非静力学対流モデルの定式化に関する再検討

地形を考慮した雲解像モデルの開発へ向けて

Reconsideration of the formulation of a nonhydrostatic convection model

Toward a cloud resolving model with terrain-following coordinates

高橋 こう子

北海道大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻
地球惑星流体科学講座 地球流体力学研究室

もくじ

1. 背景と目的
2. 乾燥大気における準圧縮モデルの定式化
3. サブグリッドスケールの拡散
4. 乾燥大気における準圧縮モデルの離散化
5. 数値実験 １： 音波の計算
6. 数値実験 ２： 音波減衰項の係数を決めるための計算
7. 数値実験 ３： 数値粘性項の係数を決めるための計算
8. 数値実験 ４： サーマルの計算
9. 数値実験 ４： サーマルの計算 ２
10. まとめと考察

1. 背景と目的

数値実験によく利用される数値モデル例: **ARPS, NHM, CReSS**

既存の数値モデルを利用する場合の問題点

- 特定の研究目的に開発された場合
  → 汎用性に欠ける
- 数理モデルで使われているパラメタリゼーションが明記されていない場合
  → 何が使われているかわからない
- 多くの既存の数値モデルは複雑なため，解読が困難
  → 新しい概念を導入することが難しい

↓

自ら数値モデルを開発

問題点: 準圧縮モデルの定式化や離散化は複雑

↓

定式化と離散化をまとめる

2. 乾燥大気における準圧縮モデルの定式化

予報変数: u, v, w (x, y, z 方向の速度), $\pi(\equiv (p/p_0)^{R_d/c_p}$, エクスナー関数),
$\theta(\equiv T\,(p_0/p)^{R_d/c_p}$, 温位).

基本場　: 水平一様かつ静止状態 $\longrightarrow$ 基本場は静水圧平衡が成り立つ.

基礎方程式系は **Klemp and Wilhelmson (1978)** (以下 **KW1978**) に従う.

運動方程式:

$$\frac{du_i}{dt} + c_p\bar{\theta}\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = \delta_{i3} g \left[\frac{\theta}{\bar{\theta}} - 1\right] - \varepsilon_{i3k} f u_k + D_{u_i}, \tag{1}$$

圧力方程式:

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho}\bar{\theta}^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\bar{\theta}u_j\right) = 0, \tag{2}$$

熱力学の式:

$$\frac{d\theta}{dt} = D_\theta. \tag{3}$$

D_{u_j}, D_θ はサブグリッドスケールの乱流に伴う拡散項, 上つきバー ($\bar{}$) は基本場の変数を表す.

3. サブグリッドスケールの拡散

レイノルズ平均すると

$$D_{u_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i'' u_j''} \sim -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{-K_m\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right\}, \qquad (4)$$

$$D_\theta = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j''\theta''} \sim -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_h\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right). \qquad (5)$$

$\overline{\phi}$ はグリッドスケールの平均成分，ϕ'' はサブグリッドスケールの変動成分，K_m は運動量渦拡散係数，K_h は熱渦拡散係数，E は乱流運動エネルギー，$E=\left(\frac{K_m}{C_m l}\right)^2$, $K_h = 3K_m$,

$$\frac{dK_m}{dt} = -\frac{3g}{\bar{\theta}}\frac{\partial\theta}{\partial z}+2C_m^2 l^2\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2+\frac{1}{2}|\varepsilon_{ijk}|C_m^2 l^2\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$$

$$-\frac{1}{3}\delta_{ij}K_m\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}\right)+\delta_{ij}\left(\frac{\partial K_m}{\partial x_j}\right)^2-\left(\frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2}\right)K^2. \qquad (6)$$

$l=(\Delta x\Delta y\Delta z)^{1/3}$ は混合距離，$C_\varepsilon = C_m = 0.2$ (Deardorff, 1975).

