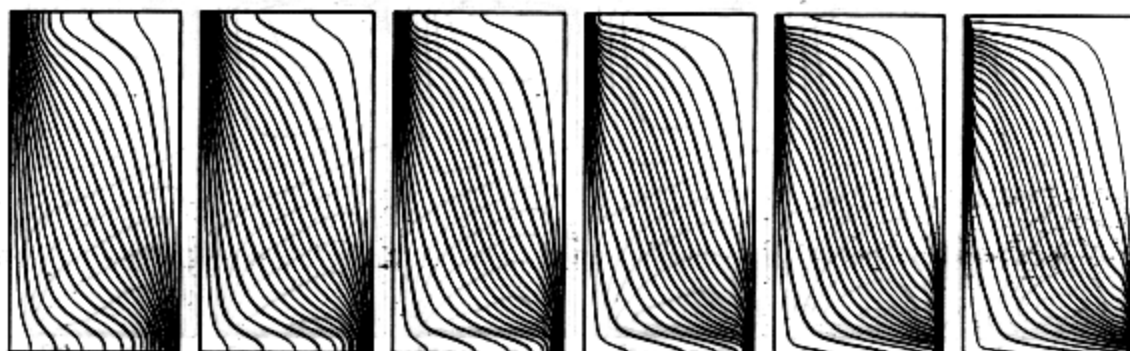
$10^{0.5}$



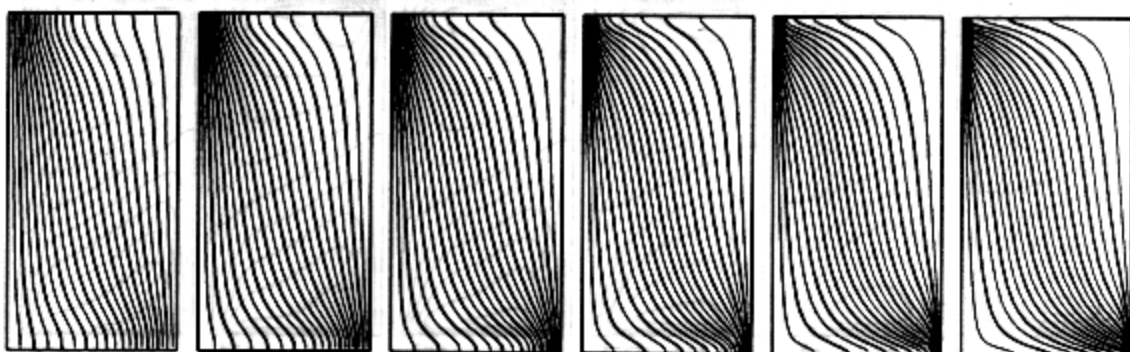
10^0



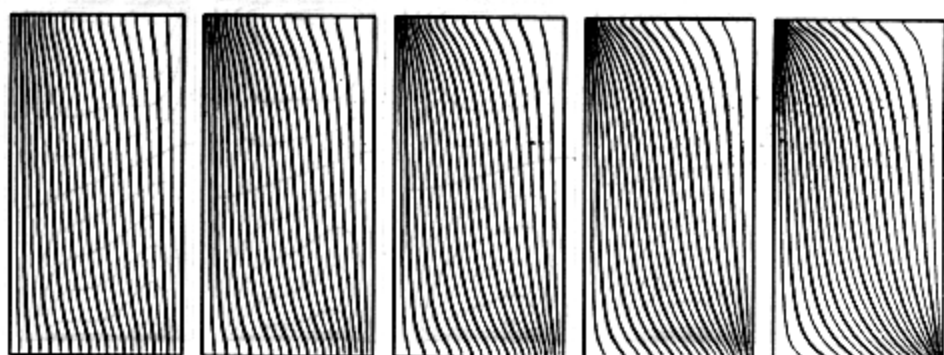
$10^{-0.5}$



$10^{-1.0}$



$10^{-1.5}$



$10^{4.5}$

$10^{5.0}$

$10^{5.5}$

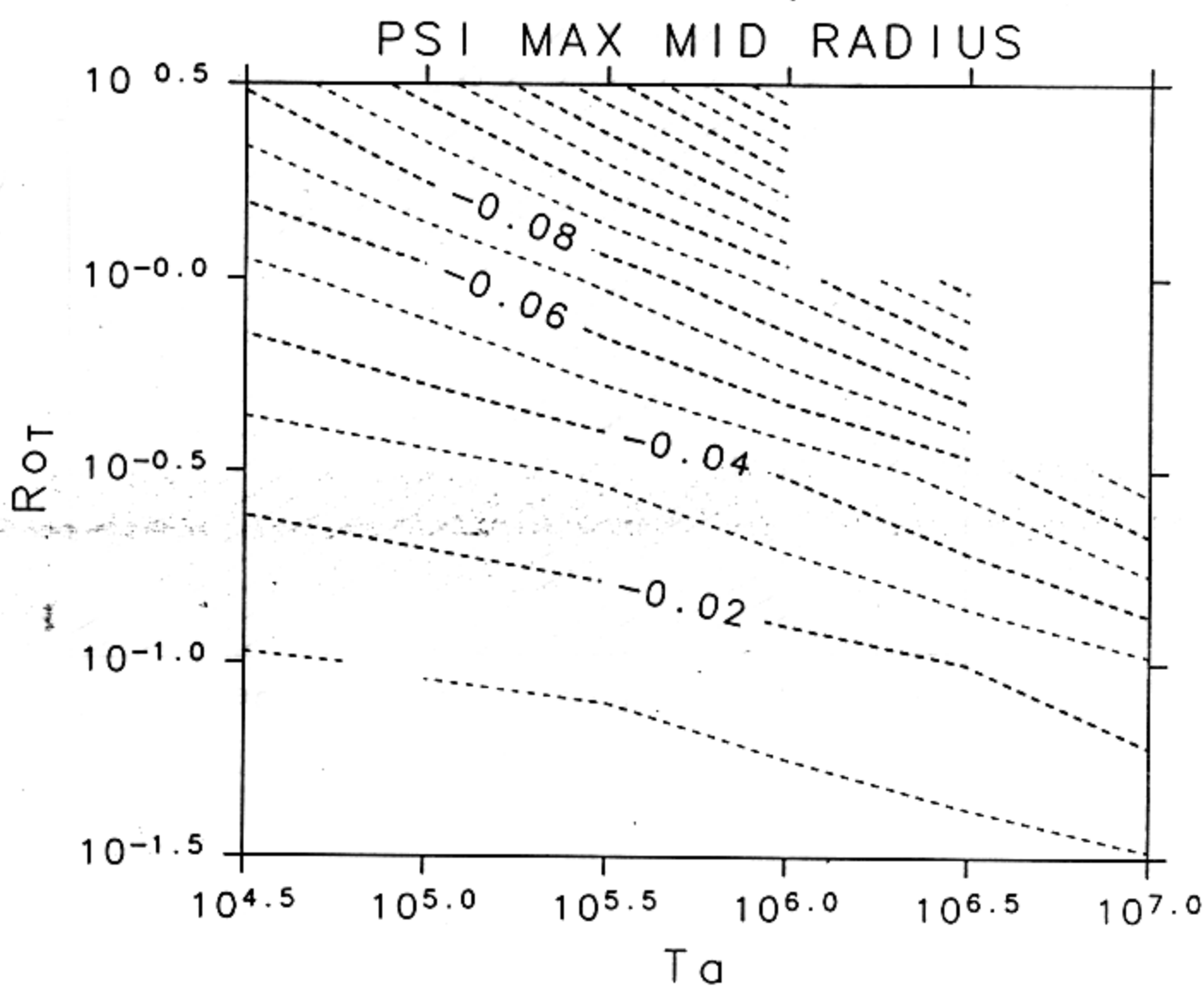
