

# 数値算法：はじめに

室井ちあし

1989/11/28

## 1 気象業界における数値計算の歴史と現状

### 1.1 歴史

気象業界における数値計算の歴史について簡単な年表を以下に示す。

1904年, Wilhelm Bjerknes : 運動方程式を積分することによる天気予報の可能性を指摘した。Bjerknes が実際に数値積分を実行しようとしていたかどうかはわからない。

1922年, Richardson : 実際に手計算で積分を行なう。非常に長い時間を要して得た結果は間違っていたが、めげずにこれを本にする。当時は、実地に応用出来るかは疑問視されていた。

1930年頃, Courant, Friedrichs, Lewy ら (1928), Rossby (1930年代): 運動方程式の解の形を研究することにより、簡略化された方程式、例えば渦度方程式などを解けばいいということを示す。

1945年, ENIACの発明 : Charney et al. (1950) により, ENIAC というコンピュータを用いて初めてちゃんとした数値予報がなされる。これ以降, 計算機の進歩が新しい計算方法を生み出し, 計算機と計算方法は, 相補的に進歩していく。

1970年代に入って, 計算機, 計算方法共に進歩したため, 数値計算は実用に耐え得るものとなってきた。具体的にいうと, 渦度方程式や発散方程式などの簡略化され

た方程式だけではなく、基礎方程式を直接解くことができるようになってきた。これに伴い、数値計算の応用範囲も広がってきている。

気象学では、

- 数値予報

流体力学の方程式を、現在の観測値を初期値として積分し、未来の天気を予測する

という目的のはっきりしたものから、

- 数値シミュレーション

何か適当な条件を設定して、どのようになるかやってみるもの

の様に自由なものまで、いろいろなことが行われるようになってきている。

## 1.2 現状

現在使われている数値計算法は、次の Euler 的な方法と Lagrange 的な方法の 2 つに大別される。

### 1.2.1 Euler 的な方法

- 格子点法

現在最も良く用いられている。これは、空間に固定した格子点 (grid) を設定するものである。

- スペクトル法

直交関数系で展開して波数空間に移ることにより、偏微分方程式系を連立常微分方程式にしてしまう方法。この場合、係数を時間の関数として計算することになる。長所としては、各種の保存則を満たすようなスキームを書きやすい、という点が挙げられる。短所は、実空間とスペクトル空間とを行き来するため、手間がかかる点である。しかし現在では、FFT の出現により、効率においてもスペクトル法は格子点法と競争出来るようになった。

### 1.2.2 Lagrange 的な方法

なかなか難しい。噂によると、氷河、レオロジー業界では、Lagrange 的に積分しているらしい。

## 2 有限差分法の原理

### 2.1 有限差分法

有限差分法 (finite difference method) とは、偏微分方程式と境界条件を代数方程式で近似し、この代数方程式を解いていく方法である。その際、離散的な時刻における、格子点上の従属変数の値だけを使った代数方程式をつくる。時間、空間共に、有限の大きさの間隔を持った差分を使っているため、この近似解法を有限差分法という。

例として、1 個の独立変数  $x$  を持った関数

$$u = u(x)$$

を差分することを考える。 $u(x)$  は、ここで考える微分方程式の解である。幅  $L$  の有界な領域  $R$  で  $u(x)$  を差分しよう。格子点を導入するため、一番簡単な場合を考え、 $R$  を均等な幅  $\Delta x$  に均等に分割する。ここで、 $\Delta x$  を、格子間隔 (grid interval) という。当然  $\Delta x$  の整数倍が  $L$  となるようにとる。領域  $R$  の左端に原点を取れば、格子点は、 $j\Delta x$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, J$ ) となる。ただし、 $J$  は格子点の数である。これで、 $J + 1$  個の値

$$u_j = u_j(j\Delta x)$$

が求まれば関数  $u(x)$  を差分近似できたことになる。

次に導関数の近似を求めたい。これには沢山の方法があるが、ここでは簡単に、有限差分商

$$\frac{\Delta u_j}{\Delta x}$$

で、導関数  $\left(\frac{du}{dx}\right)_j$  を置換する。ただし、 $\Delta u_j$  は差分である。差分の取り方にもいろいろあるが、ここでは例えば

$$\Delta u_j \equiv u_{j+1} - u_j$$

とする。

離散的な値  $u(j\Delta x)$  が求まっても、関数それ自体が求まったことにはならない。この差を波数空間で見よう。

$u(x)$  をフーリエ級数

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( a_n \cos 2\pi n \frac{x}{L} + b_n \sin 2\pi n \frac{x}{L} \right)$$

