

1 次元移流方程式

室井ちあし, 石渡正樹

1990/05/24

1 1 次元移流方程式の数値計算法

ここでは, 1 次元線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

を数値計算する際に生ずる問題点について述べる.

この方程式の解析解は

$$u = f(x - ct)$$

である. ただし, f は任意の関数であり, 初期条件によって決まる.

とりあげる問題は次のものである.

- 正確度
- 収束性と安定性
- CFL condition
- 数値分散 (computational dispersion または numerical dispersion)

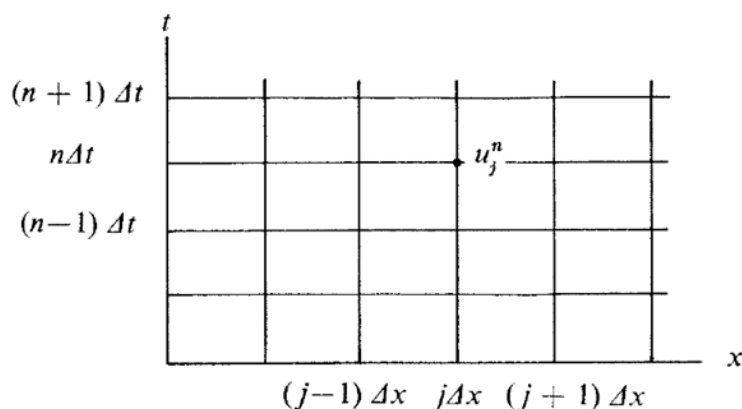


図 1: (1) 式の近似解を求めるための有限差分格子.

1.1 正確度

方程式 (1) の数値解を求めるため, $x - t$ 平面に, 図 1 の様に格子を設定する. 点 $(j\Delta x, n\Delta t)$ における u の値 u_j^n を求めることを考える.

例えば, 時間微分は前進差分, 空間微分は後退差分で置き換えれば,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

となる.

このスキームは適合性がある. すなわち, 差分間隔が 0 に近づく時, 元の微分方程式 (1) に近づく.

スキームの誤差は, 次のようにして定義される. 真の解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ を (2) に代入した時, 本来ならば右辺は 0 となるはずだが, 誤差のため 0 とはならない. これを ε と書き, 打ち切り誤差 (truncation error) という. すなわち,

$$\frac{u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) - u(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + c \frac{u(j\Delta x, n\Delta t) - u((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x} = \varepsilon \quad (3)$$

である.

打ち切り誤差を Taylor 展開すると, この場合

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^2 + \dots - c \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + \dots \right) \quad (4)$$

と書ける. 最低次の項は, Δx で1次, Δt で1次である. そこで

このスキームは Δx について1次, Δt について1次の正確度 (accuracy) を持つ!

という. これを

$$\varepsilon = O(\Delta x), \varepsilon = O(\Delta t)$$

または

$$\varepsilon = O(\Delta x, \Delta t)$$

と書く.

スキームによっては, Δx , Δt それぞれに対する正確度の次数が違うので, この2つをわけて考えることは有用である.

今度は, 時間差分は leapfrog, 空間差分は中心空間差分をすると

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (5)$$

となる.

このスキームにも適合性がある. すなわち, 差分間隔が0に近づく時, 元の微分方程式(1)に近づく.

打ち切り誤差を Taylor 展開すると,

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} (\Delta t)^2 + \dots + c \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + \dots \right) \quad (6)$$

となる. 最低次の項は, Δx で2次, Δt で2次である. 従って

このスキームは Δx について2次, Δt について2次の正確度 (accuracy) を持つ!

つまり,

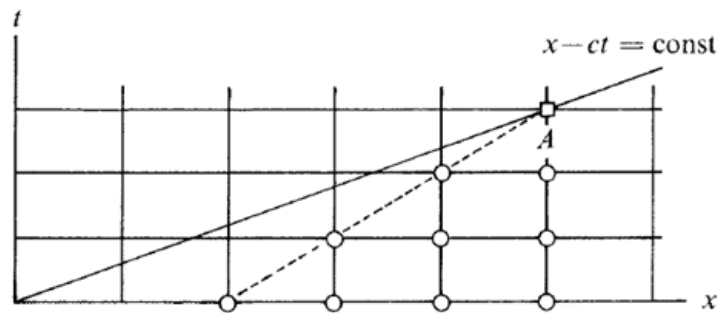


図 2: 特性曲線と依存領域の位置関係の例 (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

$$\varepsilon = O(\Delta x^2), \varepsilon = O(\Delta t^2)$$

または

$$\varepsilon = O(\Delta x^2, \Delta t^2)$$

ということになる.

このように, 同じ方程式でも, 適用するスキームによって正確度が違ってくる.

1.2 収束性と安定性

移流方程式 (1) について, 図 2 の点 A における数値解を求める場合を考える.

特性曲線 $x - ct = \text{const.}$ が, 斜めの実線で表わされている. 特性曲線上では, u の値は全て等しいから, 図における原点の u の値と, 点 A における u の値は等しい. よって本来ならば, 原点での u の値を計算することのみによって, A における u の値が決められなければならない.

ところが実際には, 点 A の数値解は, 例えばスキーム (2) を用いると, 白丸をつけた格子点を使って計算される. この白丸をつけた領域を, 依存領域 (domain of dependence) という. 原点は依存領域の外となっている. 従って, 点 A における数値解は, 原点での値によっては決められない. よって, 例えば, 依存領域の初期値として適当な値をとれば, 点 A での値は原点での値とは関係のない任意の値をとり得る. Δx と Δt との比率が等しいままなら, $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ としても状況はなんら改善されない. 原点はやはり依存領域外にあるので, 収束性はないことになる.

収束するための必要十分条件は、数値解を求めようとしている点の特性曲線が、その点の依存領域内部にあることである。今の場合

$$c\Delta t \leq \Delta x$$

である。これがスキーム (2) が収束するための必要条件である

つぎに、安定性について調べる。

真の解が有界とわかっていて、差分間隔 Δx , Δt 一定の条件のもとで n を増加させた時、誤差 $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界ならば、その数値解は安定である。

安定性を判定する方法はいろいろあるが、移流方程式 (1) とそのスキーム (2) に適用してみると、このスキームが安定であるための十分条件は

$$c\Delta t \leq \Delta x$$

であることがわかる。

1.3 CFL condition

一般に、スキームが安定であるための必要十分条件を

CFL condition (Courant-Friedrichs-Leny condion)

という。次のような形をしていることが多い。

$$c\Delta t \leq \Delta x$$

1.4 数値分散

位相速度と群速度の分散性

まず, 移流方程式 (1) の真の解の位相速度を求める.