KW1978 では式(6)中の右辺第4項と第6項が消去されている

4. 乾燥大気における準圧縮モデルの離散化

- 空間微分: 中心差分で離散化
- 時間積分: 時間分割法で離散化
  水平陽解-鉛直陰解法
  短い時間間隔で解く項を前進差分
  長い時間間隔で解く項を中心差分

計算不安定を抑えるために追加

- 運動方程式中に音波減衰項 (Skamarock and Klemp, 1992):

$$\alpha Div = \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{G^{1/2}}\frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \alpha \leq 5\times 10^{-6}\times\frac{\Delta x^2}{\Delta\tau} \tag{7}$$

- 圧力方程式以外に数値粘性項:

$$\mathrm{Diff}.\phi = \nu_h\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right]+\nu_v\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad \nu_h \leq \frac{1}{8}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}, \quad \nu_v \leq \frac{1}{8}\frac{\Delta z^{*2}}{\Delta t} \tag{8}$$

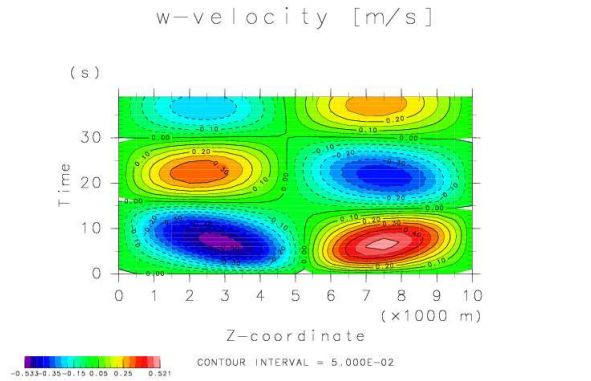
α, ν_h, ν_v を決めるために数値実験

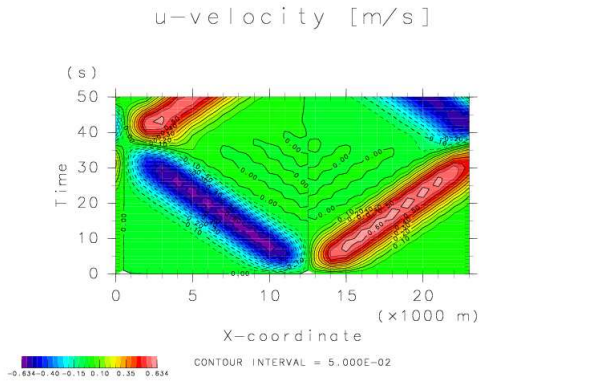
5. 数値実験 1 : 音波の計算

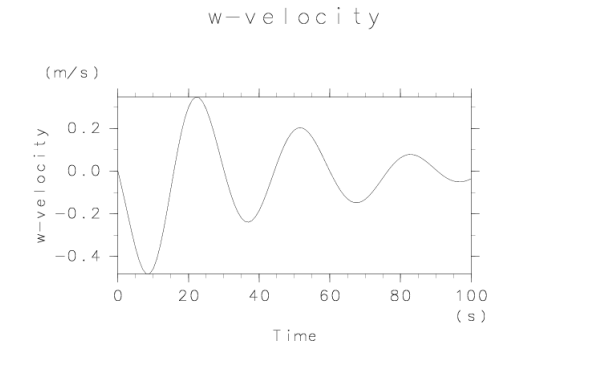
case 1-1 : $\Delta\tau = 1\,\mathrm{s}$, x 方向一様なガウス型圧力の初期擾乱.

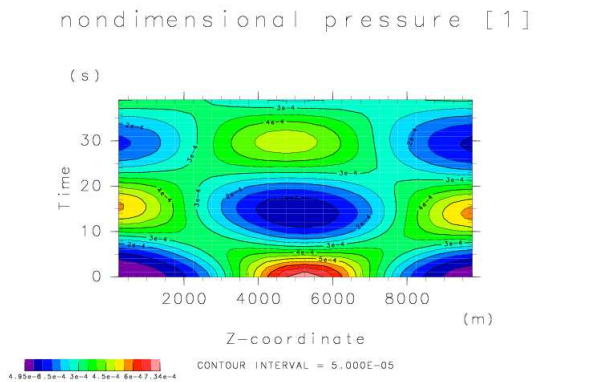
case 1-2 : $\Delta\tau = 1\,\mathrm{s}$, z 方向一様なガウス型圧力の初期擾乱.