に分解して係数  $a_n, b_n$  を決めようとする、 $u(j\Delta x)$  は  $J+1$  個しかない、全部で  $J+1$  個しか決定出来ない。係数を求め得る最も短波長の波は  $n = J/2$  (正確には、これは  $J$  が偶数の場合、奇数のときは  $(J-1)/2$  となる) のもの、すなわち波長が

$$\frac{L}{n} = \frac{2L}{J} = \frac{2L}{L/\Delta x} = 2\Delta x$$

の波である。結論として、 $u(j\Delta x)$  では、波長が  $2\Delta x$  以下の波は決定できない。これが、関数  $u(x)$  が求まっているのと、離散的な値  $u(j\Delta x)$  が求まっていることとの違いである。

## 2.2 格子点の取り方

格子点法においては、積分する領域をまず格子点で区切る。多くの場合長方形の格子で区切るが、不規則な形をした領域を考えると、三角形の格子で区切ることもある。

正方形の格子で区切る場合、5点法、9点法などの方法がある。これらは、図1において、中央の点におけるある物理量の値を計算するための近似法である。ここで、最も近い4点(白丸)における値を使った近似法を、求めようとしている中央の点まで含めると5点における値を使っている、5点法という。5点法で使う4点に加えて、次に近い4点(黒丸)での値を使う近似法を9点法という。

2次元以上の問題を考えるとき、格子点には方向性があるため、どの様にとってもいい、というわけではない。すなわち、ある1つの方向についてみた時、格子を回転させると、格子間隔が変わる。例えば正方形の格子を取ったとき、正方形の辺の方向と、対角線の方向とでは、格子間隔が  $\sqrt{2}$  倍違う。この結果、同じ波でも、伝播する方向によって、違う結果が出てきてしまう。

これを防ぐ方法として

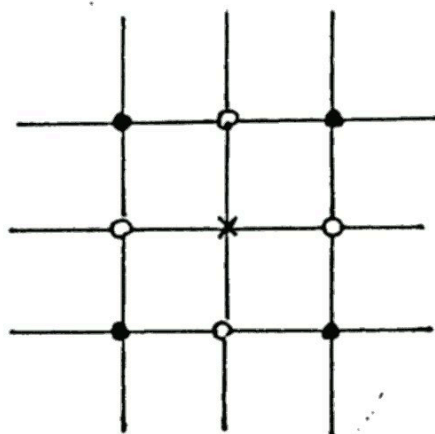


図 1: 中央の点における値を近似する場合に利用する格子点

- 沢山の格子点を使って近似する

ことがある。つまり、5点法を使うよりも9点法を使った方がよい。なぜなら9点法の方が方向性が弱いからである。それでも方向性が強すぎる時は、求める点に近い方から、13, 21, 25, ... と順次点の数を増やしていけばよい。

その他の方法としては、

- Lagrange 的に積分する  
波と一緒に動いてしまえば、格子点がどう取ってあろうとも、余り関係ない
- スペクトル法を使う  
固有関数に展開するとは、見方を変えれば、1点での値を計算するために、全ての点の値を考慮に入れることであるから、方向性はなくなる

などというやり方がある。

### 3 有限差分スキームにおける基礎概念

微分方程式中の導関数を適当な有限差分近似で置き換えて得られる代数方程式を

有限差分近似式, または有限差分スキーム

という。ここでは、有限差分スキームを考える場合に、なくてはならない4つの基礎概念

- 適合性 (consistency)  
差分間隔を小さくすると、近似された導関数が真の導関数に収束する性質
- 正確度 (accuracy)  
どの程度適合性があるのかを表す度合い
- 収束性 (convergence)  
差分間隔を小さくすると、数値解が真の解に収束する性質
- 安定性 (stability)  
差分間隔一定で計算を続けていっても（タイムステップ数を増やしていても）、数値解が発散しない性質

について説明する。

### 3.1 適合性 (consistency)

導関数の近似は、差分間隔  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  の時、導関数に収束しなければならない。この内容は、たいてい

近似は適合性 (consistency) を持たねばならない

% と表現する。

適合性を持つためには、近似の誤差が  $\Delta x, \Delta t$  について1次以上であることが必要かつ十分である。すなわち、誤差を  $\varepsilon$  とすれば、

$$\varepsilon = O(\Delta x), \quad \varepsilon = O(\Delta t)$$

であることが必要十分である。同様に、差分間隔が0に収束するとき、差分方程式が微分方程式に収束する場合、

このスキームには適合性がある!