移流方程式 (1) へ, 調和解

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[U(t)e^{ikx}]$$

を代入すれば

$$\frac{dU}{dt} + ikcU = 0$$

となる. よって真の解の位相速度は

$$c = \frac{\nu}{k} \quad (\nu \text{ は周波数})$$

で一定となり, 分散性はない.

次に, 数値解の位相速度を求める.

移流方程式 (1) を, 空間微分のみを差分で表すと

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (7)$$

となる. この方程式の誤差は空間差分のみによる. 上と同様に調和解

$$u_j(t) = \operatorname{Re}[U(t)e^{ikj\Delta x}]$$

を代入すれば,

$$\frac{dU}{dt} + ik \left(c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right) U = 0$$

となる. よって, 数値解の位相速度 c^* は

$$c^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \quad (8)$$

となり, これは k による. すなわち, 分散性がある.

このように, 真の解の位相速度には分散性がないのに, 差分をしたために数値解では分散性が生じてしまった. これを, 数値分散という.

(8) より

$$\frac{c^*}{c} = \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} < 1$$

である。よって、数値解の位相速度は、常に真の解の位相速度よりも遅い。また、波長が短くなると、 $k\Delta x$ は $0 < k\Delta x \leq \pi$ において単調に増加するから、波長が短いほど、真の位相速度より遅くなる。特に、波長が $2\Delta x$ の波は、 $k\Delta x = \pi$ であるから $c^* = 0$ 、すなわち定在波となる。¹

このため、様々な波長の波が重なって出来ている波は、計算して行くと崩れてくる。従って、様々な波長の波が重なって出来ているものの数値計算においては、数値分散は重大な問題である。

次に、群速度について考える。

真の解の群速度 c_g は

$$\tau_c = \frac{d(kc)}{dk} = c$$

である。一方、数値解の群速度は、(8) より

$$c_g^* = \frac{d(kc^*)}{dk} = c \cos k\Delta x$$

となる。よって、 $k\Delta x$ が増加すると、 c_g^* は単調に減少し、最短波長 $2\Delta x$ のときは、 $c_g^* = -c_g$ となる。

波長と位相速度、群速度の関係をまとめたのが図 3 である。群速度は、波長が $4\Delta x$ 未満の時は負となっている。

デルタ関数的擾乱

式 (7) の初期条件として、原点にデルタ関数的なもの

$$u_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{for } j = 0 \\ 0 & \text{for } j \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

を与えた場合の解の振る舞いを調べる。

まず、式 (7) の解析解を求める。無次元の時間 τ を、

$$\tau \equiv \frac{ct}{\Delta x}$$

と定義する。 t を τ で書き換えると、式 (7) は

$$2 \frac{d}{d\tau} u_j(\tau) = u_{j-1}(\tau) - u_{j+1}(\tau) \quad (10)$$

¹フーリエ級数に展開したとき、最も短い波長の波は、 $a \cos 2\pi + b \sin 2\pi$ と表されるが、実は $\sin 2\pi = 0$ であるから、これが定在波になるのは当然である。

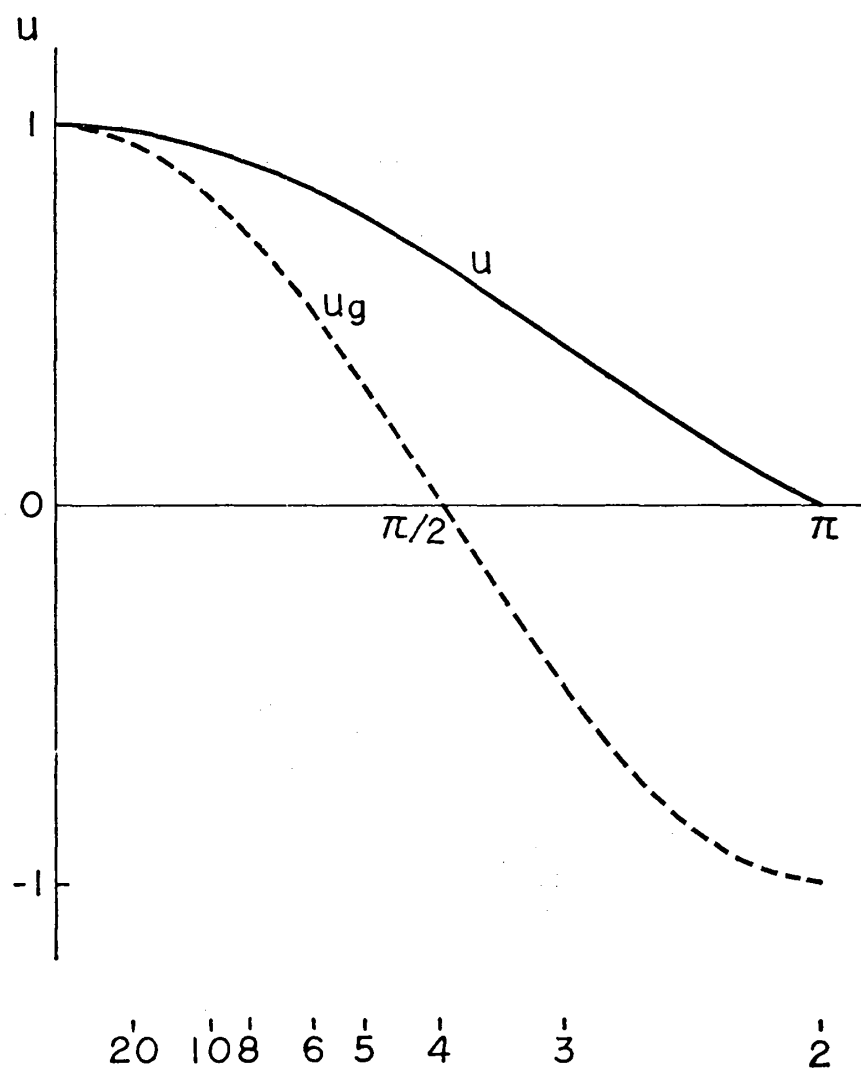


図 3: 移流方程式における位相速度 c と群速度 c_g , 及びその数値解の c^* と c_g^* (Matsuno, 1966c).

