

# Poisson 方程式

室井ちあし, 石渡正樹

1990/05/24

## 1 直接法

ここでは, 2次元の Poisson 方程式

$$\nabla^2 \psi(x, z) = \rho(x, z) \quad (1)$$

の解を求める数値計算法のうち, 直接法について説明する.

直接法とは,  $\psi, \rho$  の Fourier 変換  $\tilde{\psi}, \tilde{\rho}$  を Poisson 方程式 (8) に代入して方程式の次元を 2次元から 1次元に落とし, 行列を用いて  $\tilde{\rho}$  から  $\tilde{\psi}$  を計算し, その  $\tilde{\psi}$  を逆 Fourier 変換して  $\psi$  を求める方法である.

### 1.1 格子の設定と方程式の差分化

計算範囲を  $0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq z \leq 1$  とする. この計算範囲を  $x$  軸に垂直に  $N_x$  等分,  $z$  軸に垂直に  $N_z$  等分し, 右図のような長形状の格子をつくる. その格子の間隔を,  $x$  方向に  $\Delta x (= \lambda/N_x)$ ,  $z$  方向に  $\Delta z (= 1/N_z)$  とする. つまり, 格子点の座標は,  $(x_i, z_j)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_x; j = 0, 1, \dots, N_z$  となる.

そして座標  $(x_i, z_j)$  における  $\psi$  を

$$\psi_{i,j} = \psi(x_i, z_j)$$

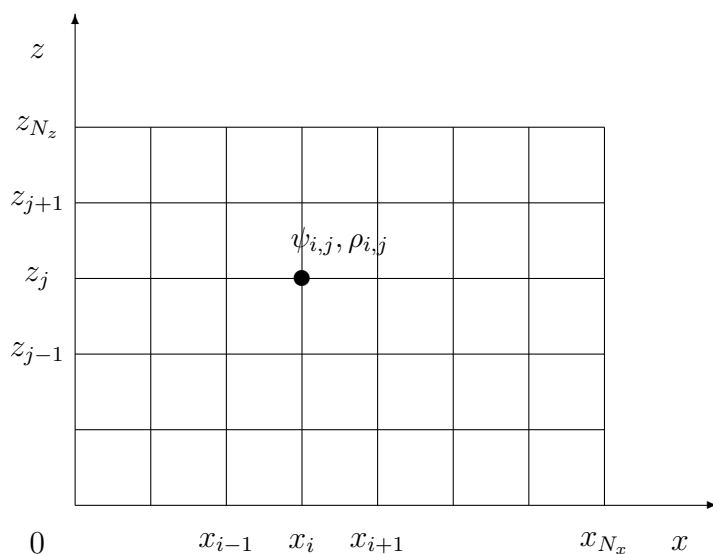


図 1: 格子

のように書くことにする.  $\rho$  についても同様に書く.

このように格子を設定することによって, Poisson 方程式 (8) は次のように差分化することができる.

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} = \rho_{i,j} \quad (2)$$

## 1.2 Fourier 変換

$x$  方向の波数を  $k$  とすると,  $\psi$  と,  $\psi$  を Fourier 変換した  $\tilde{\psi}$  は, 次のような関係にある.

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_{k=0}^{N_x-1} \tilde{\psi}_{k,j} \exp\left(2\pi i \frac{ik}{N_x}\right) \quad (3)$$

$$\tilde{\psi}_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_{i=0}^{N_x-1} \psi_{i,j} \exp\left(-2\pi i \frac{ik}{N_x}\right) \quad (4)$$

$\rho$  と,  $\rho$  を Fourier 変換した  $\tilde{\rho}$  についても同様に書ける.

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_{k=0}^{N_x-1} \tilde{\rho}_{k,j} \exp\left(2\pi i \frac{ik}{N_x}\right) \quad (5)$$

$$\tilde{\rho}_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_{i=0}^{N_x-1} \rho_{i,j} \exp\left(-2\pi i \frac{ik}{N_x}\right) \quad (6)$$

この (3) と (5) を, Poisson 方程式 (8) を差分化した式 (10) に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_{k=0}^{N_x-1} \exp\left(2\pi i \frac{ik}{N_x}\right) \left\{ -\frac{\tilde{\psi}_{k,j}}{(\Delta x)^2} \cdot 4\sin^2 \frac{\pi k}{N_x} + \frac{\tilde{\psi}_{k,j+1} - 2\tilde{\psi}_{k,j} + \tilde{\psi}_{k,j-1}}{(\Delta z)^2} \right\} \\ = & \frac{1}{\sqrt{N_x}} \sum_{k=0}^{N_x-1} \tilde{\rho}_{k,j} \exp\left(2\pi i \frac{ik}{N_x}\right) \end{aligned}$$

となる. よって, 各波数  $k$  について

$$\frac{1}{(\Delta z)^2} \tilde{\psi}_{k,j-1} - \left\{ \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\pi k}{N_x} + \frac{2}{(\Delta z)^2} \right\} \tilde{\psi}_{k,j} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \tilde{\psi}_{k,j+1} = \tilde{\rho}_{k,j} \quad (7)$$

が成り立つ.