という.

初期値問題においては, スキームに適合性をもたせることが特に重要である. 境界値問題ならば, 境界において真の値が与えられているため, 途中で真の値からずれても, 正しい値に戻ることが可能である. しかし, 初期値問題では, 一旦ずれたらもはや正しい値に戻ることができない. よって, 初期値問題では, スキームの適合性の有無はきちんと調べておかなければならない.

### 3.2 正確度 (accuracy)

適合性のあるスキームならば, 差分間隔が 0 に収束するとき, スキームは元の式に収束する. だがそのとき, 格子間隔の何乗に比例して収束するのか? これを表現するのが正確度 (accuracy) という概念である. 以下, 例として 1 次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u = u(x, t), \quad c = \text{正の定数} \quad (1)$$

を用いて説明する. この解析解は

$$u = f(x - ct) \quad (2)$$

である. 但し,  $f$  は任意の関数であり, 初期条件によって決まる.

$x - t$  平面上の直線

$$x - ct = \text{const.}$$

上では,  $u$  は一定の値を取る. このような直線を特性曲線 (characteristics) という.

数値解を求めるため,  $x - t$  平面に, 図 1 の様に格子を設定する. 点  $(j\Delta x, n\Delta t)$  における  $u$  の値  $u_j^n$  を求めることを考える.

真の解を見れば, 時間微分と空間微分は次のように置き換えるのがいいことが分かる.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3)$$

となる.

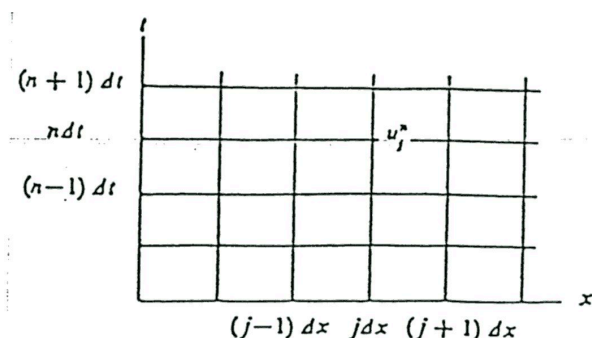


図 2: (6) 式の近似解を求めるための有限差分格子

このスキームは適合性がある. すなわち, 差分間隔が 0 に近づく時, 元の微分方程式 (6) に近づく.

スキームの誤差は, 次のようにして定義される. 真の解  $u(j\Delta x, n\Delta t)$  を (7) に代入した時, 本来ならば右辺は 0 となるはずだが, 誤差のため 0 とはならない. これを  $\varepsilon$  と書き, 打ち切り誤差 (truncation error) という. すなわち,

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + c \frac{u(j\Delta x, n\Delta t) - u((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x} = \varepsilon \quad (4)$$

である.

(4) の左辺を Taylor 展開すると

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^2 + \dots - c \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + \dots \right) \quad (5)$$

と書ける. 最低次の項は,  $\Delta x$  で 1 次,  $\Delta t$  で 1 次である. そこで,

このスキームは  $\Delta x$  について 1 次,  $\Delta t$  について 1 次の正確度 (accuracy) を持つ!

という. これを

$$\varepsilon = O(\Delta x), \quad \varepsilon = O(\Delta t)$$

または

$$\varepsilon = O(\Delta x, \Delta t)$$

と書く。スキームによっては、 $\Delta x$ ,  $\Delta t$  それぞれに対しての accuracy の次数が違うので、この2つをわけて考えることは有用である。

正確度が  $n$  次のスキームを単に

$n$  次のスキーム!

と呼ぶ。

### 3.3 収束性 (convergence)

適合性のあるスキームであっても、差分間隔  $\Delta x$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき、数値解の誤差  $\rightarrow 0$  とは必ずしもならない。ここで、収束性 (convergence) という概念が登場する。

全時間  $n\Delta t$  を固定して、差分間隔  $\Delta x$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$  とした時、数値解の誤差  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t) \rightarrow 0$  となるならば、

この数値解は収束する!