$10^{6.0}$

$10^{6.5}$

$10^{7.0}$

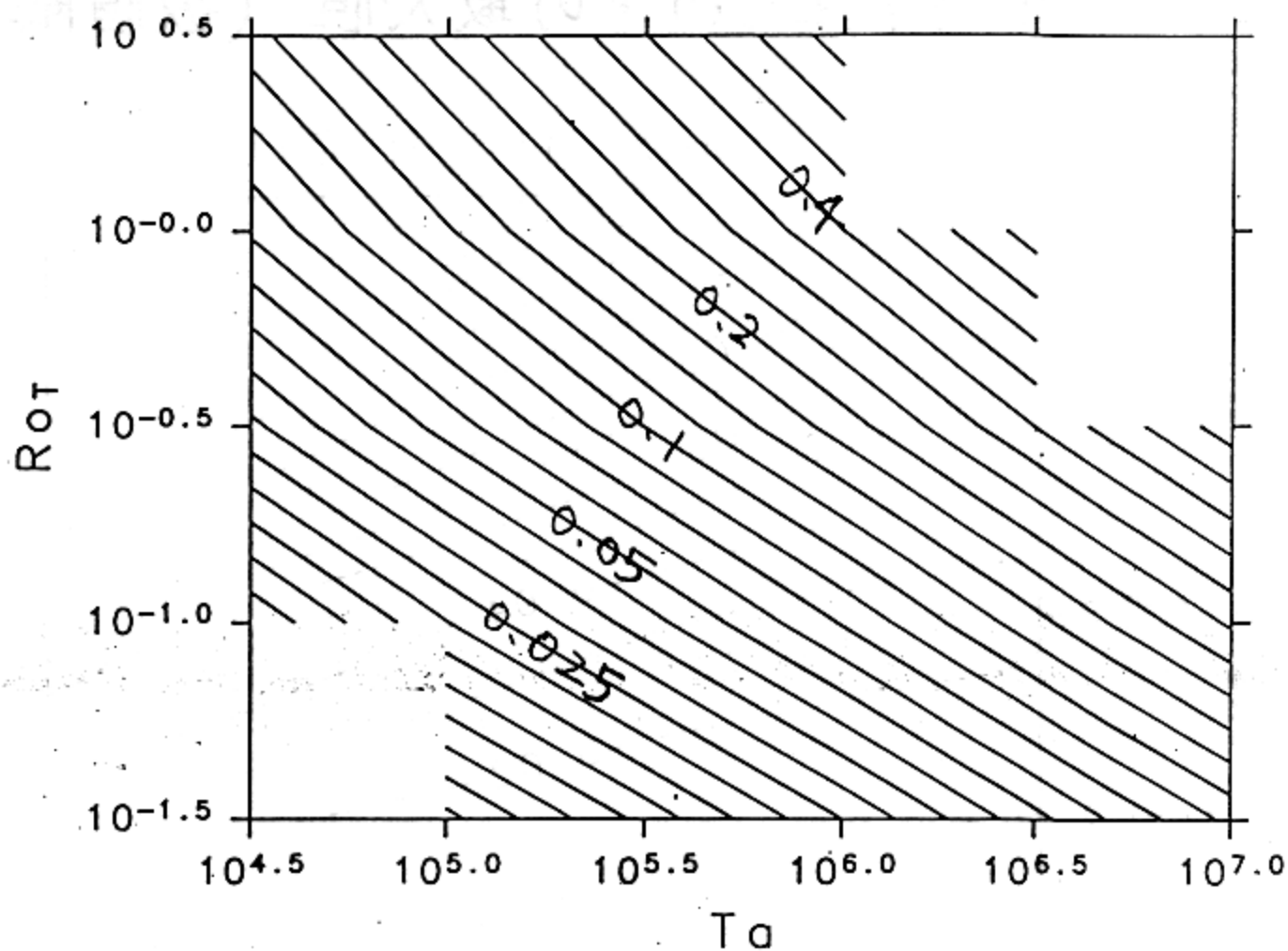
Ta

平均半径での中の最大値 (数値解)

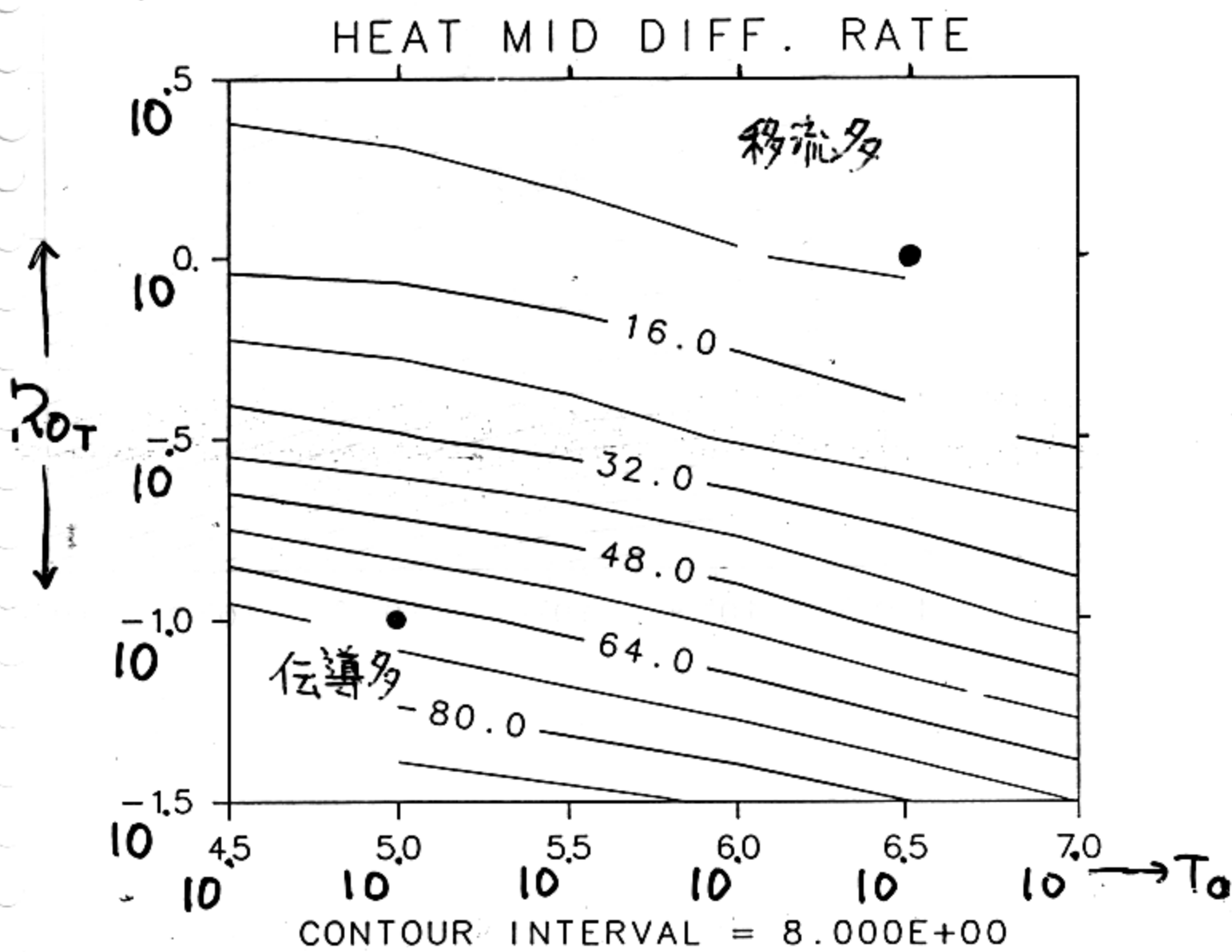


CONTOUR INTERVAL = 1.000E-02

東西風の強さ (数値解)

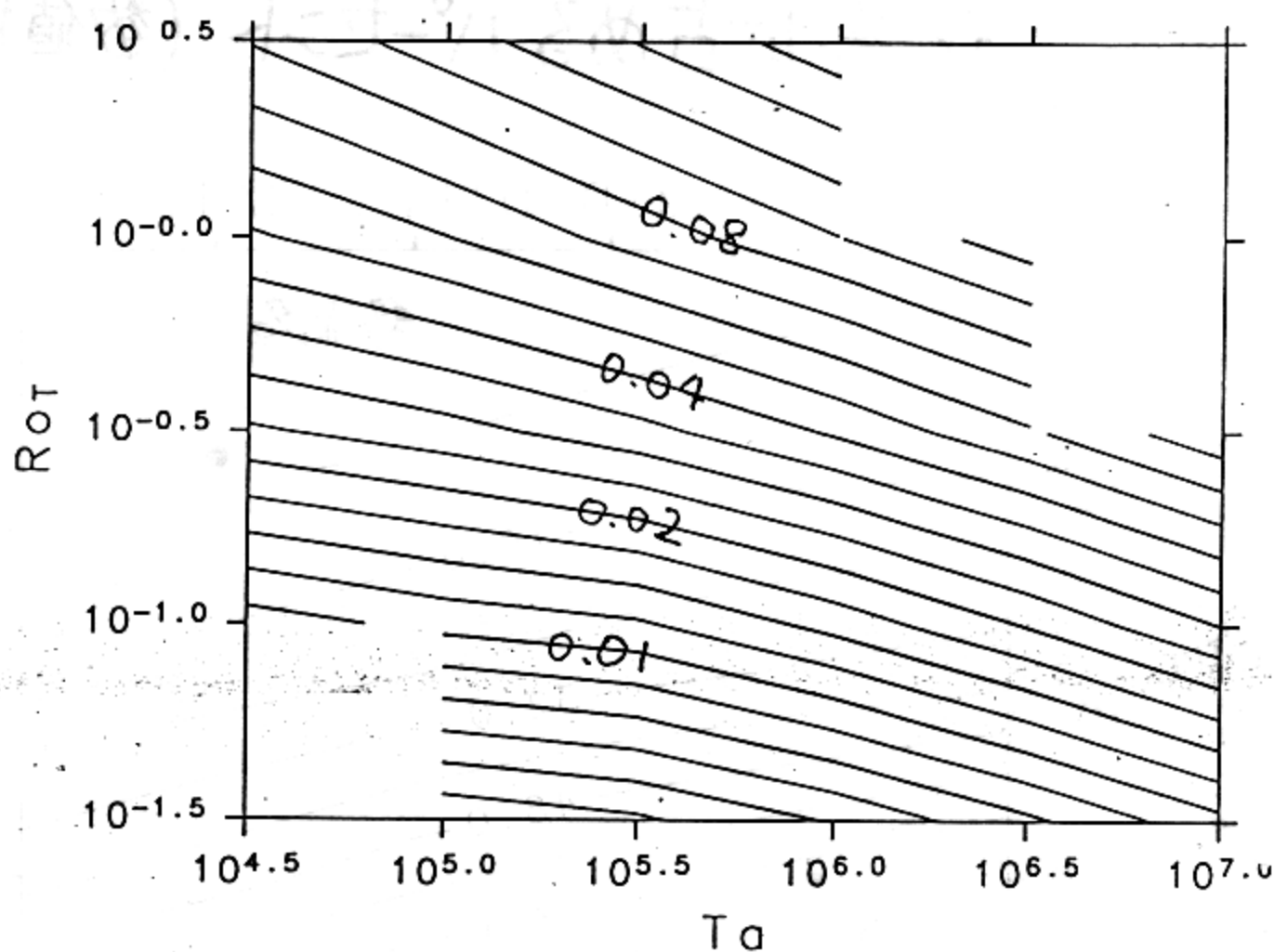


平均半径での内向き
熱輸送量のうち
伝導が占めるパーセント (数値解)