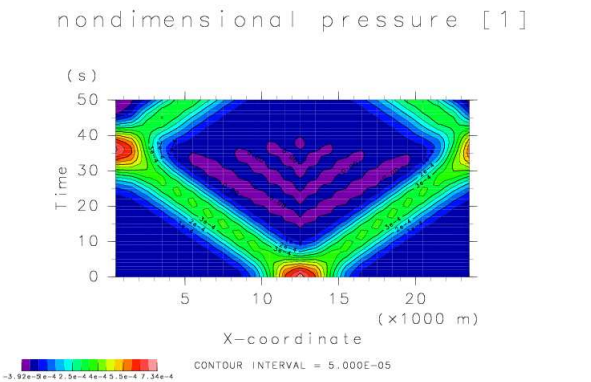
case 1-3 : $\Delta\tau = 10^{-1}\,\mathrm{s}$, case 1-1 と同じ初期擾乱. case 1-1 との比較.

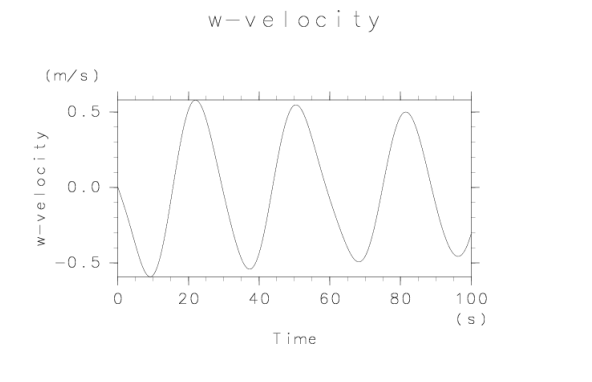












case 1-1 case 1-2 case 1-3

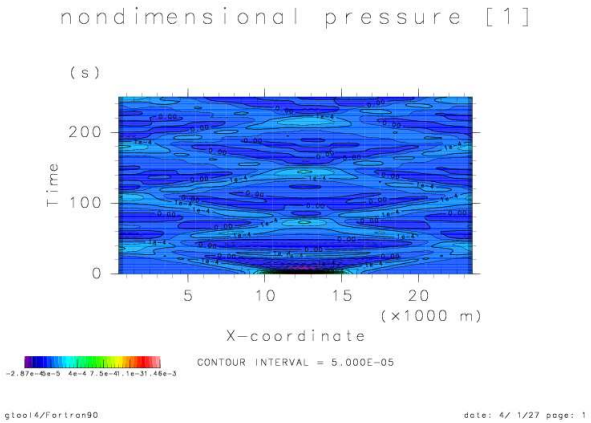
6. 数値実験 2 : 音波減衰項の係数を決める計算

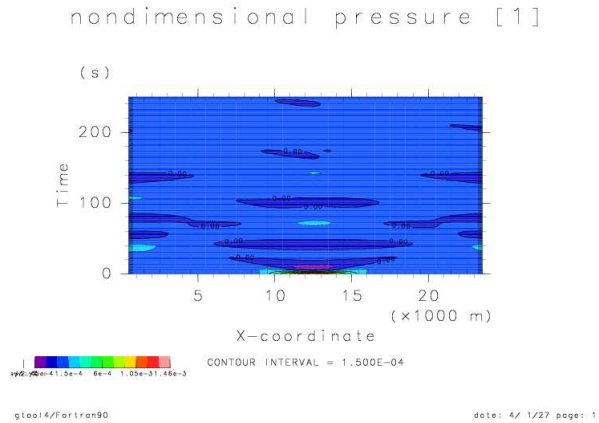
$\Delta x = 10^3\,\mathrm{m}, \Delta\tau = 1.0\,\mathrm{s}$ の場合,