という。又、あるスキームが任意の初期値に対して収束する解を与えるならば、

そのスキームは収束する!

という。

差分スキームが適合性があるからといって、収束するとは限らない。それは、依存領域についても考慮しなければならないからである。依存領域 (domain of dependence) というのは、注目する点における関数の値を計算するために用いる格子点の集合のことである。

例として、前で取り上げた移流方程式 (6) を考える。ここで我々は、図 2. において、黒丸で表わされている点 A における数値解を求めたい。

特性曲線  $x - ct = \text{const.}$  が、斜めの実線で表わされている。特性曲線上では、 $u$  の値は全て等しいから、図における原点の  $u$  の値と、点 A における  $u$  の値は等しい。

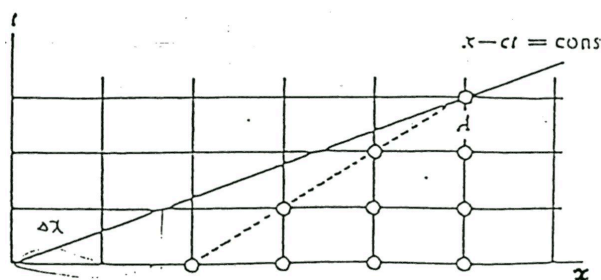


図 3: 特性曲線と依存領域の位置関係の例 (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

よって本来ならば、原点での  $u$  の値を計算することのみによって、A における  $u$  の値が決められなければならない。

ところが実際には、点 A の数値解は、スキーム (7) を見ると、白丸をつけた格子点を使って計算されている。つまり、この白丸をつけた領域が依存領域となる。原点は依存領域の外となっている。従って、点 A における数値解は、原点での値によっては決められない。よって、例えば、依存領域の初期値として適当な値をとれば、点 A での値は原点での値とは関係のない任意の値をとり得る。逆にいうと、誤差はいくらでも大きくなり得る。  $\Delta x$  と  $\Delta t$  との比率が等しいままなら、  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  としても状況はなんら改善されない。原点はやはり依存領域外にある。収束性はないままである。

収束するための必要十分条件は、数値解を求めようとしている点の特性曲線が、その点の依存領域内部にあることである。この場合は、

$$c\Delta t \leq \Delta x$$

である。これがスキーム (7) が収束するための必要条件である。<sup>1</sup>

<sup>1</sup>これは CFL condition と呼ばれる。

## 4 安定性の判定法

### 4.1 安定性 (stability)

差分間隔  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  が一定の時, ステップ数  $n$  が増加しても, 即ちどんなに時間がたっても, 数値解の絶対値が発散しないならば,

その数値解は安定である!

という. また, 任意の初期条件に対し, 安定な数値解を与える時,

そのスキームは安定である!

という.

安定性は, 実用上大切な概念である. 適合性がある, 高次の正確度があり, その上, 解が収束する差分スキームでも,  $n \rightarrow \infty$  にともなって, 真の解から速やかに発散するスキームだと計算不可能となってしまう.

数値解の安定性は, 厳密には関数解析の概念を用いて定義され, 解の有界性に依存する. 真の解が有界であると分かっている時には, 誤差  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$  の有界性を用いて安定性を定義出来る. すなわち,

真の解が有界とわかっていて, 差分間隔  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  一定の条件のもとで  $n$  を増加させた時, 誤差  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$  が有界ならば, その数値解は安定である.

しかし, 必ずしも真の解の有界性が分からないから一般には議論できない. 安定性を判定する方法はいろいろある. 例えば

- 直接法  
誤差, あるいは数値解が有界であることを直接証明する.
- エネルギー法  
数値解のノルムが有界であることを証明する.

