

SPMODEL サンプルプログラム

# 水路領域赤道 $\beta$ 面浅水モデル: 2 つの局所熱源に対する線形応答問題

shallow\_eqbeta2.f90

山田 由貴子, 小高 正嗣

2004 年 8 月 27 日

## 目次

1	概要	2
2	支配方程式系	3
2.1	支配方程式系	3
2.2	無次元化	4
2.3	境界条件	4
3	離散化	6
3.1	水平離散化	6
3.2	水平方向のスペクトル表現	6
3.3	時間積分	7
4	使用モジュールとその他の設定	9
5	数値実験	10
6	参考文献	12

## 1 概要

SPMODEL サンプルプログラム『shallow\_eqbeta2.f90』に用いられている基礎方程式と境界条件, および, このプログラムを用いた数値実験の方法について解説する. 基礎方程式は線形化された赤道  $\beta$  面浅水方程式である. 境界条件は,  $x$  方向は周期境界,  $y$  方向は壁面境界としている. 計算はスペクトル法を用いて行い, 展開関数は水平方向にはフーリエ級数, 鉛直方法には境界条件にあわせてフーリエ正弦級数またはフーリエ余弦級数を用いる. スペクトル変換と逆変換および微分演算には, SPMODEL ライブラリ (spml) を用いている. 数値実験として, 赤道上の 2 つの局在した質量源を与えた場合の応答を計算する.

### プログラム名

shallow\_eqbeta2.f90

### プログラム取得元

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/2d-channel-esc/shallow-equator/sample2/SIGEN.htm>

### SPMODEL サンプルプログラム目次

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/sample.htm>

### SPMODEL の使い方

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel>

## 2 支配方程式系

ここでは, 支配方程式系と境界条件を記す.

### 2.1 支配方程式系

支配方程式系は線形化された赤道  $\beta$  面浅水方程式系である.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta y v - g \frac{\partial h}{\partial x} - r_M u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\beta y u - g \frac{\partial h}{\partial y} - r_M v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - r_H h - Q. \quad (3)$$

各記号は以下の量をあらわす.

記号	変数/物理定数
$x$	経度方向座標
$y$	緯度方向座標
$t$	時間
$u$	経度方向流速
$v$	緯度方向流速
$H_0$	流体の平均厚さ
$h$	流体の厚さの偏差
$\beta$	赤道 $\beta$ パラメタ
$g$	重力加速度
$r_M$	レイリー減衰係数
$r_H$	ニュートン冷却係数
$Q$	熱源 (質量源)

表 1: 変数, 物理定数の定義

## 2.2 無次元化

支配方程式 (1), (2), (3) を無次元化する. 長さスケールとして赤道変形半径

$$L_R \equiv \left( \frac{\sqrt{gH_0}}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

を導入する. 速度スケールは  $\sqrt{gH_0}$ , 厚さスケールは  $H_0$  とする. これらを用いると, 長さ, 時間, 速度, 厚さは以下のように無次元化される.

$$x_* = x/L_R, \quad y_* = y/L_R, \quad t_* = t/(L_R/\sqrt{gH_0}).$$

$$u_* = u/\sqrt{gH_0}, \quad v_* = v/\sqrt{gH_0}, \quad h_* = h/H_0.$$

ここで添字  $*$  は無次元量を表す. 以上の無次元変数を用いて (1), (2), (3) を無次元化すると, 以下の式が得られる.

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} = y_* v_* - \frac{\partial h_*}{\partial x_*} - r_{M*} u_*, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_*}{\partial t_*} = -y_* u_* - \frac{\partial h_*}{\partial y_*} - r_{M*} v_*, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = - \left( \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial v_*}{\partial y_*} \right) - r_{H*} h_* - Q_*. \quad (7)$$

ここで,

$$r_{M*} = r_M/(L_R/\sqrt{gH_0}), \quad r_{H*} = r_H/(L_R/\sqrt{gH_0}), \quad Q_* = Q/(H_0\sqrt{gH_0}/L_R)$$

である.

## 2.3 境界条件

$x$  方向の境界条件は周期境界条件とする.  $y$  方向の境界条件は  $y = \pm y_m/2$  に置いた剛体壁面で  $v = 0$ , 応力なしとする.