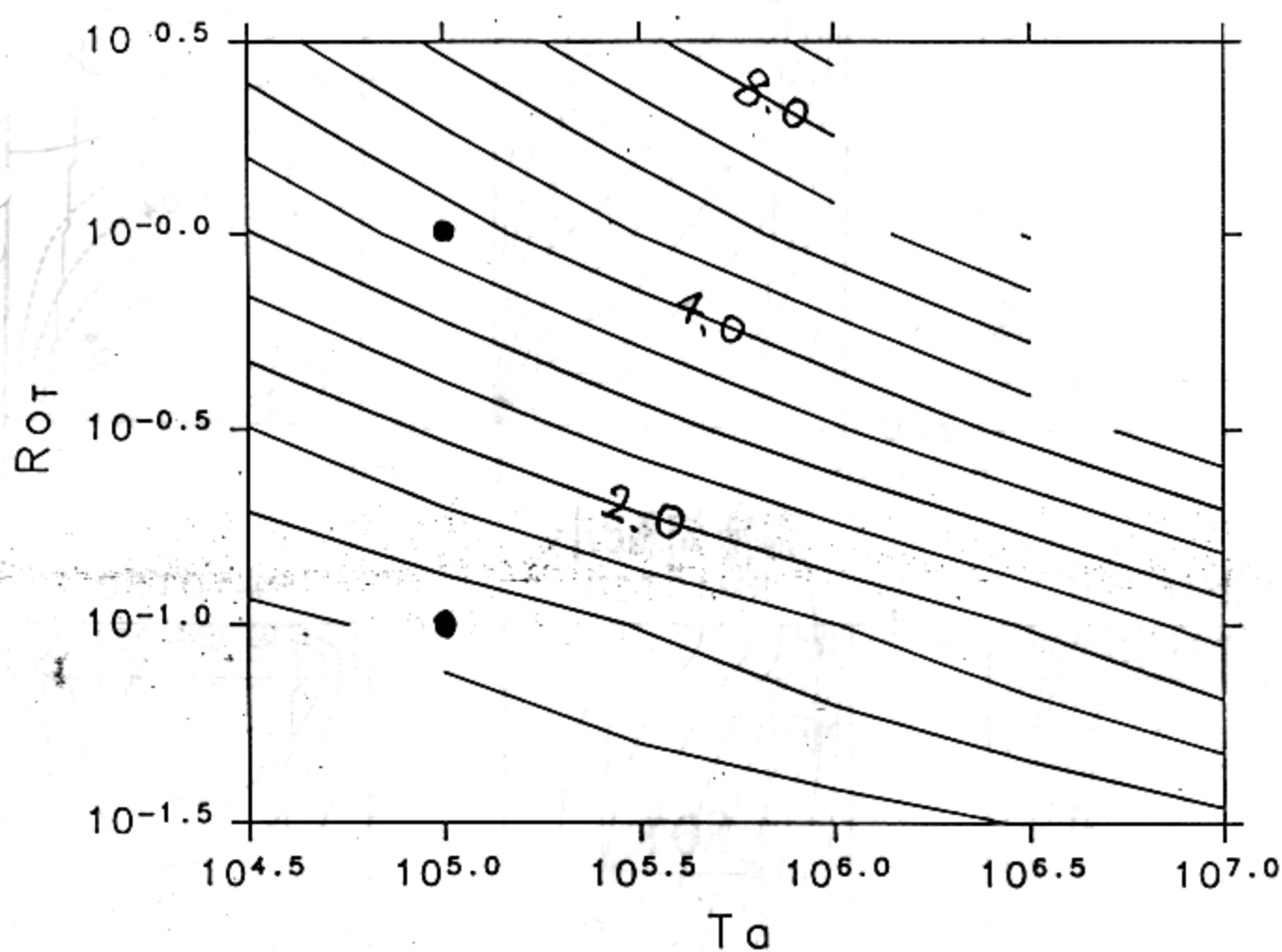


★ 伝導の比 $\leftrightarrow R_{0T}$

子午面循環の強さ (数値解)

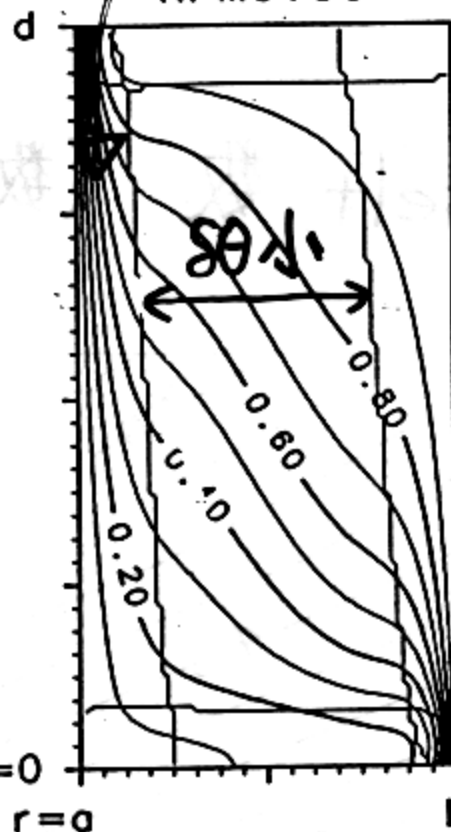


Nusselt 数 (数值解)