となる。これは、ベッセル関数の漸化式である。よって、ベッセル関数 $J_l(\tau)$ の任意の重ね合わせ

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p J_{j-p}(\tau) \quad (11)$$

は (10) を満たす。ただし、 a_p は任意の定数である。ここで、 $J_j(0) \neq 0$ であるのは $j = 0$ のときのみであることを考えれば、

$$u_j(0) = a_j$$

となる。 a_p は任意だから、(11) は任意の初期条件を満たす。よって、(11) は (7)、(10) の一般解である。

初期条件 (9) を与えると、解は

$$u_j(\tau) = J_j(\tau)$$

である。

これを $\tau = 0, 5, 10$ に対して書いてみたのが図 4 である。真の解ならば、点線のように、分散を起こさずに $j = \tau$ のみが $\neq 0$ となるが、数値解は空間微分を差分近似したことによって分散を起こし、 $j \neq \tau$ においても $\neq 0$ となっている。

デルタ関数をフーリエ変換すると、どの波数成分に対しても 1 となる。同様に、(9) を離散フーリエ変換すると、どの波数成分に対しても $\frac{2}{\pi} \Delta x$ となる。これを、white signal であるという。このため分散が起きて、図 4 のようになっている。

長い波長の位相速度は、真の解と比べても余り遅くはないから、主たる擾乱は $j = \tau$ から少しだけ遅れたところにある。短波長の波の群速度は負であるために、 $j < 0$ においても、 $u_j \neq 0$ となっている。すなわち、実際の波とは逆に進むという論外の波が出来てしまう。これを寄生波 (parasitic wave) という。

このように、この数値解はひどいものになってしまい、差分近似がこの様なデルタ関数的擾乱は苦手であることがわかる。

中心差分近似を時間微分に適用した、より一般的な解析解については、Egger(1971) 参照。

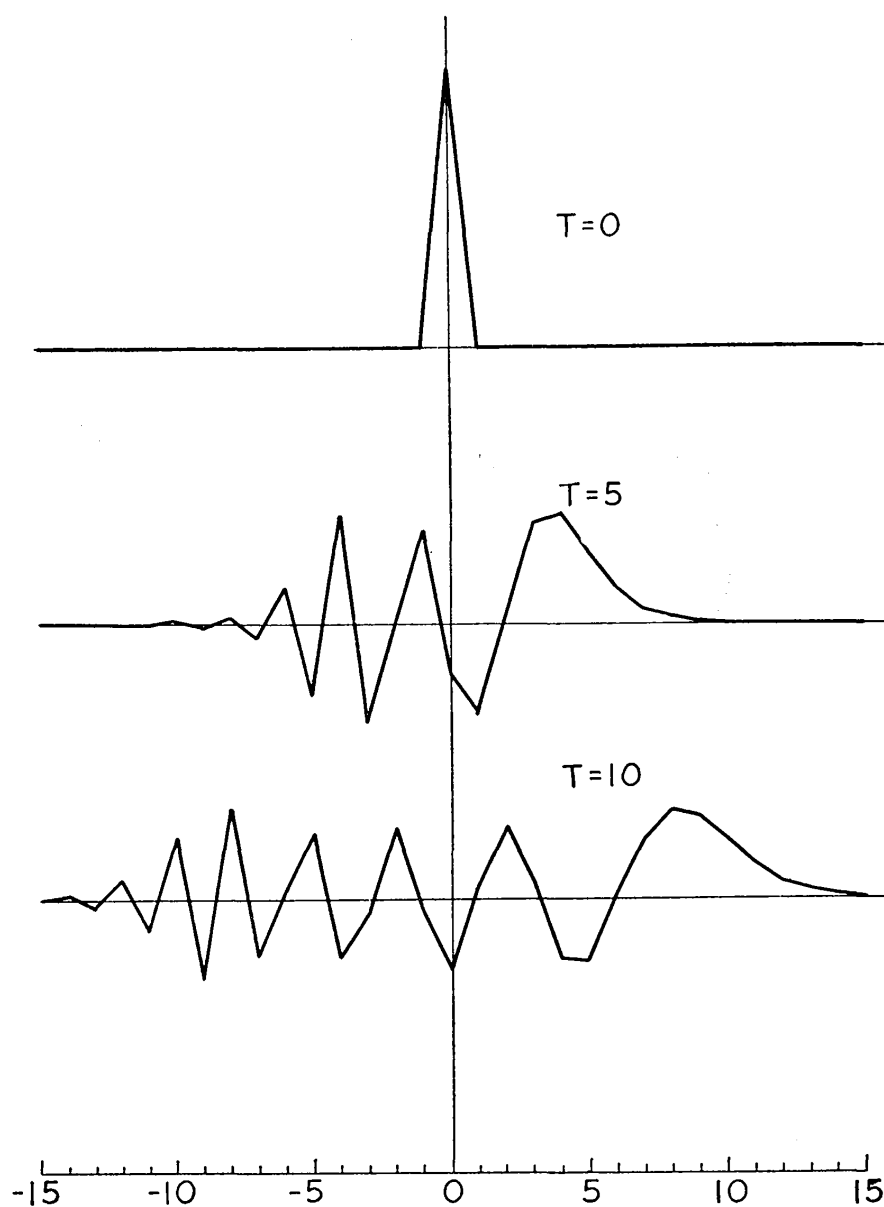


図 4: 初期条件 (9) に対する (7) の解析解. 各無次元時間 τ 毎に描く. 点線は真の解を表す (Matsuno, 1966c).

2 スキームのまとめ

ここでは移流方程式を解くために用いられるスキームについて空間差分の取り方と時間差分の取り方に注目してまとめる。

空間差分には中心差分及び上流差分・下流差分の3種類がある。それぞれのスキームに関する特徴をまとめると次のようになる。

- 上流差分¹

上流差分スキームにはデルタ関数的な擾乱を与えても寄生波が発生しないというメリットがある。また上流差分スキームには、その依存領域が特性曲線を含んでおり、しかも上流差分スキームに比べて余分な領域が狭いという特徴もある。

- 下流差分¹

下流差分スキームの依存領域は特性曲線を含んでいない。よって、依存領域に関しては下流差分は推奨できない。

- 中心差分²

上流差分スキームの依存領域は特性曲線を含んではいるが、不用な領域も含んでいる。

空間差分については、問題に応じて必要な正確度を持つ中心差分スキームや上流差分を用いればよい。

また、時間差分スキームについては常微分方程式を解く際に用いるスキームを使用することができて、次のような種類がある。³

- two level scheme

two level scheme には Euler scheme や backward scheme, Matsuno scheme, Heun scheme などの種類がある。two level scheme を用いる場合、その安定性については特に注意を払う必要がある。

¹数値計算ノート 上流差分スキーム 参照

²数値計算ノート 2 次の正確度を持つ空間中心差分スキーム, 4 次の正確度を持つ空間中心差分スキーム 参照

³数値計算ノート 常微分方程式を解く各種スキーム 参照

- three level scheme

three level scheme には leapfrog scheme や Adams-Bashforth scheme などの種類がある. three level scheme には最初のステップで使えないという欠点がある.