### 1.3 方程式の解

Poisson 方程式を差分化した式を Fourier 変換した式 (7) を行列の形であらわそう.  
 $\psi$  が  $z$  方向に周期  $N_z$  を持つとする.

$$A \equiv \begin{pmatrix} -\frac{4\sin^2 \frac{\pi k}{N_x}}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta z)^2} & \frac{1}{(\Delta z)^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(\Delta z)^2} \\ \frac{1}{(\Delta z)^2} & -\frac{4\sin^2 \frac{\pi k}{N_x}}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta z)^2} & \frac{1}{(\Delta z)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\Delta z)^2} & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & \ddots & \\ \frac{1}{(\Delta z)^2} & 0 & \cdots & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{k,0} \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_{k,N_z-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\rho} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{k,0} \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{k,N_z-1} \end{pmatrix}$$

とおくと, 式 (7) は

$$A\tilde{\psi} = \tilde{\rho}$$

と書ける. よって,  $\tilde{\psi}$  は

$$\tilde{\psi} = A^{-1}\tilde{\rho}$$

によって求めることができる.  $\tilde{\psi}$  が求まれば, これを逆 Fourier 変換 (3) することによって,  $\psi$  を求めることができる.

メダタシ, メダタシ.

## 2 緩和法

ここでは, 2次元の Poisson 方程式

$$\nabla^2\psi(x, z) = \rho(x, z) \quad (8)$$

の解を求める数値計算法の1つである緩和法について説明する.

緩和法 (Relaxation Method) とは, Poisson 方程式 (8) を差分化して

$$L\Psi = B$$

という形にして (ただし,  $L$  は行列,  $\Psi, B$  はベクトル), 解をそこそこの誤差内で求めようという考えである.

つまり, 行列  $L$  が通常, 対角成分付近を除くとほとんどの成分が 0 であるので,  $L^{-1}$  をまともに求めて  $\Psi$  を計算しようとするのは時間と計算機のメモリが無駄であると考え, どうせモデル化したときに誤差は入ってしまったのだから多少ごまかしてもよいだろうと開き直る考え方である.

## 2.1 ごまかし方

Poisson 方程式 (8) をまともに解く代りに, 次のような方程式を解くことを考える.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \kappa(\nabla^2 \psi - \rho) \quad (9)$$

$\rho = 0$  ならば, これは熱伝導方程式そのものである. 以下, 当分の間  $\kappa = 1$  とする. すると方程式 (9) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi - \rho \quad (10)$$

となる. この定常解, すなわち

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

なる解は, 元の式 (8) の解に他ならない. そこで適当な初期値から出発して

(10) の解がほぼ定常となったとき, これは近似的に方程式 (8) の解である!

と考えるのである.

## 2.2 解の求め方

(10) を解くために差分化する. 例えば,

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} = \nabla^2 \psi_{i,j}^n - \rho_{i,j}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{n+1} &= \psi_{i,j}^n + \Delta t(\nabla^2 \psi_{i,j}^n - \rho_{i,j}) \\ &= \psi_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{d^2}(\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n - d^2 \rho_{i,j}) \quad (11) \end{aligned}$$

とする. ただし

$$\Delta x = \Delta z \equiv d$$

とおいた. ここで, 解として  $\psi = e^{x+y}$  と仮定すると, この差分方程式が安定であるためには

$$\Delta t \leq \frac{d^2}{4}$$

であれば十分である. そこで,  $\Delta t$  として  $\frac{d^2}{4}$  をとることにしよう.

さて, 残差  $R_{ij}^n$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} R_{i,j}^n &\equiv \nabla^2 \psi_{i,j} - \rho_{i,j} \\ &= \frac{1}{d^2} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n) - \rho_{ij} \end{aligned}$$

解が定常となったかどうかの判断は,  $R_{ij}^n$  があらかじめ決めておいたある正数  $\varepsilon$  より小さくなれば, 十分な精度が得られたとしておこなう.

### 2.3 補足

さて, 誤差を考えてみよう.

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{n+1} &= \psi_{i,j}^n + \delta\psi^n \\ &= \psi_{i,j}^n + \frac{1}{4} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n - d^2 \rho_{i,j}) \\ &= \frac{1}{4} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - d^2 \rho_{i,j}) \end{aligned} \quad (12)$$

であるから,  $\tilde{\psi}$  を真の解,  $e$  を誤差とすると,

$$\begin{aligned} e_{i,j}^{n+1} &= \psi_{i,j}^{n+1} - \tilde{\psi}_{i,j} \\ &= \frac{1}{4} (e_{i+1,j}^n + e_{i-1,j}^n + e_{i,j+1}^n + e_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (13)$$

となる. ここで, 境界においては  $e_{i,j}^n = 0$  であることを考えれば

$$e_{i,j}^n = \sum_{l,m} (K_{l,m})^n \sin \frac{l\pi}{L} i \sin \frac{m\pi}{M} j \quad (14)$$

とおくことができる.  $K_{l,m}$  は収束の速さを表す. (14) を (13) に代入すると

$$K_{l,m} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{l\pi}{L} + \cos \frac{m\pi}{M} \right) \quad (15)$$

が得られる.

リープマン法では, 式 (11) の  $\psi_{i-1,j}^n, \psi_{i,j-1}^n$  を各々  $\psi_{i-1,j}^{n+1}, \psi_{i,j-1}^{n+1}$  とする. こうすると,

$$K_{l,m} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{l\pi}{L} + \cos \frac{m\pi}{M} \right)^2 \quad (16)$$

となり, 収束が速くなる.

## 文献

Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series*, No.17.