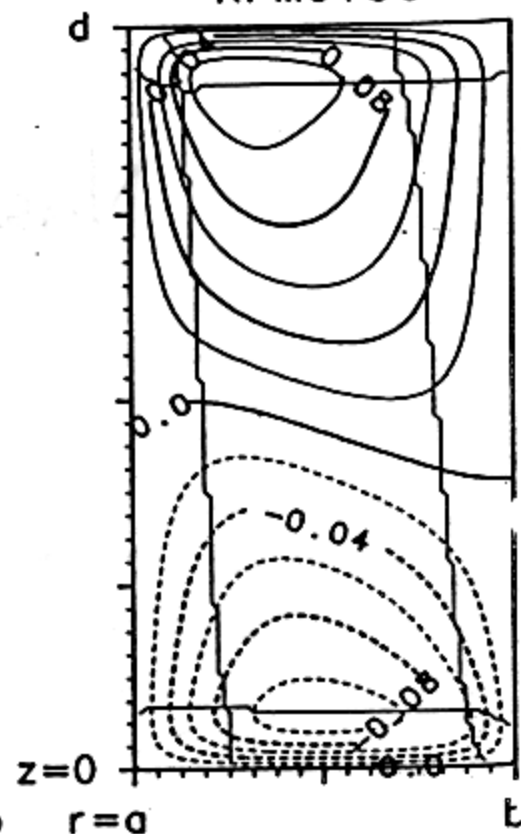


温度勾配大

RPM0T50

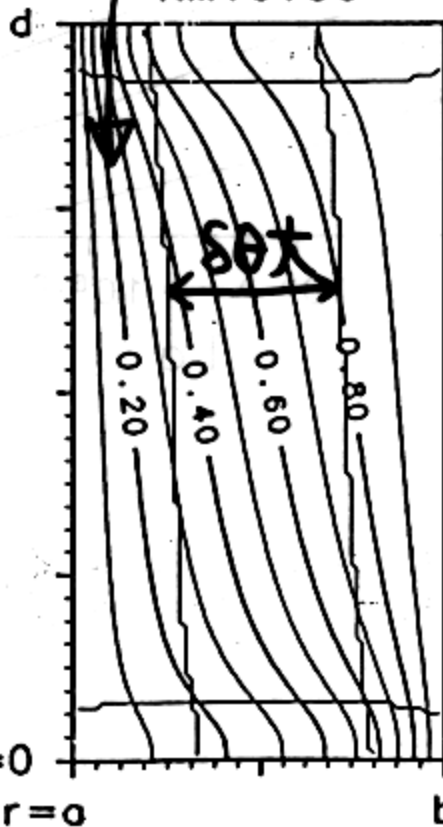


RPM0T50

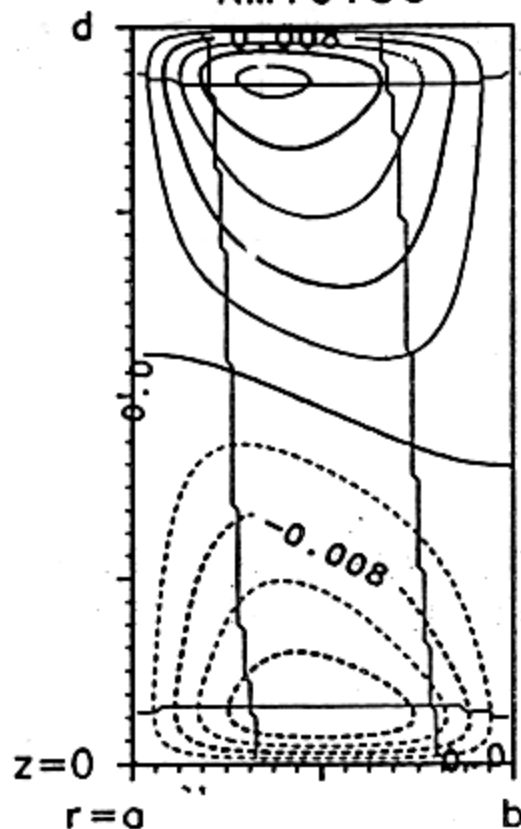


温度勾配小

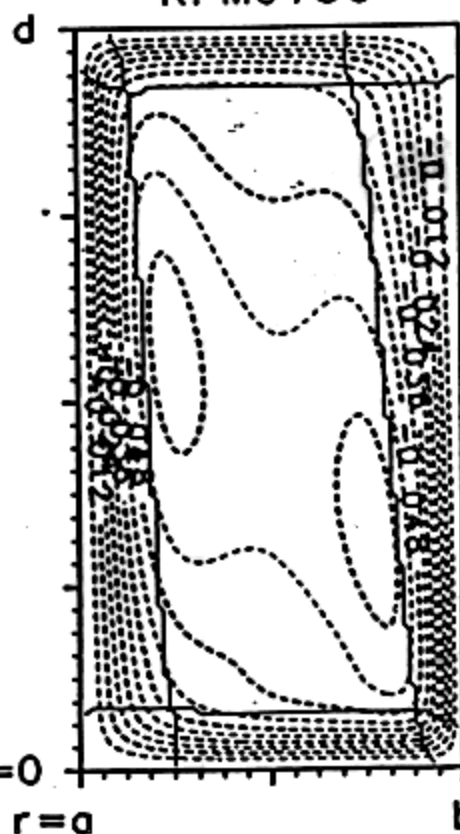
RM10T50



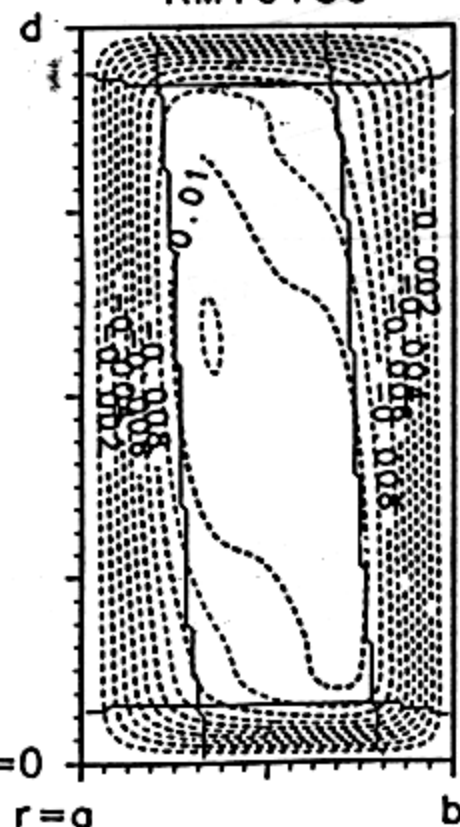
RM10T50



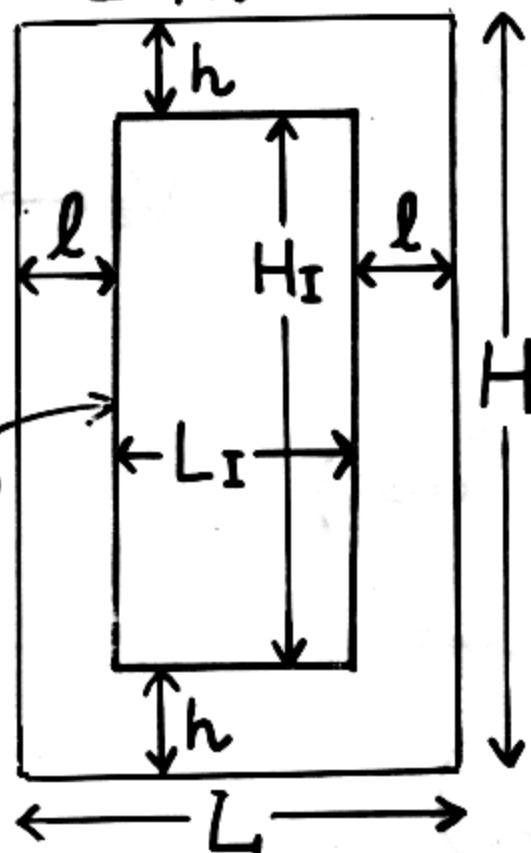
RPM0T50



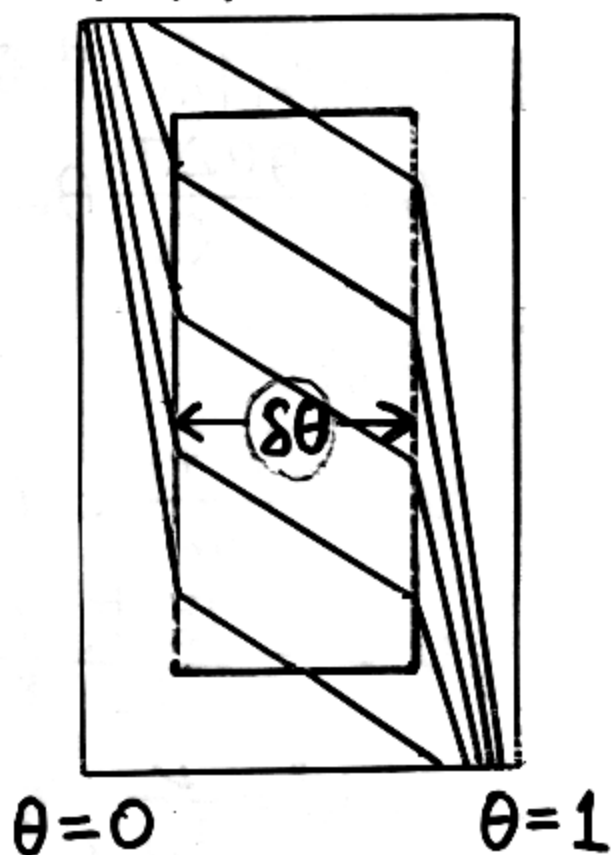
RM10T50



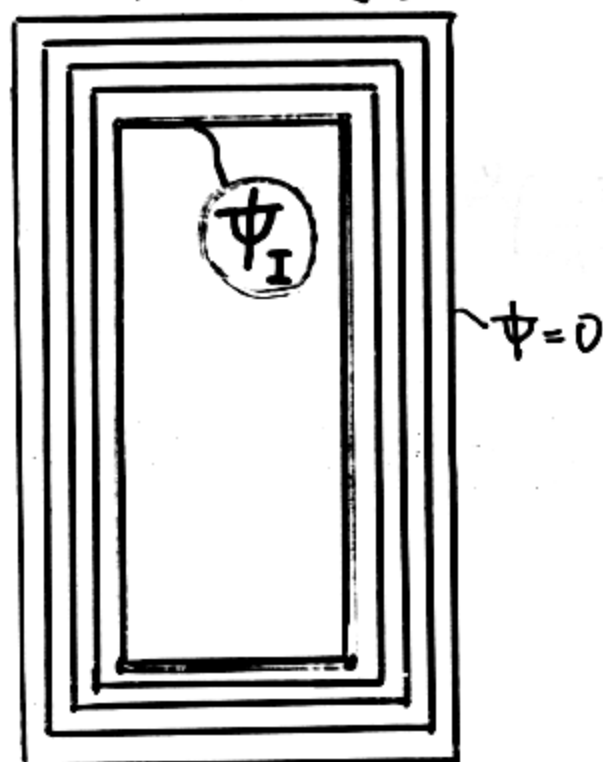
各部分の大きさ



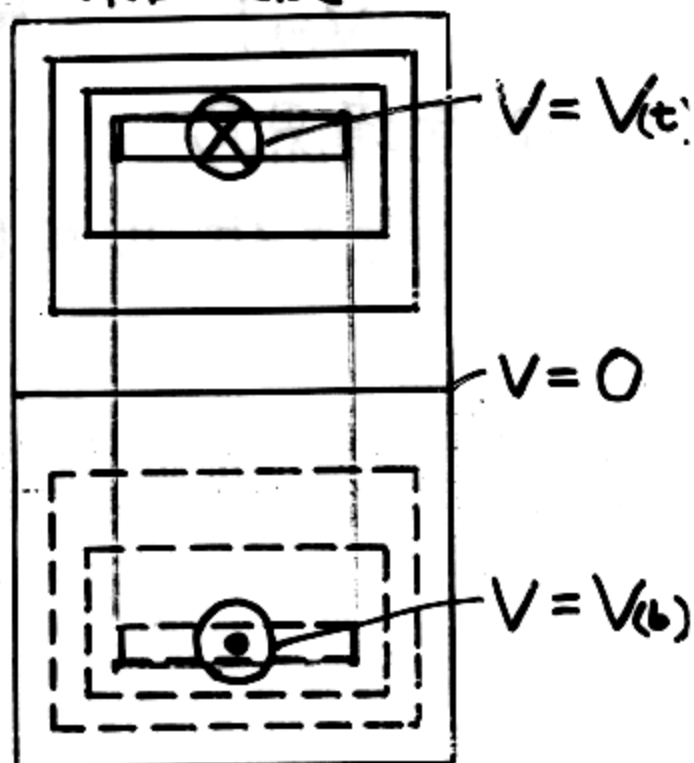
無次元温度 θ



子午面循環 ψ



東西速度 V



○ 温度風の関係 (内部領域)

$$V_z = \frac{g \alpha \Delta T}{2 \Omega} \theta_r$$

$$V_z \leftrightarrow \theta_r$$

○ 水平境界層

$$v = \frac{\sqrt{2} \Phi_I}{h_0} \frac{1}{r} (1 - e^{-\zeta} \cos \zeta)$$

$$u = - \frac{\sqrt{2} \Phi_I}{h_0} \frac{1}{r} e^{-\zeta} \sin \zeta$$

$$\left(h_0^2 = \frac{\nu}{2 \Omega}, \zeta \propto \frac{z}{\sqrt{2} h_0} \right)$$

境界層の端で v は

$$\left. \begin{array}{l} v_{(a)} \\ v_{(b)} \end{array} \right\} = \pm \frac{\sqrt{2} \Phi_I}{h_0} \frac{1}{r}$$

$$V_z \leftrightarrow \Phi_I$$

○ 側面境界層

$$\text{厚さ } \delta_{TL} \propto \left(\frac{\nu \pi d}{g \alpha \Delta T} \right)^{1/4}$$

● 温度風の式

$$V_z = \frac{g\alpha\Delta T}{2\Omega} \theta_r$$

$$\hookrightarrow \frac{V_{(t)} - V_{(b)}}{H_I} = \frac{g\alpha\Delta T}{2\Omega} \frac{\delta\theta}{L_I}$$

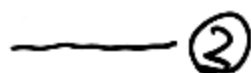
(イクマン尺での関係)

$$\frac{2\sqrt{2}}{H_I h_o r} \psi_I = \frac{g\alpha\Delta T}{2\Omega} \frac{\delta\theta}{L_I}$$



● 熱 flux

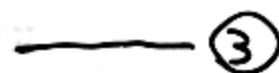
$$\text{壁で } \varepsilon \kappa H \frac{1 - \delta\theta}{2l}$$