移流方程式を解くためには, 上で述べた空間差分スキームと時間差分スキームを適当に組み合わせて方程式を差分化すればよい.

3 上流差分スキーム

3.1 上流差分と下流差分

移流方程式の空間微分は, もちろん, 非中心差分で置き換えてもいい. 物理的に考えると, まず 1 点は求めたい点にとり, もう 1 点はその上流に取るのが自然である. そこで, 1 次元移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

は

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = 0, \quad \text{for } c > 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = 0, \quad \text{for } c < 0 \quad (13)$$

と近似できる. これもまた, 差分微分方程式である. ただし, (12) は後退差分, (13) は前進差分である. 2 つとも, 差分を上流に向けて計算している. そこで, この 2 つの差分は,

上流差分 (upstream differences)

と呼ばれる. 逆のものを

下流差分 (downstream differences)

という.

3.2 上流差分スキームの特徴

式 (24), (13) の時間微分を適合性のある方法で近似すれば, 移流方程式を解くスキームができる. できたスキームは空間に関して 1 次の accuracy しかもたないが, 物理的に波が進む方向にしか波が進まないで, デルタ関数的な擾乱を与えても寄生波が発生しないという利点がある.

例えば, 時間微分を前進差分で置き換えれば, $c > 0$ に対して,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (14)$$

というスキームができる. このスキームではどのような波が減衰するのか調べてみよう.

解の増幅係数 λ の式

$$|\lambda|^2 = 1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\Delta x)$$

を解析する. 具体的には, $k\Delta x$ の値を様々に固定しておいて, μ に対する $|\lambda|$ の変化を調べてみる. この目的のために, $|\lambda|^2$ 曲線を書いてみよう. 求め得る最も短い波長は $2\Delta x$ であり, よって, 波数 k の取り得る最大値は $\frac{\pi}{\Delta x}$ である. そこで $|\lambda|^2$ 曲線を最大値 $k = \frac{\pi}{\Delta x}$ (波長 $L = 2\Delta x$), その半分の $k = \frac{\pi}{2\Delta x}$ ($L = 4\Delta x$), $\frac{1}{4}$ の $k = \frac{\pi}{4\Delta x}$ ($L = 8\Delta x$) に対して描いてみたのが図 5 である.

この図によれば, 今回の場合 $|\lambda|^2$ 曲線は全て放物線で, $\mu = \frac{1}{2}$ で最小値をとる. また, 波長 L が増加する (k が 0 に近づく) と, 増幅係数は μ の全ての値に対して 1 に近づく.

安定領域内では, スキームは $\mu < 1$ なる全ての値に対して減衰している. 減衰は, 波長が短くなるにつれて増加する. 真の解ならば増幅係数 $\lambda = \text{const.} = 1$ だから, この減衰は, 有限差分による誤差を表わす. こうして, この誤差は波長が短くなるにつれて増加することが分かった. 求め得る最も短い波長, $L = 2\Delta x$ に対しては, Δt が非常に小さくない限り, 誤差は大変大きくなり得る. $\mu = \frac{1}{2}$ の時は, 1 ステップ時間を進めただけでこの波が完全に消えてしまう.

なぜ, このような誤差の波長依存性が現われるのだろうか. それは, 様々な波長の成分がどのようにして有限差分格子で表わされているかを考えればわかる. 求め得る最も短い波では, 有限差分格子が波と交わるのは, 1 波長につき 2 点しかない.

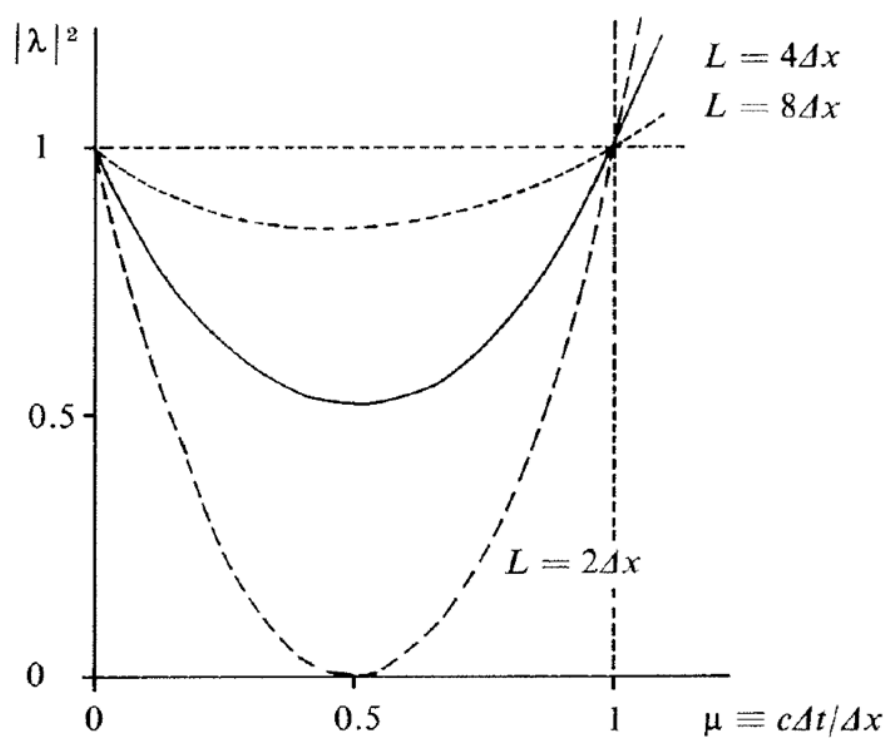


図 5: L の様々な値に対する $|\lambda|^2$ の曲線 (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

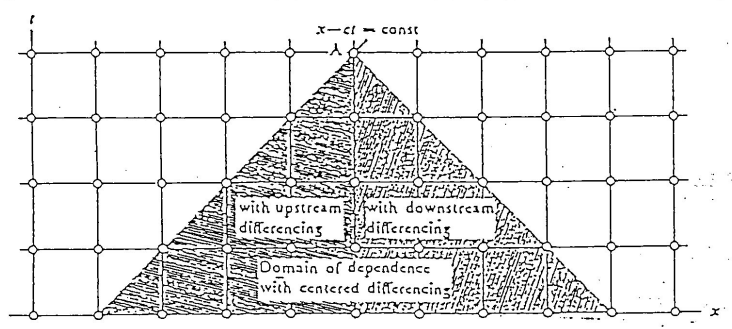


図 6: 格子点と各差分の依存領域.