- von Neumann 法 (フーリエ級数法)

解をフーリエ級数に分解し、一つ一つの成分の安定性を調べる。

などがある。これらを移流方程式とそのスキーム (7) に適用してみると、このスキームが安定であるための十分条件は

$$c\Delta t \leq \Delta x$$

であることがわかる。

## 4.2 補足

境界値問題を解くときには、境界において常に正しい答えが与えられているから、少々無茶をやっても大丈夫なことが多い。

しかし、初期値問題では、正しい答えは全く分からない。そこで、収束性や安定性が大事となってくる。収束性や安定性があるスキームを使えば、正しい答が得られると信じることにするからである。安定性がないと、解が発散してしまい、計算できなくなってしまう。そこで実際上は安定性が必須条件となる。

より正確な安定性、収束性の定義や、安定性の判定条件はたくさんある。これらのことや、安定性と収束性との関係については、Richtmyer and Morton(1967), Kreiss and Olinger(1973), Ames, W.F.(1969) といった本を参照すればよい<sup>2</sup>。

## 5 安定性の判定法

数値解の安定性を調べる方法はいろいろある。

- 直接法

誤差、あるいは数値解が有界であることを直接調べる。

<sup>2</sup>しかし、大気モデルに数値計算法を用いるためならば、ここに書かれている以上に安定性や収束性の概念を精密にする前にすることがある。すなわち、位相速度の誤差、非線形不安定性、時空間格子が数値解に及ぼす影響等を議論する方がより重要なのである。

- エネルギー法  
数値解のノルムが有界であるかどうかを調べる.
- von Neumann 法 (フーリエ級数法)  
解をフーリエ級数に分解し, 一つ一つの成分の安定性を調べる.

ここでは, 1次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u = u(x, t), \quad c = \text{正の定数} \quad (6)$$

を差分化した式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (7)$$

にこれらの方法を適用し, 数値解が安定であるための条件を求める.

## 5.1 直接法

誤差  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$  あるいは数値解  $u_j^n$  が有界であることを直接調べる方法を直接法という. この方法は簡明であるが, かなり限られた数のスキームに対してしか適用できない. ここでは, スキーム (7) から得られる数値解の有界性を示す.

スキーム (7) は

$$u_j^{n+1} = (1 - \mu)u_j^n + \mu u_{j-1}^n \quad (8)$$

と書ける. ただし,

$$\mu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

である。もし  $1 - \mu \geq 0$  ならば、 $c \geq 0$  に限っているので  $\mu \geq 0$  であるから、

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - \mu)|u_j^n| + \mu|u_{j-1}^n| \quad (9)$$

となる。これはたまたま適合性の必要条件でもある。

さて、左辺を考えると、ある  $n$  に注目して  $j$  をいろいろ変化させたときの  $|u_j^{n+1}|$  の最大値を  $\text{Max}_{(j)}|u_j^{n+1}|$  と書く。その最大値を与える  $j$  を  $l$  とすると

$$\text{Max}_{(j)}|u_j^{n+1}| = |u_l^{n+1}|$$

である。このときも式 (9) は成立するから、

$$\text{Max}_{(j)}|u_j^{n+1}| = |u_l^{n+1}| \leq (1 - \mu)|u_l^n| + \mu|u_{l-1}^n| \quad (10)$$

となる。これが任意の  $n$  に対して成立する。

一方、 $\text{Max}_{(j)}|u_j^n|$  は定義により

$$|u_l^n| \leq \text{Max}_{(j)}|u_j^n|, \quad |u_{l-1}^n| \leq \text{Max}_{(j)}|u_j^n|$$

である。よって

$$(1 - \mu)|u_l^n| + \mu|u_{l-1}^n| \leq \text{Max}_{(j)}|u_j^n| \quad (11)$$

が成り立つ。式 (10),(11) をあわせれば、結局、任意の  $n$  に対して

$$\text{Max}_{(j)}|u_j^{n+1}| \leq \text{Max}_{(j)}|u_j^n|$$

となる。これは数値解の有界性を示す。よって、

$$1 - \mu \geq 0$$

は、スキーム (8) の安定性の十分条件であることがわかる。

## 5.2 エネルギー法

ここでは、真の解が有界であることが分かっている時、 $u_j^n$  のノルム  $\|u^n\|$  もまた有界かどうかを調べる。もしノルムが有界なら、誤差  $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$  は有界であり、スキームは安定である。

特に、ノルムとして  $\|u^n\| = \sqrt{\sum_j (u_j^n)^2}$  をとると、 $\sum_j (u_j^n)^2$  の有界性を調べることに  
よってノルム  $\|u^n\|$  の有界性を示すことができる。このようにしてスキームの安定  
性を調べる方法をエネルギー法という。物理学では、 $u^2$  は多くの場合なんらかの  
形態のエネルギーに比例しているのだからこう呼ばれる。この方法は、大変広い適用範  
囲を持っており<sup>3</sup>、非線形方程式に対してすら適用できる。