平均半径で

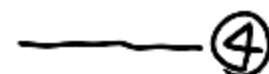
伝導により

$$\kappa H \frac{\delta\theta}{L_I}$$



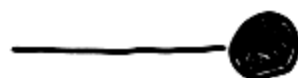
移流により

$$(\theta_{(t)} - \theta_{(b)}) \psi_I / r$$



② ~ ④ より

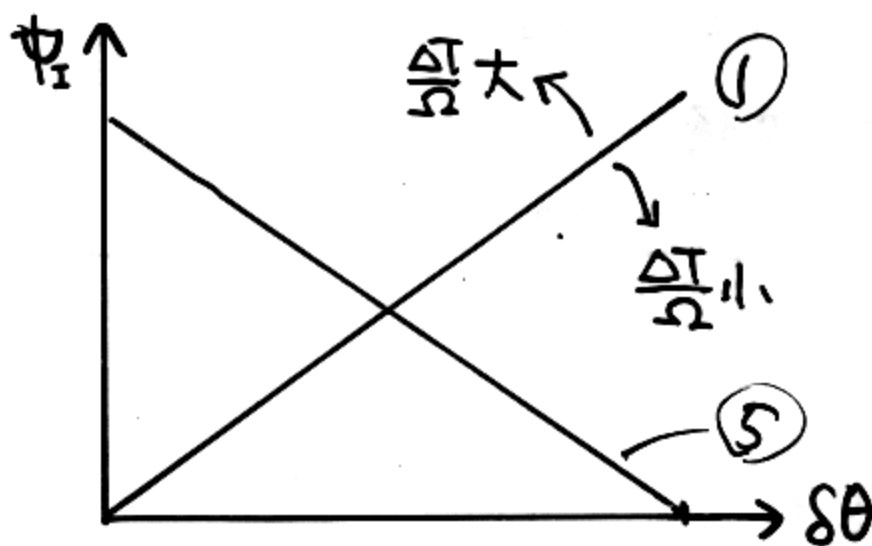
$$\underbrace{\varepsilon \kappa H \frac{1 - \delta\theta}{2l}}_{\text{②}} = \underbrace{\kappa H \frac{\delta\theta}{L_I}}_{\text{③}} + \underbrace{(\theta_{(t)} - \theta_{(b)}) \psi_I / r}_{\text{④}}$$



● ①式と⑤式からわかること

$$\textcircled{1} \quad \frac{2\sqrt{2}}{H_I h_o r} \psi_I = \frac{g\alpha(\Delta T)}{2\Omega L_I} \delta\theta$$

$$\textcircled{5} \quad \varepsilon \kappa H \frac{1-\delta\theta}{2l} = \kappa H \frac{\delta\theta}{L_I} + (\theta_{(t)} - \theta_{(b)}) \frac{\psi_I}{r}$$

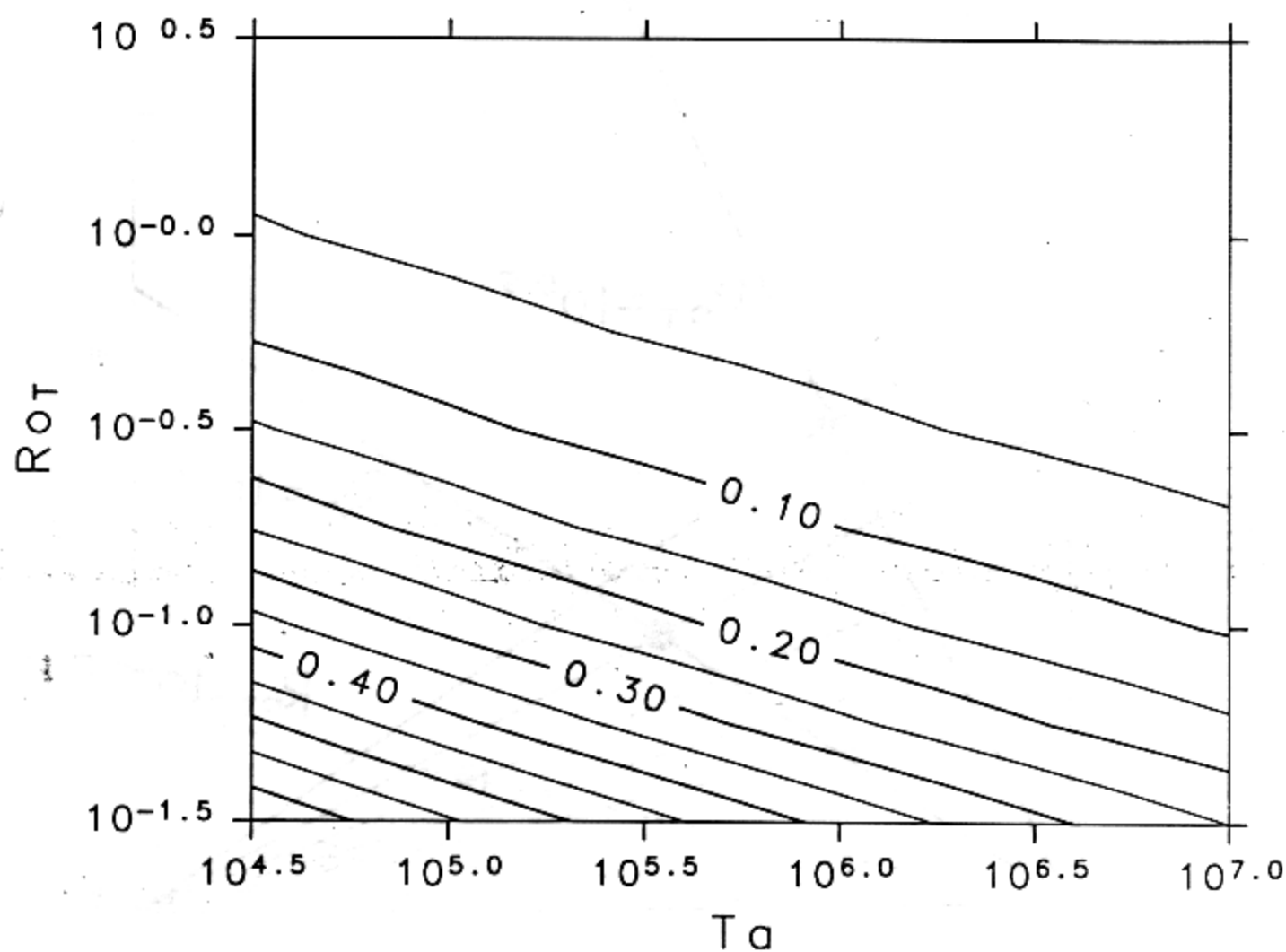


● ①を⑤の右辺へ代入すると

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \text{の右辺} &= \frac{4\sqrt{2}\kappa H \Omega}{H_I h_o r \cdot g\alpha\Delta T} \cdot \psi_I + \frac{\theta_{(t)} - \theta_{(b)}}{r} \cdot \psi_I \\ &= \frac{\psi_I}{r} \left(\underbrace{\frac{4\sqrt{2}\kappa H}{H_I h_o g\alpha} \cdot \frac{\Omega}{\Delta T}}_{\text{伝導}} + \underbrace{(\theta_{(t)} - \theta_{(b)})}_{\text{対流}} \right) \end{aligned}$$

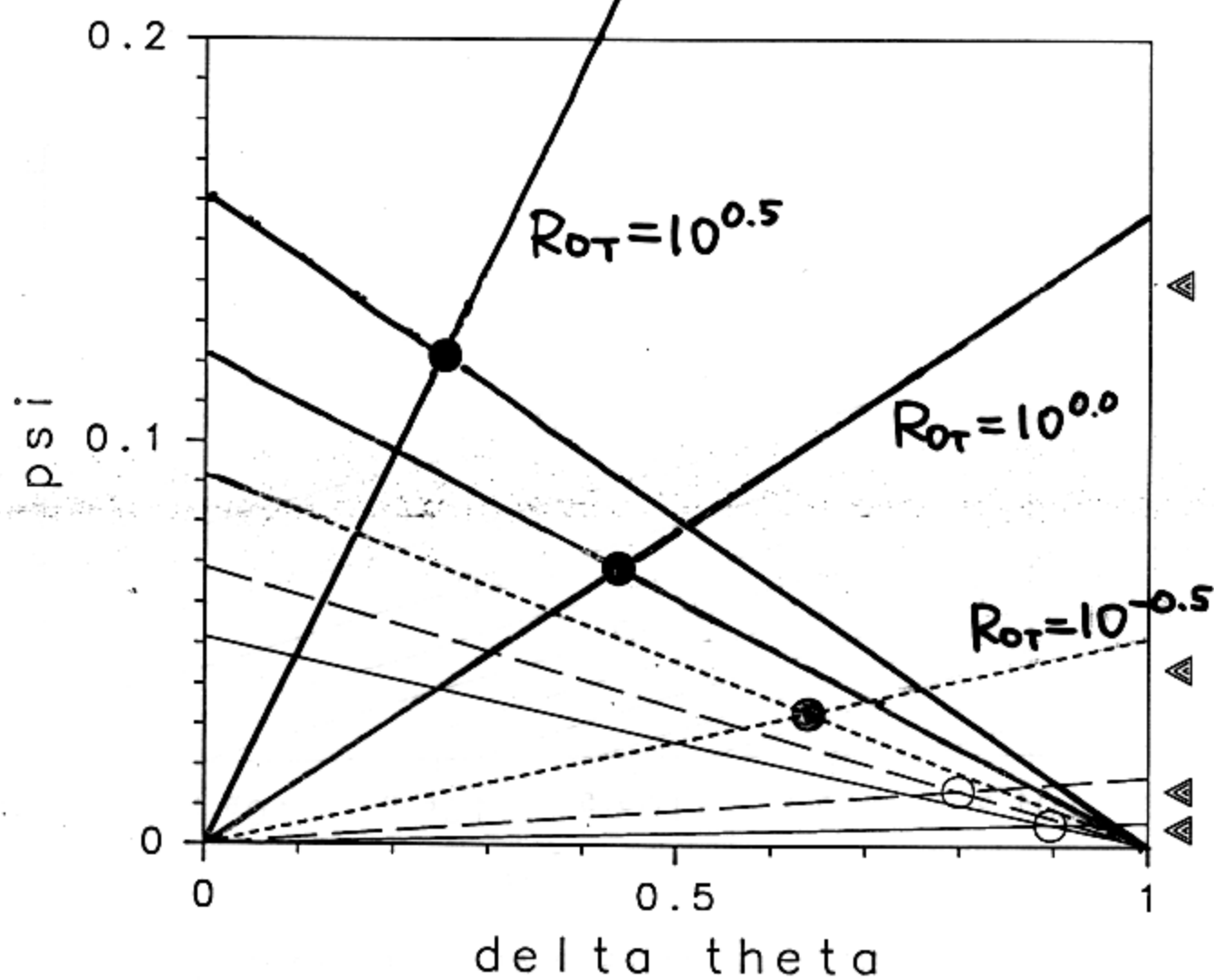
伝導
伝導+対流

(簡単モデル)