従って、誤差も大きくなる。波長が長くなればなるほど、格子と波との交点の数は増加し、値が連続的に表わされているのに近くなる。そうなれば誤差は減少する。

この差分方程式の解析解については、Wurtele(1961) 参照。

上流差分の(少なくとも原理的には)利点を明らかにするため、依存領域を下流差分、中心差分と比較する。 $c > 0$ の場合を考える。

図 6 は、格子点と、そこを通る特性曲線を表したものである。

点 A における数値解を求めたいとする。図 6 において、上流差分と下流差分の依存領域は各々異なる斜線で陰をつけた領域であり、中心差分の依存領域はこの 2 つを合わせた領域である。本来、点 A における値は特性曲線 $x - ct = \text{const}$. 上での値のみによって決められるべきである。3つの差分の依存領域のうち、下流差分は特性曲線を含んでいないから論外、中心差分は不要な領域を含んでいる。従って、依存領域からみる限り、上流差分が最もよいことになる。

上流差分スキームは、次のようにしても得られる。移流方程式の特性曲線は分かっていることを利用する。時間 = 一定の直線上で、特性曲線をはさむ 2つの格子点の値を用いて、直線と特性曲線とが交わる点での値を内挿するのである²。直線で内挿すると、

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} (\Delta x - c\Delta t) = 0$$

が得られる。これは、スキーム (26) と等しい。一方、2次で内挿すれば、Lax-Wendroff scheme が得られる。

微分差分方程式 (24) の性質を解析するため、この解析解を考えることにする。無次

²依存領域に特性曲線が入っていないとまずいから、外挿してはいけない

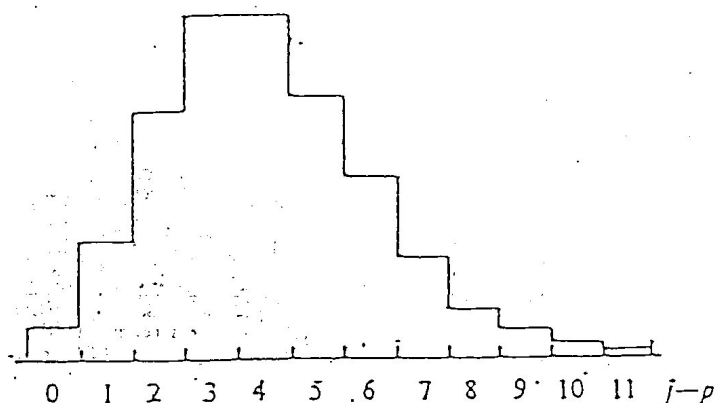


図 7: $\tau = 4$ の時の Poisson の周波数関数 (16) (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976)

元の時間 $\tau = \frac{ct}{\Delta x}$ を考える. このとき, 式 (24) は

$$\frac{d}{d\tau} u_j(\tau) + u_j(\tau) - u_{j-1}(\tau) = 0 \quad (15)$$

となる. Poisson の周波数関数

$$u_j(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!} & \text{for } j \geq p \\ 0 & \text{for } j < p \end{cases} \quad (16)$$

は (15) の解である.

この関数は,

$$\sum_{j=p}^{\infty} \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!} = 1 \quad (17)$$

という性質を持つ. $\tau = 4$ の時のグラフが, 図 7 である. $\tau = 0$ の時は, 高さ $\frac{1}{\Delta x}$ の長方形となる. すなわち, これは, 時刻 $\tau = 0$ において, デルタ関数的な擾乱を与えた事に相当する. これが, 時間と共にどの様に変化するかを追ってみる.

この平均値は

$$\sum_{j=p}^{\infty} (j-p) \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!} = \tau$$

であるから, この擾乱の平均値は, 実際の波と同じ速度で移動する. だが, 最大値は実際の波よりも遅れる. また, (17) より, 擾乱の量は常に 1 で変化しない. だが, 最大値は速やかに減少する.

Poisson の周波数関数の性質が分かったところで, 元の微分差分方程式の一般解を

求める. 2 節と同様, p は任意で, 方程式は線形だから, 解は

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^j a_p \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!}$$

と書ける. ただし, a_p は任意の定数である. $\tau = 0$ を代入すれば,

$$u_j(0) = a_j$$

となる. a_j は, 任意の初期条件を満たすように取れるから, これが一般解である.

全ての初期値は, デルタ関数 (この場合, もどき) の和で表せること, 1つ1つの解 (16) の振舞いを考えると, j における値 $u_j(\tau)$ は, その場所, 及びそれより上流の場所における初期値の影響の重ね合わせと解釈出来る.

例として

$$u_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{for } j = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{for } j \neq -1, 0, 1 \end{cases}$$

という初期値を与えたときの解析解, 数値解を図 8 に示す. $\tau = 5$ において, すでに減衰がかなり激しい. $\tau = 5$ というのは, 例えば波長を 300km, 速度を 15m/sec とすると, 約 1 日に相当する. よって, この減衰の影響は大きい. 従って, 上流差分を使えば万事めでたし, とは到底言えない.

4 2 次の正確度を持つ空間中心差分スキーム

空間差分に伴う様々な問題, 特に位相の誤差と計算上の発散・減衰という現象を避けるための 1 つの方法として, 近似の正確度を上げるという方法がある.

ここでは, 1 次元移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad c = \text{const.}, \quad u = u(x, t) \quad (18)$$

に, 2 次の正確度を持つスキームを適用したときの特性を調べる.