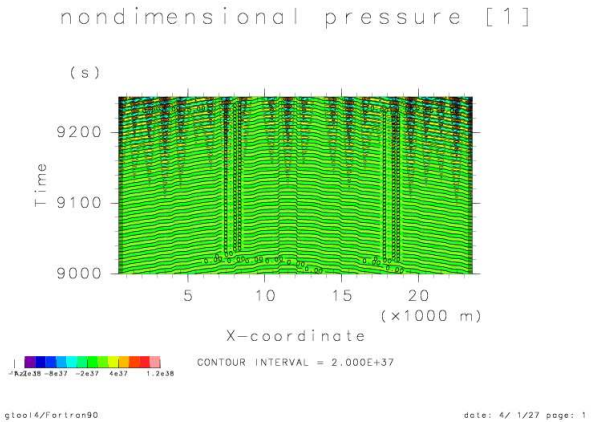
$$\alpha \leq 2.5 \tag{9}$$

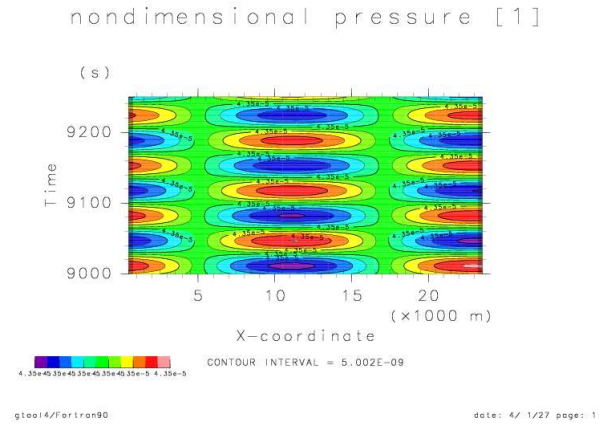
case 2-1 : $\alpha = 0$ (音波減衰項がない場合).

case 2-2 : $\boxed{\alpha = 2.5 \times 10^{-2}}$.









case 2-1 case 2-2

7. 数値実験 3： 数値粘性項の係数を決める計算

$\Delta x = 10^3\,\mathrm{m}, \Delta t = 1.0\,\mathrm{s}$ の場合,

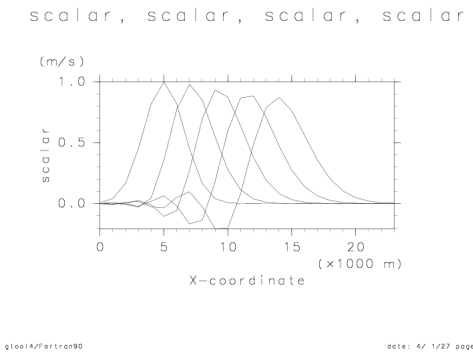
$$\nu_h \leq 1.25 \times 10^5, \qquad \nu_v \leq 3.125 \times 10^4 \tag{10}$$

case 3-1 : $\nu_h = 0, \nu_v = 0$ (数値粘性項がない場合).

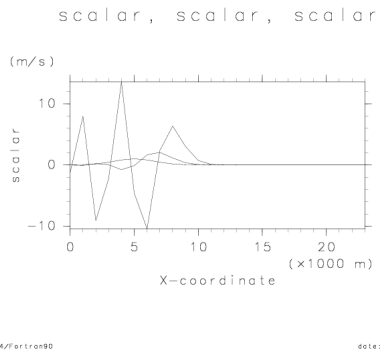
case 3-2 : $\nu_h = 5.0 \times 10^3, \nu_v = 1.25 \times 10^3$.

case 3-3 : $\nu_h = 5.0 \times 10^2, \nu_v = 1.25 \times 10^2$.

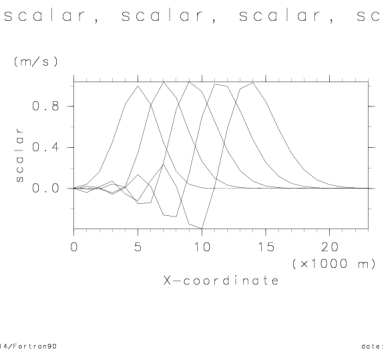
case 3-4 : $\boxed{\nu_h = 5.0, \nu_v = 1.25}$.