これより先、

$$u_0 \equiv u_J$$

という周期的境界条件の下で考える。

式 (8) の両辺を 2 乗し、 $j$  について和をとれば

$$\sum_{j=0}^{J-1} (u_j^{n+1})^2 = \sum_{j=0}^{J-1} \left[ (1-\mu)^2 (u_j^n)^2 + 2\mu(1-\mu) u_j^n u_{j-1}^n + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 \right] \quad (12)$$

となる。周期的境界条件により、

$$\sum_{j=0}^{J-1} (u_{j-1}^n)^2 = \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2 \quad (13)$$

となる。さて、Schwartz の不等式

$$\sum_{j=0}^{J-1} a_j b_j \leq \sqrt{\sum_{j=0}^{J-1} a_j^2} \sqrt{\sum_{j=0}^{J-1} b_j^2}$$

と式 (13) から、

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} u_j^n u_{j-1}^n &\leq \sqrt{\sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2} \sqrt{\sum_{j=0}^{J-1} (u_{j-1}^n)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

である。式 (13) と (14) を使うと、もし  $1-\mu \geq 0$  ならば、式 (12) から

$$\sum_{j=0}^{J-1} (u_j^{n+1})^2 \leq \left[ (1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu) + \mu^2 \right] \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2$$

<sup>3</sup>あんまり正しくない。

すなわち

$$\sum_j (u_j^{n+1})^2 \leq \sum_j (u_j^n)^2$$

という不等式が得られることが分かる。よって、

$$1 - \mu \geq 0$$

は、周期的境界条件下では式 (8) の安定性の十分条件となることが証明された。

### 5.3 von Neumann 法

ここでは、von Neumann 法、別名フーリエ級数法について述べる。この方法は、スキームの安定性を調べるのにもっともよく使われる方法である。

それは、次のような手順で行われる。まず、解をフーリエ級数に分解する。そして 1 つ 1 つの成分の安定性を調べる。もしこれで適当な成分全てが安定ならば、スキームの安定性が示されたことになる。