この空間微分を, 隣接する 2 つの格子点における値を使って有限差分商で近似すると, 時間微分は

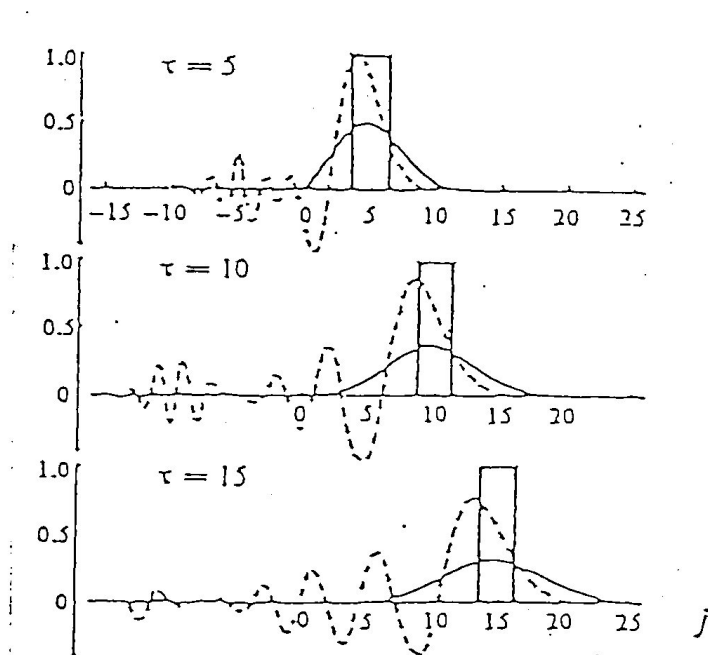


図 8: 厳密な移流方程式の解析解 (太い実線), 中心差分を用いた方程式の解析解 (点線), 上流差分を用いた方程式の解析解 (細い実線). 各無次元時間 τ 毎に描く (Wurtele, 1961).

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (19)$$

と表すことができる. ここで添字は, 時間差分の時と同じく領域の左端に原点を取り, $j = 0, 1, 2, \dots, J$ とする. ただし, J は格子点の数である.

取り上げるスキームは

- (19) の時間微分に leapfrog スキームを適用したもの
- (19) の時間微分に Matsuno スキーム, および一般の two level スキームを適用したもの
- (18) に, Lax-Wendroff スキームを適用したもの

である.

4.1 leapfrog スキーム

(19) の時間微分を計算するのに, leapfrog スキームを使えば,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (20)$$

となる.

このスキームの特性は, 振動方程式に対するスキームの特性から類推できる.

例として, (19) に

$$u_j = \text{Re}[U(t)e^{ikj\Delta x}] \quad (21)$$

という形の解を代入すると,

$$\frac{dU}{dt} = i \left(-\frac{c}{\Delta x} \sin k\Delta x \right) U \quad (22)$$

となる. これは, 振動方程式で

$$\omega \equiv -\frac{c}{\Delta x} \sin k\Delta x$$

とした場合に相当する.

(22) を適当なスキームを使って近似したものは, (19) に同じスキームを適用して, それから解 (21) を代入したものに等しい. 例えば, (22) の近似として leapfrog スキームを使えば

$$U^{(n+1)} = U^{(n-1)} + 2i \left(-c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right) U^{(n)}$$

となる. ここで,

$$p \equiv \omega\Delta t = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \quad (23)$$

と書けば

$$U^{(n+1)} = U^{(n-1)} + 2ipU^{(n)}$$

となる. これは, (19) に leapfrog スキームを適用して (20) となった式に (21) を代入したものと一致する. よって, (20) の特性は leapfrog スキームを振動方程式に適用した場合から類推できる.

上記の類推から, 安定であるための条件を求める. 安定であるためには $|p| \leq 1$ であることが必要かつ十分であるから, この場合では

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right| \leq 1$$

なければならない. これが任意の k に対して成立するから,

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$$

が, 安定であるための必要十分条件である. これを

CFL condition, または Courant-Friedrichs-Lewy condition

という. 最も不安定となりやすい波は $|p|$ が最大となる波長を与える波, すなわち $k\Delta x = \frac{\pi}{2}$ なる波である. これは, 波長が $4\Delta x$, 求めうる最短波長の波の 2 倍のものである.

振動方程式に対するスキームの特性との類推から, physical mode と computational mode の振舞いを考えると, 表 1. のようになる.

³ $\Delta t \rightarrow 0$ の時 $\theta \rightarrow p$, (23) より $\Delta x \rightarrow 0$ の時 $p \rightarrow -ck\Delta t$ となるため.

表 1: leapfrog スキームを適用したときの各 mode の振舞い

	physical mode	computational mode
増幅係数	λ_1 $U_1^{(n)} = \lambda_1^n U_1^{(0)}$	λ_2 $U_2^{(n)} = \lambda_2^n U_2^{(0)}$
安定な場合, $p \geq 0$ に対して	$\lambda_1 = e^{i\theta}$ 但し $\theta = \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)$	$\lambda_2 = e^{i(\pm\pi-\theta)} = -e^{-i\theta}$ 但し $\theta = \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right)$
(21) を用いた時の解	$u_j^n = \text{Re} \left[U_1^{(0)} e^{ik(j\Delta x + \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)} \right]$	$u_j^n = \text{Re} \left[(-1)^n U_2^{(0)} e^{ik(j\Delta x - \frac{\theta}{k\Delta t} n\Delta t)} \right]$ 時間 1 ステップ毎に符号が変わる
位相速度 その極限 ($\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$) ³	$c_1 = -\frac{\theta}{k\Delta t}$ $c_1 \rightarrow c$	$c_1 = \frac{\theta}{k\Delta t}$ $c_2 \rightarrow -c$

4.2 Matsuno スキーム, および一般の two level スキーム

(19) の時間微分項に対して Matsuno スキームを適用した場合を考える. Matsuno スキームでは, まず $u_j^{(n+1)*}$ を forward スキーム を使って

$$\frac{u_j^{(n+1)*} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

と定義し, 次に backward スキームを使って

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^{(n+1)*} - u_{j-1}^{(n+1)*}}{2\Delta x} \quad (24)$$

とする.(24) から $u^{(n+1)*}$ を消去すると,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + c^2 \Delta t \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2\Delta x)^2} \quad (25)$$