$x_*$  方向の境界条件は,  $x_*$  方向の計算領域を  $x_{m*}$  とすると

$$u_*(x_* + x_{m*}, y_*) = u_*(x_*, y_*), \quad (8)$$

$$v_*(x_* + x_{m*}, y_*) = v_*(x_*, y_*), \quad (9)$$

$$h_*(x_* + x_{m*}, y_*) = h_*(x_*, y_*) \quad (10)$$

と表される.  $y_*$  方向の境界条件は  $y_* = \pm y_{m_*}/2$  において,

$$v_* = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial y_*} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h_*}{\partial y_*} = 0 \quad (13)$$

である<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>ただしこの境界条件はふさわしくない. 本来ならば  $x, y$  方向ともに周期境界とするのが正しい. しかし数値計算に SPMODEL ライブラリの `esc_module` を用いているため, このような境界条件に決まる.

### 3 離散化

この節では方程式系の空間離散化および使用した時間積分法について説明、プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する。

以下では無次元量を示す添字 \* は省略する。

#### 3.1 水平離散化

支配方程式 (5), (6), (7) の空間離散表現は以下である。

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = y_j v_{i,j} - \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i,j} - r_M u_{i,j}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} = -y_j u_{i,j} - \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i,j} - r_M v_{i,j}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i,j} - r_H h_{i,j} - Q_{i,j}. \quad (16)$$

ここで添字  $i, j$  は格子点  $(x_i, y_j)$  上の値であることを表す。

#### 3.2 水平方向のスペクトル表現

空間離散化した支配方程式 (14), (15), (16) をスペクトル法を用いて表現する。スペクトル展開は東西方向にフーリエ級数, 南北方向には境界条件にあわせてフーリエ正弦級数またはフーリエ余弦級数を用いて行う。非線形項を扱う場合は, 先に格子点上での非線形項の値を計算し, その値のスペクトルを求める方法 (変換法) を用いる。以下では  $k, l$  をそれぞれ  $x, y$  方向波数,  $K, L$  を切断波数,  $I, J$  を格子点数とする。

$u_{i,j}, v_{i,j}, H_{i,j}$  はスペクトル逆変換によって以下のように展開される。

$$u_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{u}_{k,l}, \quad (17)$$

$$v_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=1}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{v}_{k,l}, \quad (18)$$

$$h_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{h}_{k,l}. \quad (19)$$

スペクトル係数  $\hat{u}_{i,j}$ ,  $\hat{v}_{i,j}$ ,  $\hat{h}_{i,j}$  はスペクトル変換によって以下のように与えられる.

$$\hat{u}_{k,l} = \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) u_{i,j}, \quad (20)$$

$$\hat{v}_{k,l} = \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) v_{i,j}, \quad (21)$$

$$\hat{h}_{k,l} = \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) h_{i,j}. \quad (22)$$

以上を用いると, (14), (15), (16) のスペクトル表現は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_{k,l}}{\partial t} &= \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j v_{i,j} \\ &\quad - \left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{h}_{k,l} - r_M \hat{u}_{k,l}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}_{k,l}}{\partial t} &= -\frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j u_{i,j} \\ &\quad + \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{h}_{k,l} - r_M \hat{v}_{k,l} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{h}_{k,l}}{\partial t} &= -\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{u}_{k,l} - \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{v}_{k,l} - r_H \hat{h}_{k,l} \\ &\quad - \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) Q_{i,j}. \end{aligned} \quad (25)$$

### 3.3 時間積分

ここでは時間積分法について記述し, プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する. 以下では  $\Delta t$  を時間格子間隔, 時刻  $\tau \Delta t$  における  $\hat{u}_{k,l}$  の値を  $\hat{u}_{k,l}^\tau$  等と表す.