通常 von Neumann 法は非線形方程式の安定性を調べることはできない。そこで、非線形方程式の安定性を調べる代わりに、その線形化した方程式の解析をする。

この方法を具体的に説明するにあたって、最初に元の移流方程式 (6) の解析解を調和解

$$u(x, t) = \text{Re} [U(t)e^{ikx}] \quad (15)$$

の形で求めておく。ここで、 $U(t)$  は波の強度、 $k$  は波数である。式 (15) を前の方程式に代入して、

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

を得る。このようにして、偏微分方程式を解く問題が常微分方程式を解くことに帰着したのである。この解は

$$U(t) = U(0)e^{-ikct}$$

ただし、 $U(0)$  は波の強度の初期値である。よって、求める解析解は

$$u(x, t) = \text{Re} [U(0)e^{ik(x-ct)}] \quad (16)$$

である。各々の波の要素は、このように、定速度  $c$  で強度を変化させずに  $x$  軸方向へと進んでいく。

さて、(6) の解析解が求まったので、次にこれに対応する有限差分方程式 (8) の解の振舞いを考える。(7) の差分形として

$$u_j^n = \text{Re} [U^{(n)} e^{ikj\Delta x}] \quad (17)$$

という形を考える。ただし、 $U^{(n)}$  は時間ステップ  $n$  における強度である。

これを (8) に代入すれば、

$$U^{(n+1)} = (1 - \mu)U^{(n)} + \mu U^{(n)} e^{-ik\Delta x} \quad (18)$$

となる。この方程式を使えば、 $n$  が増加する時  $U^{(n)}$  がどのようにふるまうか解析出来る。まず、増幅係数  $\lambda$  を

$$U^{(n+1)} \equiv \lambda U^{(n)} \quad (19)$$

と定義する。また

$$\lambda \equiv |\lambda| e^{i\theta} \quad (20)$$

とする。このとき、(19) と (20) から

$$U^{(n)} = |\lambda|^n U^{(0)} e^{in\theta} \quad (21)$$

となる。 $\theta$  は、1 タイムステップ毎の位相の変化を表す。(19) の絶対値をとると

$$|U^{(n+1)}| = |\lambda| |U^{(n)}|$$

となる。式 (17) の各々の調和解が安定であるためには、ある正数  $B$  が存在して、

$$|U^{(n)}| = |\lambda|^n |U^{(0)}| < B$$

であることが必要十分である。この条件式対数の対数をとると

$$n \ln |\lambda| < \ln(B/|U^{(0)}|) \equiv B'$$

となる。 $B'$  は新たな定数である。さらに  $n = \frac{t}{\Delta t}$  を使うと、安定であるための条件は

$$\ln |\lambda| < \frac{B'}{t} \Delta t \quad (22)$$

となる。

一方, 条件 (22) は,

$$\ln |\lambda| \leq O(\Delta t)$$

と書ける. ここで  $\delta$  を

$$|\lambda| \equiv 1 + \delta$$

と定義する. 安定性の条件を  $\ln(1 + \delta)$  のべき展開の形で書くと

$$\delta \leq O(\Delta t)$$

となる.  $|\lambda| = 1 + \delta$  を再び使うと

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t) \quad (23)$$

となる. これが von Neumann による安定性の必要条件である.

von Neumann の条件では, 解は, あまり速く成長しなければ, 指数的に成長することが許される. しかし, 例 (16) のように, 真の解が成長しないと分かっている時は, 式 (23) を十分条件

$$|\lambda| \leq 1 \quad (24)$$

で置き換えてしまう. この条件は, 元の安定性の条件と比べて, それほど緩いものではない. 例に戻ると, 式 (19) を式 (18) に代入すれば,

$$\lambda = 1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta x}$$

となる. これより,

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x) \quad (25)$$

が得られる. よって安定性の条件 (24) は

$$1 - \mu \geq 0$$

と求められた. これは, 直接法やエネルギー法の結果と同じものである.

一般に, 真の解では振幅は変わらない. 即ち  $|\lambda| = 1$  である. 数値解の  $|\lambda|$  の値により

$$\begin{array}{ll} \text{不安定} & |\lambda| > 1 \\ \text{中立} & |\lambda| = 1 \\ \text{減衰} & |\lambda| < 1 \end{array}$$

と分類できる. もちろん  $|\lambda|$  はできるだけ 1 に近い方が望ましい.

次に,  $\lambda$  の位相について考える.

$\lambda$  を, 実数部と虚数部とに分け,

$$\lambda \equiv \lambda_{re} + i\lambda_{im}$$

と書く. この時, 式 (20) より数値解の  $|\lambda|$  の位相は,

$$\theta = \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}$$

あるいは, 数値解の  $|\lambda|$  の位相と  $\omega\Delta t$  (ただし,  $\omega = ck$ ) との比をとると

$$\frac{\theta}{\omega\Delta t} = \frac{1}{\omega\Delta t} \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}$$

となる.  $\frac{\theta}{\omega\Delta t}$  の値によって

数値解の位相は調和解の位相より

$$\begin{array}{ll} \text{進む} & \frac{\theta}{\omega\Delta t} > 1 \\ \text{中立} & \frac{\theta}{\omega\Delta t} = 1 \\ \text{遅れる} & \frac{\theta}{\omega\Delta t} < 1 \end{array}$$

と分類できる. もちろん,  $\frac{\theta}{\omega\Delta t}$  もできるだけ 1 に近いことが望ましい. また, computational mode<sup>4</sup> の  $|\lambda|$  は, 出来るだけ小さいことが望ましい.

<sup>4</sup>computational mode とは, 物理的な解とは関係のない, スキームによって発生する, 数値計算特有のものである.

## 文献

- Ames, W. F., 1969: Numerical Methods for Partial Differential Equations. *London, Nelson.*, 291 pp.
- Charney, R. Fjørtoft and J. von Neumann, 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, **2**, 237-254.
- Courant, R., K. Friedrichs and H. Lewy, 1928: Uber die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Math. Annalen*, **100**, 32-74.
- Kreiss, H. and J. Olinger, 1973: Methods for the approximate solution of time dependent problems. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series*, No.10, 107pp.
- Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series*, No.17.
- Richardson, L. F., 1922: Weather Prediction by Numerical Process. *London, Cambridge University Press/reprinted: Dover, 1965/.*, 236pp.
- Richtmyer, R.D. and K. W. Morton, 1967: Difference Methods for Initial Value Problems. *New York, Interscience.*, 406pp.