となる. 右辺第 2 項を除けば, これは forward スキームによって得られた有限差分方程式と一致する. Δt を固定して, $\Delta x \rightarrow 0$ とすれば, 右辺第 2 項は $c^2 \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ となる. この項は解 (特に, 波長が $4\Delta x$ 付近の波) を減衰させる働きがある. 減衰率は波長によって異なる. 波長 $\lambda = 4\Delta x$ の波が最も強く減衰し, 一方, 波長の一番短い波 ($\lambda = 2\Delta x$) に対する減衰率は 0 である. ⁴ 不安定を最も起こしやすいのは波

⁴解として $u_j^n = \text{Re}(U^{(n)} \exp ikj\Delta x)$ を右辺第 2 項に代入すると, この項は

長の一番短い波であるから、不安定を抑える、という観点からすると、Matsuno スキームを移流方程式に適用するのは不適當である。

次に、(19) を解く、時間に関して two level の一般のスキームに対してエネルギー法を適用し、その安定性を調べる。

(19) を解くスキームは、大抵のものが

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2}\mu(u_{j+1}^* - u_{j-1}^*) \quad (26)$$

という形で書ける。但し、

$$\mu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

とし、 u_j^* は $\{u_j^n\}$ を適当に線形結合したものとする。

例えば、反復しない two level スキームならば、 u_j^* は

$$u_j^* = \alpha u_j^n + \beta u_j^{n+1} \quad (27)$$

となり、反復する two level スキームならば、 u_j^* は

$$u_j^* = u_j^n - \frac{\beta}{2}\mu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

となり、Adams-Bashforth スキームならば、 u_j^* は

$$u_j^* = \frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1}$$

となる。

ここでは、反復しない two level スキームの安定性を、周期的境界条件 $u_0 = u_J$ の元で調べてみる。

(26) の両辺に u_j^* を乗じ、 j について和をとれば、

$$\sum_{j=0}^J u_j^* (u_j^{n+1} - u_j^n) = -\frac{1}{2}\mu \sum_{j=0}^J u_j^* (u_{j+1}^* - u_{j-1}^*)$$

となる。ここで、周期的境界条件により、右辺は 0 となるので、結局

$$\sum_{j=0}^J u_j^* (u_j^{n+1} - u_j^n) = 0$$

$c^2 U^{(n)} \Delta t \cos kj \Delta x \sin^2 k \Delta x / (\Delta x)^2$ となる。すなわちこの項は、 $k \Delta x = \pi/2$ ($\lambda = 4 \Delta x$) の時最大となり、 $k \Delta x = \pi$ ($\lambda = 2 \Delta x$) の時 0 となる。

となる。さて,

$$\sum_{j=0}^J \frac{1}{2} [(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2] = \sum_{j=0}^J \frac{1}{2} (u_j^{n+1} + u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^n)$$

であるが, ここへ (27) を代入し, $\beta = 1 - \alpha$ という関係によって β を消去すれば,

$$\sum_{j=0}^J \frac{1}{2} [(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2] = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2$$

となる。よって

$\alpha > \frac{1}{2}$: スキームは不安定. 全 “エネルギー” は時間と共に単調に増加.

$\alpha = \frac{1}{2}$: スキームは安定, かつ中立.

$\alpha < \frac{1}{2}$: スキームは安定, かつ減衰. 全 “エネルギー” は時間と共に単調に減少.

となる。

4.3 two-step Lax-Wendroff スキーム

Lax-Wendroff スキームでは時間微分と空間微分の両方を差分化する。

まず, $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ を

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} &= -c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \\ \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} &= -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \end{aligned}$$

として定義する。この $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ と $u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ を用いて

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

とする。 $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ を消去すれば, このスキームは

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (28)$$

と表される.

Lax-Wendroff スキーム は, 空間, 時間共に 2 次の正確度をもつ.

(28) は, 右辺第 2 項の添え字等を除けば Matsuno スキーム (25) と一致する. (28) の右辺第 2 項は, Δt を固定して $\Delta x \rightarrow 0$ とすると $(1/2)c^2 \Delta t (\partial^2 u / \partial x^2)$ となり, これもやはり式 (25) の場合と同じく, この項は解を減衰させる. ただし, 今度の場合は, 波長が $2\Delta x$ の場合が最も減衰が激しい. 数値計算の場合, 面倒なことはたいてい波長が $2\Delta x$ 付近の波で起きるため, これは多くの場合望ましい性質として受け入れられている. 波長が $2\Delta x$ 付近の波で起きるトラブルは, 多くの場合, エネルギー散逸スキームを用いれば解決する. これは, 波長 $2\Delta x$ 付近の波を選択的におとすスキームである.

Lax-Wendroff スキームの安定性を調べる.

$$u_j^n = \text{Re}[U^{(n)} e^{ikj\Delta x}]$$

を (28) に代入すれば

$$U^{(n+1)} = [1 + \mu^2(\cos k\Delta x - 1) - i\mu \sin k\Delta x] U^{(n)}$$

となる. よって, 増幅係数 λ は

$$\lambda = 1 + \mu^2(\cos k\Delta x - 1) - i\mu \sin k\Delta x$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} \cos k\Delta x - 1 &= -2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \\ \sin k\Delta x &= 2 \sin \frac{k\Delta x}{2} \cos \frac{k\Delta x}{2} \end{aligned}$$

であるから, 結局

$$|\lambda| = \left[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

が得られる. $4\mu^2 \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} \geq 0$ であるから, $|\lambda| \leq 1$ であるためには, $1 - \mu^2 \geq 0$ が必要十分である. よって,

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

これは CFL condition である.

波長別の λ の振舞いを解析する. 最短波長 $2\Delta x$ においては, $k\Delta x = \pi$ であるから,

$$|\lambda| = (1 - 4\mu^2 + 4\mu^4)^{\frac{1}{2}} = |1 - 2\mu^2|$$

である. その 2 倍の波長 $4\Delta x$ においては, $k\Delta x = \frac{\pi}{2}$ であるから,

$$|\lambda| = (1 - \mu^2 + \mu^4)^{\frac{1}{2}}$$

である. また

$$\frac{d|\lambda|}{d\mu} = -\frac{4\mu(1 - 2\mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}}{\left[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

である. これより, λ は任意の $k\Delta x$ に対して $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値

$$\left(1 - \sin^4 \frac{k\Delta x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

をとる. よって, $|\lambda|$ の最小値は, 波長が長くなるにつれ, 単調に増大する.

これを図に表したのが, 図 9 である. 波長が $2\Delta x$ に近づくにつれ, 急速に減衰量が増加していることが分かる.

このスキームの欠点は, 減衰が空間差分の格子間隔のみによらず, 時間間隔, 移流項の速度にもよるということである⁵.