CONTOUR INTERVAL = 5.000E-02

$$T_a = 10^{6.0}$$



$$\left[\begin{aligned} \Phi_I &= \frac{r\epsilon\kappa H}{2l} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{2}L_1\epsilon\kappa H\Omega}{H_1(h_0 l)g\alpha\Delta T}} = \frac{r\epsilon\kappa H}{2l} \cdot \frac{1}{1 + f} \\ \delta\theta &= \frac{f}{1 + f} \\ V_{(t)} &= \frac{\epsilon\kappa H}{\sqrt{2}(h_0 l)} \cdot \frac{1}{1 + f} \end{aligned} \right.$$

境界層の厚さ

$$h_0 = \sqrt{\frac{\nu}{2\Omega}} \propto \Omega^{-1/2}$$

$$l \propto \Delta T^{-1/4}$$

よって

$$f \propto \frac{\Omega}{h_0 l \Delta T} \propto \frac{\Omega^{3/2}}{\Delta T^{3/4}}$$

$$\propto Ta^{-1/4}$$

$$\propto (Ta Ro_T)^{-1/4}$$

$$\propto Ro_T^{-3/4}$$

$$\left[\begin{aligned} \Phi_I &= \frac{C_1}{\Delta T^{-1/4} (1 + C_2 \frac{\Omega^{3/2}}{\Delta T^{3/4}})} = \frac{C_1' (Ta \cdot Ro_T)^{1/4}}{1 + C_2' Ro_T^{-3/4}} \\ \delta\theta &= \frac{C_2 \frac{\Omega^{3/2}}{\Delta T^{3/4}}}{1 + C_2 \frac{\Omega^{3/2}}{\Delta T^{3/4}}} = \frac{C_2' Ro_T^{-3/4}}{1 + C_2' Ro_T^{-3/4}} \\ V_{(t)} &= \frac{C_3 \Omega^{1/2} \Delta T^{1/4}}{1 + C_2 \frac{\Omega^{3/2}}{\Delta T^{3/4}}} = \frac{C_3' Ta^{1/2} \cdot Ro_T^{1/4}}{1 + C_2' Ro_T^{-3/4}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega &\propto Ta^{1/2} \\ \Delta T &\propto Ta Ro_T \end{aligned} \right.$$

• 対流優位の時

$$\left. \begin{aligned} \theta_{(t)} - \theta_{(b)} &= 1 \\ \text{右辺伝導の項} &\ll 1 \end{aligned} \right\} \text{とできる}$$

⑤式' →

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon \kappa H \frac{1 - \delta\theta}{2\ell} &= \Psi_I / r & \text{--- ⑥} \\ \text{①} \rightarrow & \\ \Psi_I &= \frac{g \alpha \Delta T}{4\sqrt{2}\Omega} \frac{h_0 r}{L_I} \delta\theta & \text{--- ①} \end{aligned} \right.$$

• 伝導優位の時

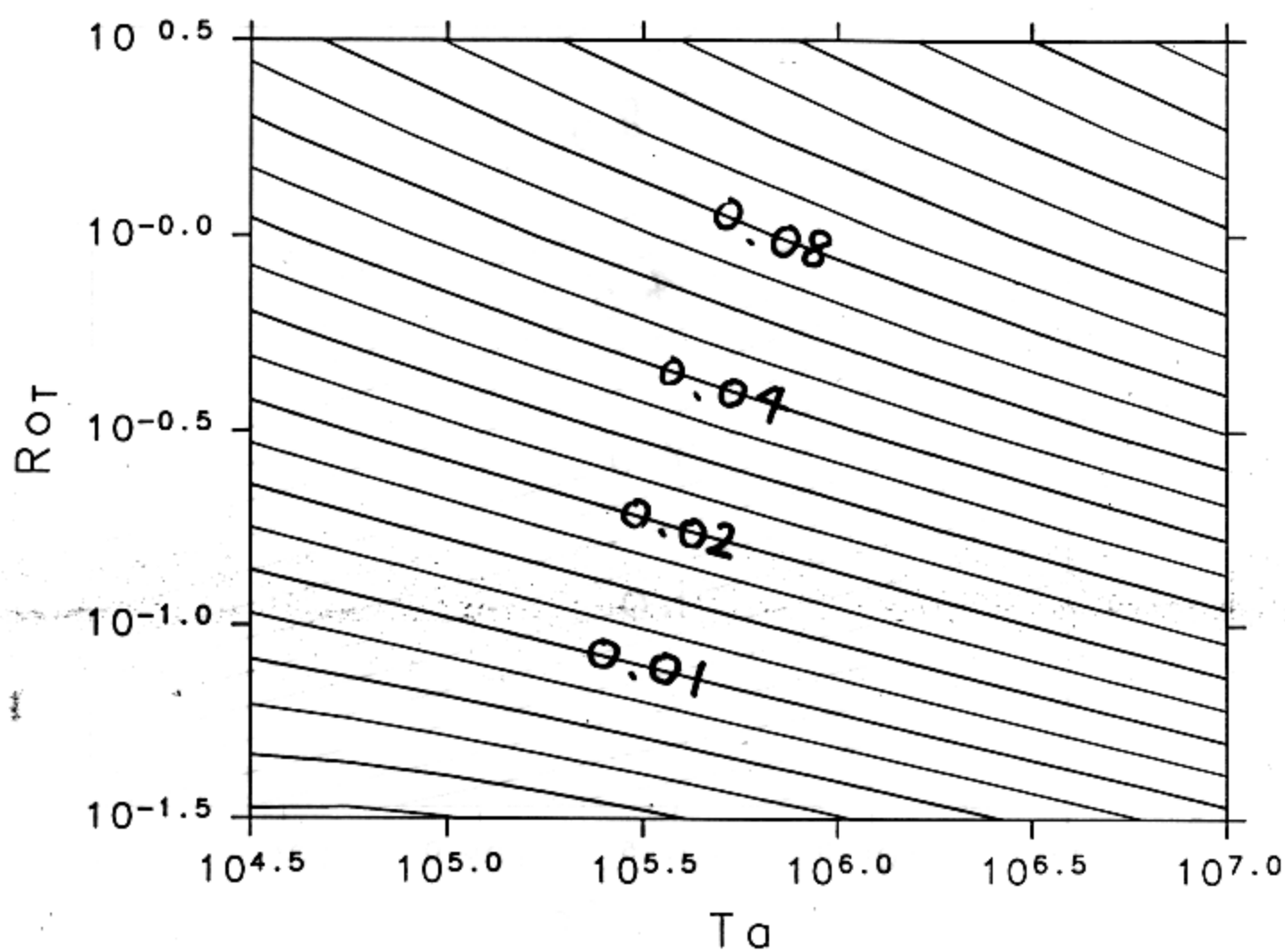
右辺対流の項 $\ll 1$ とできる

$$\begin{aligned} \kappa H \frac{1 - \delta\theta}{2\ell} &= \kappa H \frac{\delta\theta}{L_I} \\ \hookrightarrow \frac{1}{2\ell} &= \delta\theta \left(\frac{1}{L_I} + \frac{1}{2\ell} \right) = \delta\theta \frac{L}{L_I} \\ \hookrightarrow \delta\theta &= \frac{L_I}{L} \end{aligned}$$

