A.2 準圧縮方程式におけるエネルギー方程式の導出

準圧縮方定式におけるエネルギー方程式を導出する. ただし, ここでは乾燥大気を想定し, 凝結に関する項を無視する.

乾燥大気の場合, 準圧縮方程式の連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\overline{\rho}\boldsymbol{u} = 0 \tag{A.7}$$

である. この式より任意のスカラー量 ϕ に対し

$$\overline{\rho}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \overline{\rho}\phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\phi\boldsymbol{u}) + \phi\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{A.8}$$

が成り立つ. この式から準圧縮方程式では ϕ の時間微分をフラックス形式で書くことができないことがわかる[*1].

水平方向の運動方程式 (2.2), 鉛直方向の運動方程式 (2.3) 式より,

$$\frac{\partial \overline{\rho}K}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) = -c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} + \overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}gw - K\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{A.9}$$

となる. ここで $K = (u^2+w^2)/2$, $\boldsymbol{D} = (D_u, D_w)$ とおいた. 以降では, (A.9) の右辺第一項と右辺第三項を変形していく.

まず, (A.9) の右辺第三項は以下のように変形される.

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}gw &= \overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}g\frac{dz}{dt} \\
&= \overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\theta}}\frac{d(gz)}{dt} \\
&= \overline{\rho}\left\{\frac{1}{\overline{\theta}}\frac{d(\theta gz)}{dt} - \frac{gz}{\overline{\theta}}\frac{d\theta}{dt}\right\} \\
&= \frac{\overline{\rho}}{\overline{\theta}}\frac{d(\theta gz)}{dt} - \frac{gz}{\overline{\theta}}\left\{\frac{\partial\overline{\rho}\theta}{\partial t} + \nabla\cdot(\overline{\rho}\theta\boldsymbol{u}) + \theta\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}.
\end{aligned} \tag{A.9-1}$$

(A.9-1) の右辺第二項を変形する. 熱力学方程式 (2.5) は, 凝結がない場合,

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta' - w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} + \frac{\overline{\theta}}{\overline{T}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) + D_\theta \tag{2.5-1}$$

となる. これは基本場に対しても成り立ち,

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\theta} \tag{2.5-2}$$

[*1] $\partial\phi/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi = 0$ が成り立たないということ.

となる. (2.5-1) + (2.5-2) より,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta - w\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) + D_\theta. \tag{2.5-3}$$

この両辺に $\overline{\rho}$ をかけて (A.7) を用いてさらに変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\rho}\theta}{\partial t} &= -\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta - \overline{\rho}w\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \overline{\rho}\frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) + \overline{\rho}D_\theta \\ &= -\nabla\cdot(\overline{\rho}\theta\boldsymbol{u}) + \theta\nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) - \overline{\rho}w\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \overline{\rho}\frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) + \overline{\rho}D_\theta \\ &= -\nabla\cdot(\overline{\rho}\theta\boldsymbol{u}) - \theta\frac{\partial \rho}{\partial t} - \overline{\rho}w\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \overline{\rho}\frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) + \overline{\rho}D_\theta\end{aligned} \tag{A.10}$$

となる. また (A.9-1) 式の右辺第一項は, (A.8) より,

$$\overline{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta g z}{\overline{\theta}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}\theta g z}{\overline{\theta}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta g z}{\overline{\theta}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta g z}{\overline{\theta}}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{A.9-2}$$

となる. よって, (A.9) の右辺第三項は,

$$\overline{\rho}\frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}gw = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}\theta g z}{\overline{\theta}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta g z}{\overline{\theta}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta g z}{\overline{\theta}}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\overline{\rho}g z}{\overline{\theta}}\left\{w\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - \frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) - D_\theta\right\} \tag{A.9-3}$$

と変形される.

(A.9) の右辺第一項は以下のように変形される.

$$-c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi = -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\Pi\boldsymbol{u}) + c_p\Pi\nabla\cdot(\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}). \tag{A.9-4}$$

ここで, 凝結がないときの圧力方程式 (2.4) は,

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial t} = -\frac{\overline{c^2}}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\overline{\theta}\boldsymbol{u}) + +\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\overline{\theta}\boldsymbol{u})\right] + \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\theta}^2}\frac{d\theta'}{dt} \tag{2.4-1}$$

である. これは基本場に対しても成り立ち,

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial t} = \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\theta}^2}\frac{d\overline{\theta}'}{dt} \tag{2.4-2}$$

となる. (2.4-1) + (2.4-2) より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial t} &= -\frac{\overline{c^2}}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\overline{\theta}\boldsymbol{u}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\overline{\theta}\boldsymbol{u})\right] + \frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\theta}^2}\frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{\overline{c}^2}{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}\nabla\cdot(\overline{\rho}\overline{\theta}\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{A.11}$$

となる. ここで, 凝結を無視しているので大気の熱膨張は無視でき, $d\theta/dt$ の項はゼロになる. よって (A.9-4) は,

$$
\begin{aligned}
-c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi &= -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\Pi\boldsymbol{u}) - c_p\Pi\frac{c_p\overline{\rho}\overline{\theta}^2}{\overline{c}^2}\frac{\partial\Pi}{\partial t} \\
&= -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta}\overline{\rho}\Pi\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\} \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

と書き換えられる.

　したがって, (A.9) は,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}K) + \nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) &= -\nabla\cdot(c_p\overline{\theta\theta}\Pi\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\} + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\overline{\rho}\theta gz}{\overline{\theta}}\boldsymbol{u}\right) + \frac{\theta gz}{\overline{\theta}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left\{w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - \frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) - D_\theta\right\} \\
&- K\frac{\partial\rho}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となり, これをさらに整理すると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\rho}\left\{K - \frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\}\right] + \nabla\cdot\left\{\overline{\rho}\left(K - \frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}} + c_p\overline{\theta}\Pi\right)\boldsymbol{u}\right\} \\
&= \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}\left\{w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} - \frac{\overline{\theta}}{\overline{\overline{T}}}(Q_{\mathrm{rad}} + Q_{\mathrm{dis}}) - D_\theta\right\} - \left(K - \frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}gz\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}
$$

となる. この両辺を全領域で積分し, 境界面を出入りする流れはないとすれば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int\overline{\rho}\left\{K - \frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{c_p\overline{\theta}\Pi}{\overline{c}}\right)^2\right\}dV \\
&= \int\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}dV + \int\frac{\overline{\rho}wgz}{\overline{\theta}}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}dV - \int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{T}}(Q_{rad} + Q_{dis})dV \\
&\quad - \int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta}}D_\theta dV - \int\left(K - \frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}gz\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}dV \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

となる. これが準圧縮方程式のエネルギー方程式である. 左辺は全エネルギーの時間変化である. かっこの中の第 1 項, 第 2 項, 第 3 項はそれぞれ運動エネルギー, 浮力による位置エネルギー, 弾性エネルギーである. 右辺第 1 項, 第 2 項, 第 3 項, 第 4 項はそれぞれ運動量の拡散, 基本場の鉛直温位勾配, 非断熱加熱 (放射, 散逸), 熱の拡散によるエネルギー変化率である. 右辺最後の項は準圧縮方程式の場合スカラー量の時間微分がフラックス形式で書けないことによることにより現れる. この項の存在により準圧縮方程式では外部項がない場合でもエネルギーが保存しない.