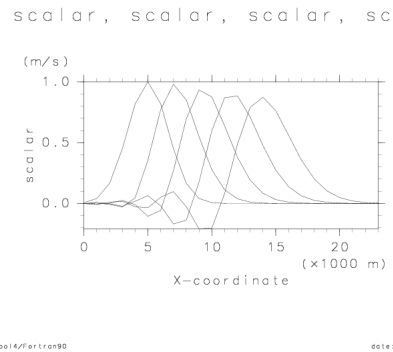
case 3-1



case 3-2



case 3-3



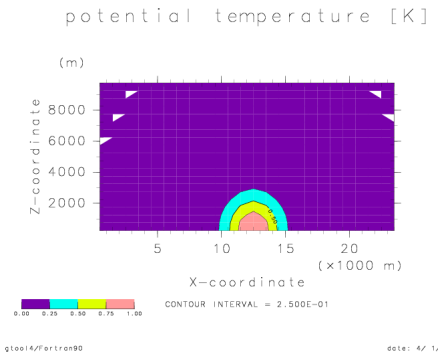
case 3-4

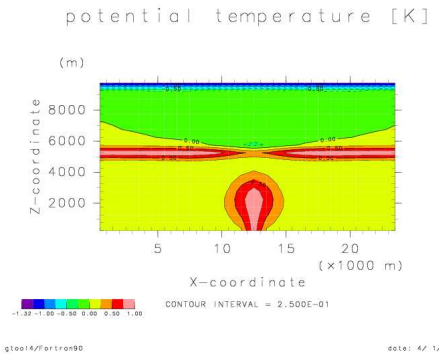
8. 数値実験 4 : サーマルの計算

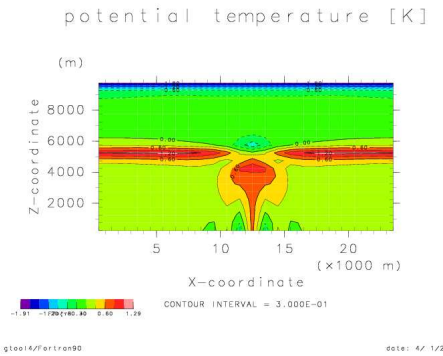
case 4-1 : $K_m = 10\,\mathrm{m^2/s}$

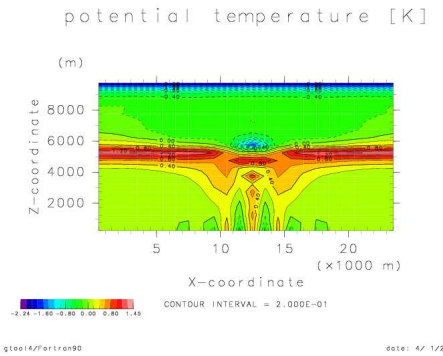
case 4-2 : $K_m = 50\,\mathrm{m^2/s}$

case 4-3 : $K_m = 100\,\mathrm{m^2/s}$



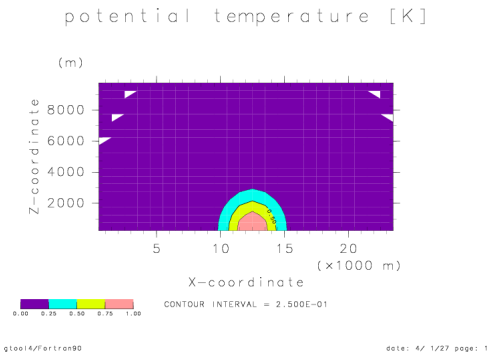


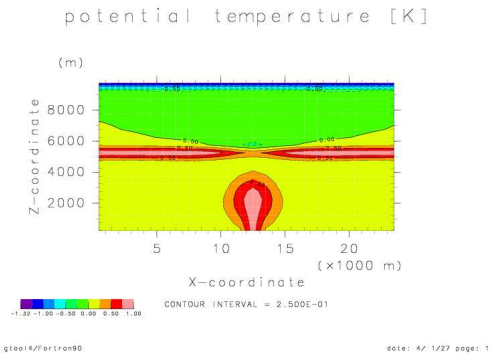


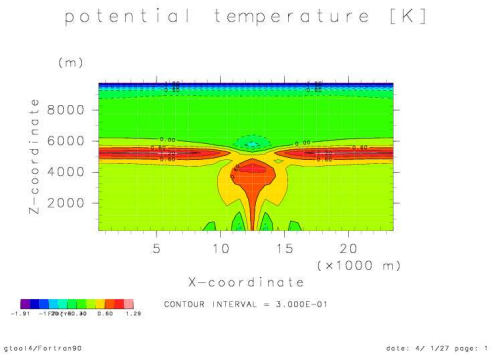


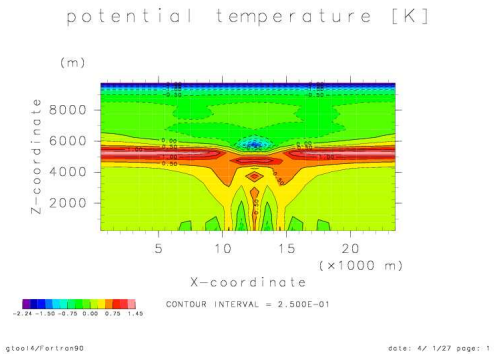
case 4-1 : $t = 0$ s　　$t = 500$ s　　$t = 800$ s　　$t = 1000$ s