①へ代入して

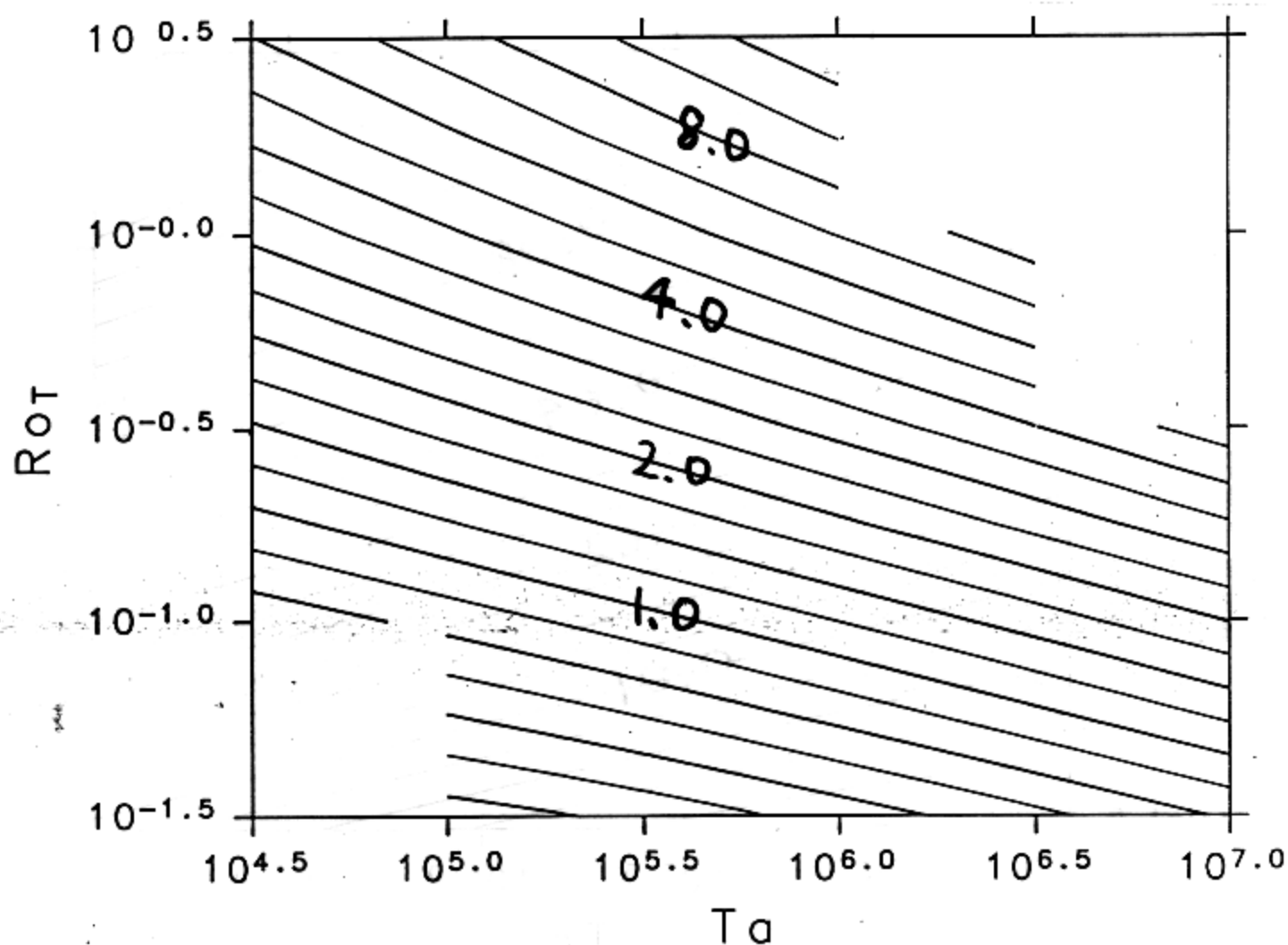
$$\Psi_I = \frac{g \alpha \Delta T}{4\sqrt{2}\Omega} \frac{h_0 r}{L} \quad \text{--- ⑦}$$

Ψ_I (简单モデル)



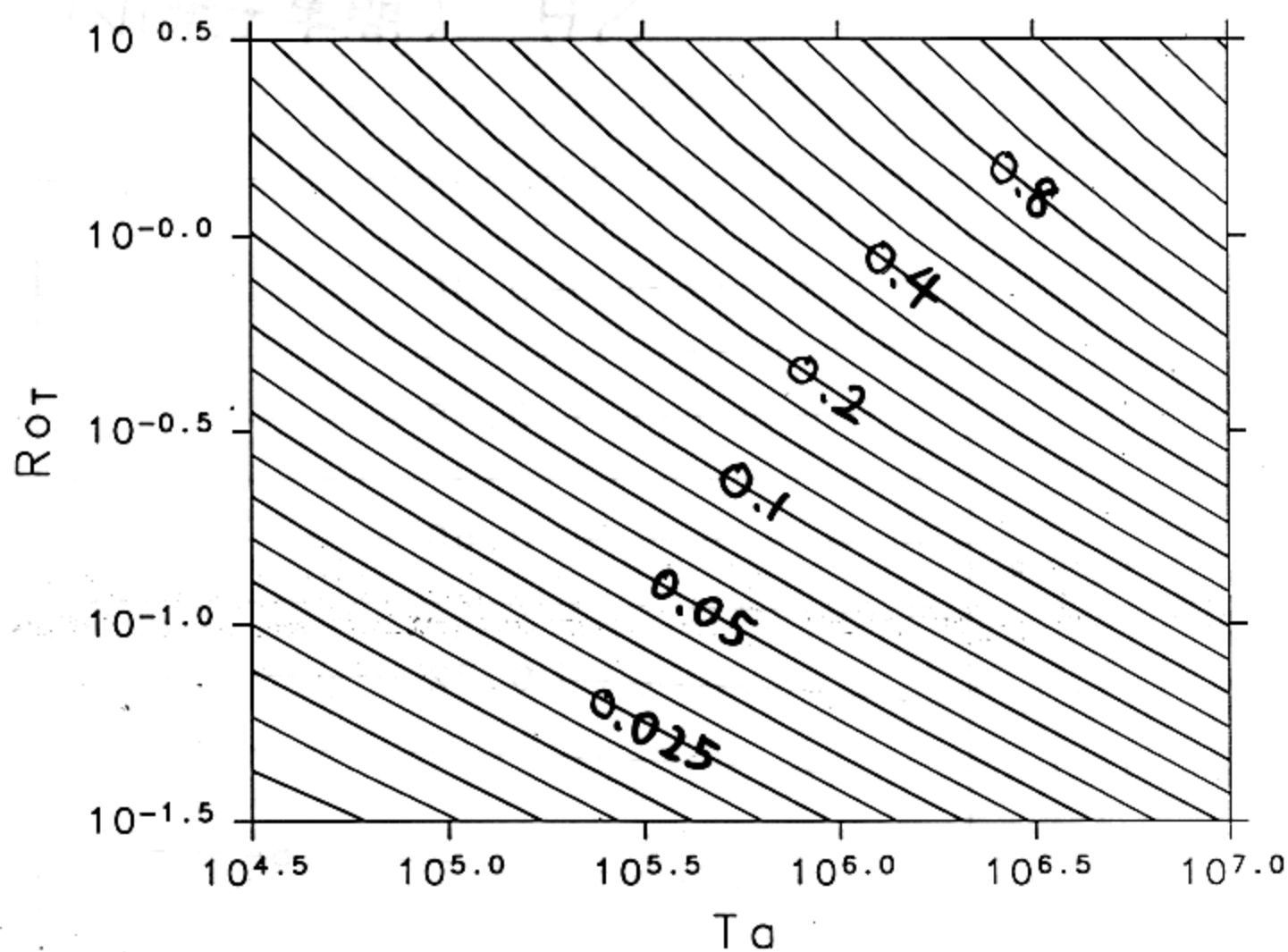
CONTOUR INTERVAL = 7.526×10^{-2}

Nu 数 (简单モデル)



CONTOUR INTERVAL = $7.526E-02$

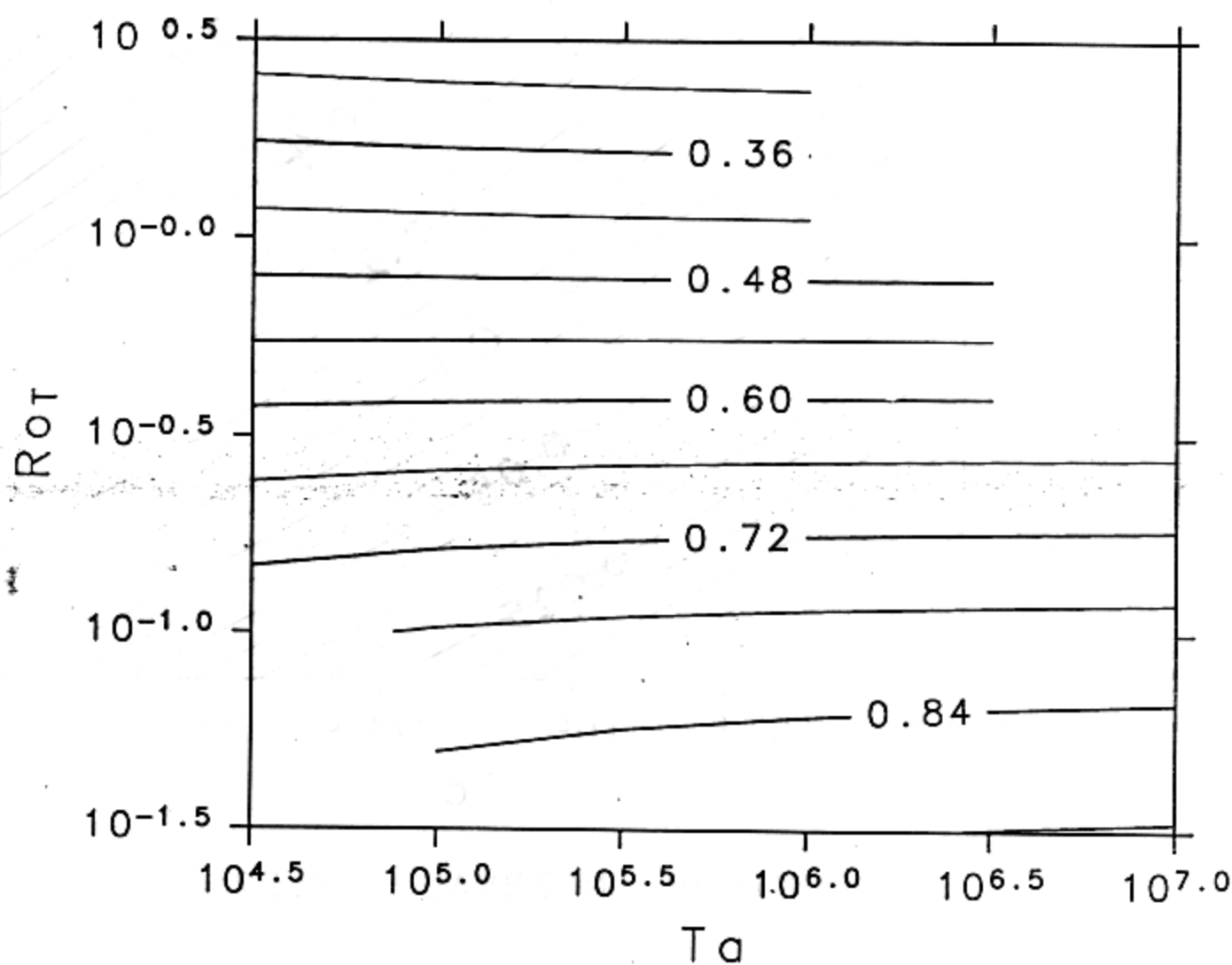
$V(\alpha)$ (简单モデル)