時間方向の離散化は Euler スキームを用いて行う<sup>2</sup>. 時空間方向に離散化された方程式は以下のように表される.

$$\hat{u}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{u}_{k,l}^\tau + \Delta t A_u^\tau, \quad (26)$$

<sup>2</sup>プログラムは Euler スキームではなく, 半端な time split のようになってしまっており, 本ドキュメントの定式化と異なっている.

$$\hat{v}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{v}_{k,l}^{\tau} + \Delta t A_v^{\tau}, \quad (27)$$

$$\hat{h}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{h}_{k,l}^{\tau} + \Delta t A_h^{\tau} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_u^{\tau} = & \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j \hat{v}_{i,j}^{\tau} \\ & - \left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{h}_{k,l}^{\tau} - r_M \hat{u}_{k,l}^{\tau}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} A_v^{\tau} = & -\frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) y_j \hat{u}_{i,j}^{\tau} \\ & + \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{h}_{k,l}^{\tau} - r_M \hat{v}_{k,l}^{\tau}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} A_h^{\tau} = & -\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \hat{u}_{k,l}^{\tau} - \left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \hat{v}_{k,l}^{\tau} - r_H \hat{h}_{k,l}^{\tau} \\ & - \frac{1}{x_m y_m} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) Q_{i,j}^{\tau}. \end{aligned} \quad (31)$$

## 4 使用モジュールとその他の設定

スペクトル変換と逆変換, 微分演算は SPMODEL ライブラリ (spml) の `esc_module` に含まれる関数を用いて行う. フーリエ正弦および余弦変換, それらの逆変換の際の数値積分は台形公式を用いて行う. spml が下位で使用する ISPACK の仕様から, 格子点数  $I, J$  は偶数で, かつ  $I/2, J/2 = 2^a 3^b 5^c$  ( $a, b, c$  は 0 または整数) でなければならない. 非線形項の計算によって生じるエリアジングを防ぐため, 格子点数  $I, J$  と切断波数  $K, L$  は  $I > 3K, J > 3K/2$  を満たすように与える.

## 5 数値実験

数値実験として、赤道に 2 つの局在した符号の異なる質量源を与えた場合の応答を計算する。質量源分布は以下のように与える。

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (32)$$

$$Q_1 = \begin{cases} Q_{10} \exp(y^2/b_1) \cos\left(\frac{\pi(x-x_1)}{2a_1}\right) & -a_1 \leq x \leq a_1 \\ 0 & x < -a_1, x > a_1 \end{cases}, \quad (33)$$

$$Q_2 = \begin{cases} Q_{20} \exp(y^2/b_2) \cos\left(\frac{\pi(x-x_2)}{2a_2}\right) & -a_2 \leq x \leq a_2 \\ 0 & x < -a_2, x > a_2 \end{cases}. \quad (34)$$

初期条件は  $u = v = h = 0$  である。パラメータは表 2 にまとめた値を用いる。

格子点数  $I, J$  と切断波数  $K, L$  はそれぞれ  $I = 64, J = 32, K = L = 16$  とする。時間格子間隔  $\Delta t$  は 0.2, 計算ステップ数は 3,000 ステップである。

パラメータ	数値
$r_M$	0
$r_H$	0
$Q_{10}$	1.0
$a_1$	20
$b_1$	0.2
$x_1$	0.0
$Q_{20}$	- 1.0
$a_2$	20
$b_2$	0.2
$x_2$	30.0
$x_m$	400
$y_m$	10

表 2: 使用したパラメータの値

図 1 に厚さ分布の時間変化の様子を示す。2 つの質量源の東側では負のケルビン応答と正のケルビン応答が打ち消しあった結果として、負のケルビン応答の波頭が伝播する様子のみが見られる。十分時間が経過した後には循環は 2 つの質量源の間のみに残る<sup>3</sup>。