9. 数値実験 4 : サーマルの計算 2

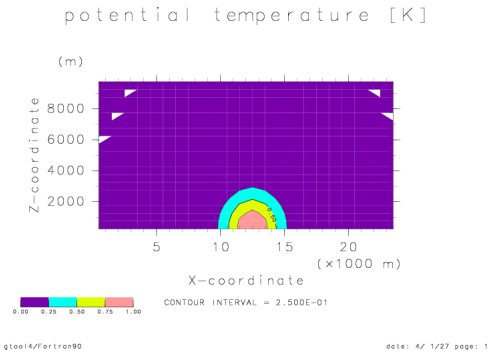


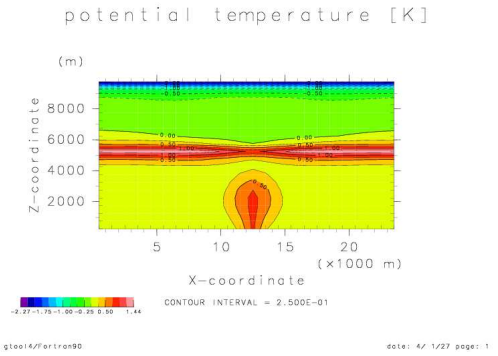


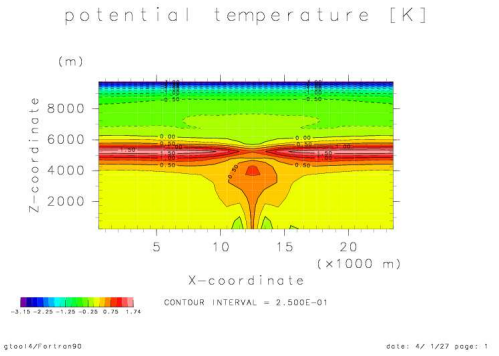


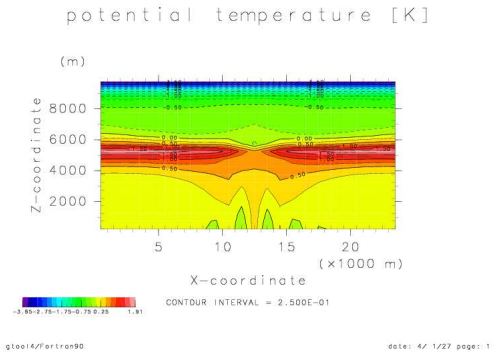


case 4-2 : $t = 0$ s　　$t = 500$ s　　$t = 800$ s　　$t = 1000$ s









case 4-3 : $t = 0$ s　　$t = 500$ s　　$t = 800$ s　　$t = 1000$ s

10. まとめと考察

$\Delta x = 10^3\,\mathrm{m}, \Delta\tau = 1.0\,\mathrm{s}$ の場合以下の値が適当である:

- 音波減衰項の係数は $\alpha = 2.5 \times 10^{-2}$
- 数値粘性項の係数は $\nu_h = 5.0, \nu_v = 1.25$

考察:

- (6) の第４項: サブグリッドスケールでは密度の空間的時間的変化が小さい (非圧縮性流体) と考える
  → 非圧縮の連続の式によって消去される.
- (6) の第６項: 代表的な長さスケールを L, 代表的な運動量渦拡散係数の大きさを K.

$$\delta_{ij}\left(\frac{\partial K_m}{\partial x_j}\right)^2 \sim O\left(\frac{K^2}{L^2}\right). \tag{11}$$

式 (6) において KW1978 で残されている第 5 項について

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} \sim O\left(\frac{K^2}{L^2}\right). \tag{12}$$

→ オーダを見積もると, 消去すべきでない.