CONTOUR INTERVAL = $7.526E-02$

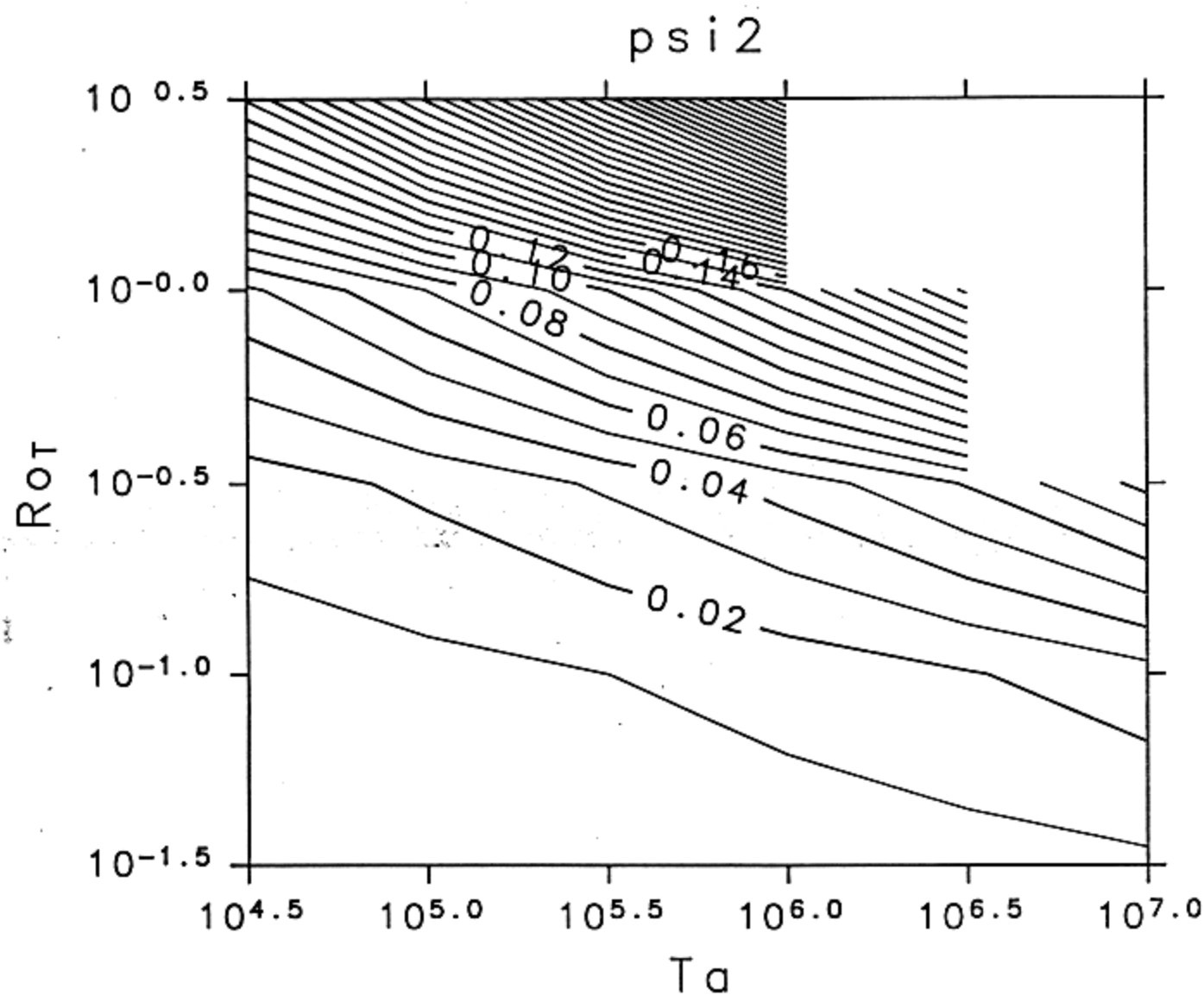
$\delta\theta$ (简单モデル)

delta theta



CONTOUR INTERVAL = $6.000E-02$

伝導優位のときの Ψ_I (簡単モデル)



CONTOUR INTERVAL = 1.000E-02

回転水槽実験での定常軸対称循環－簡単モデルによる理解－

菅田 誠治・余田 成男（京大・理）

●はじめに

1991年春季B308の統報である。

テイラー数 Ta ($\propto \Omega^2$, Ω : 回転角速度) と熱ロスビー数 Ro_T ($\propto \Delta T/\Omega^2$, ΔT : 内外壁温度差) に対する軸対称定常流の場合と輸送量の依存性を (Ta, Ro_T) 平面上の26点の数値解に基づいて調べた。例えば、中央部における等温度面の傾きは Ro_T に、内向きの総熱輸送量は ΔT にほぼ依存していた (以上前回報告済)。図1はNusselt数の (Ta, Ro_T) 依存性を図示したものである。

簡単な解析モデルを用いて、与えられた外部パラメータに対して軸対称定常流がどのように決まるかを示し、上記のような諸変量の (Ta, Ro_T) 依存性を説明する。

●簡単モデル

ふたありの場合を考える。子午面断面は五つの領域に分けられる。内部領域と内外の側面境界層と上下の水平境界層である。内部領域では温度風平衡が成り立ち、水平境界層はエクマン境界層であり、子午面循環は境界層内でのみ起きている、と考えて良い。

内部領域の水平無次元温度差を $\delta\theta$ 、子午面循環の強さを Ψ_I 、内部領域上端での回転方向速度を $v_{(t)}$ で代表させる。 $\delta\theta$ と $v_{(t)}$ の間には、内部領域での温度風平衡の関係式が成り立つ。次に、 Ψ_I と $v_{(t)}$ にはエクマン境界層端での関係式が得られる。この二式から $v_{(t)}$ を消去して

$$\frac{2\sqrt{2}}{H_I h_0 r_c} \cdot \Psi_I = \frac{g\alpha\Delta T}{2\Omega L_I} \cdot \delta\theta \quad (1)$$

が導かれる。 $(g$ は重力加速度、 α は体膨張率、 r_c は平均半径、 h_0 はEkman depth、 H, L は装置の高さと幅、 H_I, L_I は内部領域の高さと幅、 h, l は上下と側面の境界層の厚さ。)

別の観点から $\delta\theta$ と Ψ_I の関係式を導く。壁と平均半径での内向き熱フラックスは等しいから、

$$\kappa \frac{1 - \delta\theta}{2l} H = \kappa \frac{\delta\theta}{L_I} H + \frac{\Psi_I}{r_c} (\theta_{(t)} - \theta_{(b)}) \quad (2)$$

の関係が導かれる。左辺は壁での、右辺は平均半径でのフラックスの見積もりで、左辺と右辺第一項は伝導、右辺第二項は対流によるものである。 $(\theta_{(t)}, \theta_{(b)})$ はそれぞれ上下水平境界層の実効的無次元温度

得られた両式により $\delta\theta$ と Ψ_I を解くことができる。 $L_I, l, \theta_{(t)} - \theta_{(b)}$ 等の (Ta, Ro_T) 依存性を見積もる必要は残されているが、第0近似として (1) の $\Delta T/\Omega$ ($\propto Ro_T \cdot Ta^{-1/2}$) の値が系を決めていることが分かる。

横軸を $\delta\theta$ 、縦軸を Ψ_I とするグラフ上でイメージすれば、(1) は右上がりの (2) は右下がりの線で表される。 $\Delta T/\Omega$ が大きくなれば (1) の傾きは増し交点は左上に移動し、 $\delta\theta$ は小さく Ψ_I は大きくなることになる。

●結果

Ro_T が比較的大きな領域で成立する見積もりを用いて $\delta\theta$ と Ψ_I を求め、Nusselt 数を求めた結果が図2である。図の上方で、図1の (Ta, Ro_T) 依存性が定性的に良く再現されている。境界層の厚さの変化が取り込まれたことによって、より実際に近い付いている。また、他の変量の依存性を調べても良く再現されている。

●結論

回転水槽での軸対称定常流は、内部領域の温度風関係と熱輸送の関係の二者の兼ね合いにより説明することが出来る。

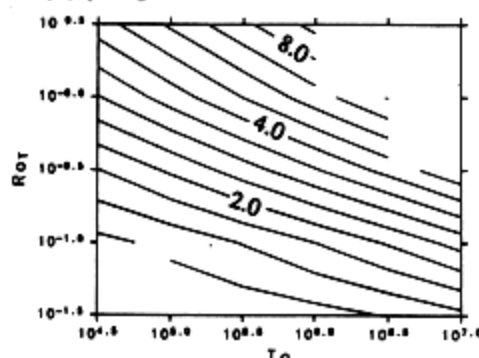


図1: 数値実験で得られた Nusselt 数

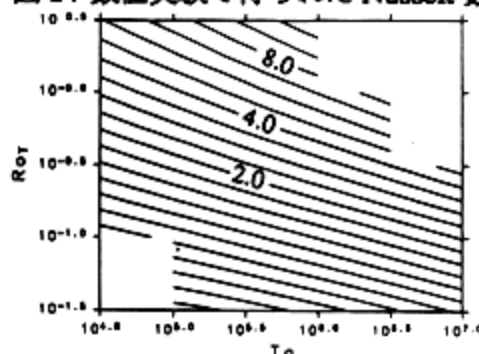


図2: 簡単モデルで得られた Nusselt 数