<sup>3</sup>図 1 (流体厚さ) では明らかに見ることはできない

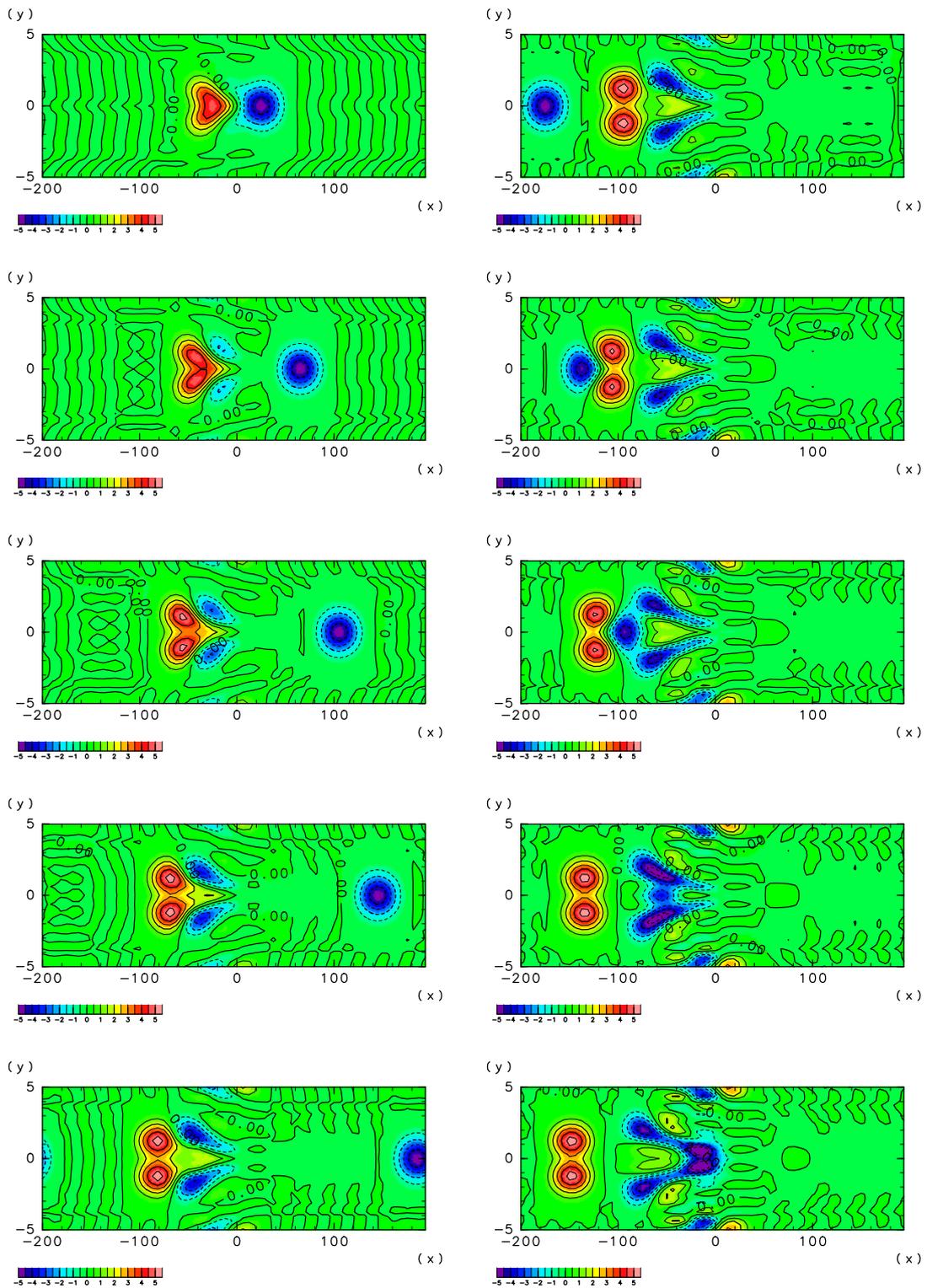


図 1: 厚さの分布の時間変化の様子. 右上から左下へに  $t = 40$  から 40 毎の結果.

## 6 参考文献

Gill, A. E., 1980: Some simple solution for heat-induced tropical circulation. *Qurt. J. R. Meteorol. Soc.*, **106**, 447–462.

Heckley, W. A., and A. E. Gill, 1984: Some simple analytical solutions to the problems of forced equatorial long waves. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **110**, 203–217.

竹広真一, 石岡圭一, 豊田英司, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2002: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.

## 謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>

において公開されているものである (©地球流体電脳倶楽部スペクトルモデルプロジェクト spmodel@gfd-dennou.org 2002. ). 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用するには今一度自ら内容を確認めることを願います (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

spmodel@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.