長所としては, 2 次の正確度を持ち, explicit で, 適当な格子をとれば安定であり, two level スキームであるから computational mode は存在しないといった事が挙げられる. これだけの長所を備えたスキームは他にないので, 気象学ではかなり広く使われている. スキームによる減衰は, エネルギー散逸に比べて小さいときは問題ない. むしろ, 最短波長を落とせるので役に立つ. ただし, このどちらでも無いときは, 中立なスキームを使うべきである.

⁵安定性, 正確性を追求すると, 減衰量を最適にするように格子をとることが必ずしもできない

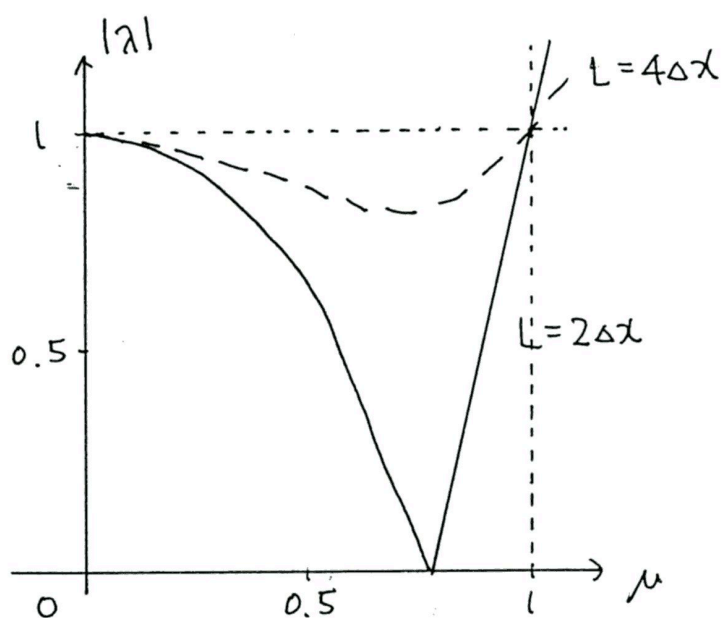


図 9: Lax-Wendroff スキームの $|\lambda|$ を, 波長 $2\Delta x$ 及び $4\Delta x$ に対して $\mu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ の関数として表したもの (F.Mesinger & A.Arakawa, 1976).

4.4 補足

スキームの選択においては、いい特徴を組み合わせればいいのであって、積分の途中でスキームを変えることもよく行われる。例えば National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colo. の大気モデルでは、減衰量を小さくし、かつ短波長を落とすため、100 回に 1 回の割合で Lax-Wendroff スキーム を使い、他は中立な leapfrog スキーム を使っている。

5 4 次の正確度を持つ空間中心差分スキーム

空間差分に伴う様々な問題、特に位相の誤差と計算上の発散・減衰という現象を避けるための 1 つの方法として、近似の正確度を上げるという方法がある。ここでは、4 次の正確度を持つスキームを取り上げる。

近似 u_j を Taylor 級数に展開し、有限差分商に代入すると、

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (29)$$

となる。同様に

$$\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \quad (30)$$

この 2 つの式から、 $(\Delta x)^2$ の項を消去すれば、

$$\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O[(\Delta x)^4] \quad (31)$$

となり、このスキームが、4 次の正確度を持つことがわかる。

近似 (31) は、中心からの距離 d が、 Δx よりも小さい点 (この場合、 $d = \frac{2\Delta x}{3}$) における近似を、(29)、(30) から外挿したものと解釈できる。もちろん、 d を小さくすれば近似の精度が常に上がるわけではない。

5.1 位相速度に対する効果

近似 (31) の, 移流方程式の位相速度に対する効果を見てみよう. (31) を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

に代入すれば

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \left(\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} \right) = 0$$

となる. ここへ, 調和解

$$u_j(t) = \text{Re}[U(t)e^{ikj\Delta x}]$$

を代入すると, 数値解の位相速度 c^{**} は

$$c^{**} = c \left(\frac{4}{3} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2k\Delta x}{2k\Delta x} \right)$$

となる. 2 次の空間微分の時,

$$c^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}$$

であった. それぞれを級数展開すると,

$$\begin{aligned} c^{**} &= c \left(1 - \frac{4}{5!}(k\Delta x)^4 + \dots \right) \\ c^* &= c \left(1 - \frac{1}{3!}(k\Delta x)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

となる. よって, 位相の遅れはやはり存在するが, 小さな k に対しては, 4 次の差分の遅れは 2 次のものに比べ, ずっと小さくなっている.

位相速度を全ての k に対して書いたのが図 10 である. これを見ると, 長い波長, 中間の波長の位相の遅れはずっと小さくなっている. しかし, 短い波長の波に対しては余り改善はされず, 最短波長 $2\Delta x$ の波は, 結局, これまた定在波となっている. しかも悪いことに, 短波長の所では, c^{**} の傾きは c^* の傾きよりも大きい. よって, 分散は激しくなる.

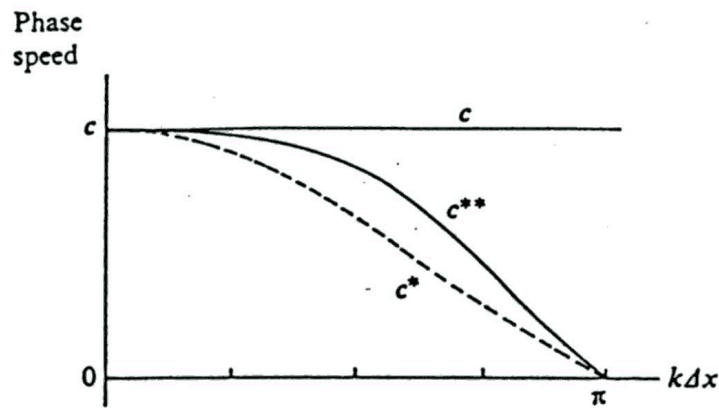


図 10: 線形移流方程式, そしてそれに 2 次及び 4 次の空間中心差分をあてはめた方程式に対する位相速度 c , c^* , c^{**} (F.Mesinger & A.Arakawa).

5.2 補足

正確度を上げるため, たくさんの格子点を使うと

- 境界条件の扱いがややこしくなるという問題
- computational mode の問題

が生じる. 前者の意見は特に数学屋に多い. 彼らは, 2 次のスキームを使っていれば, 得体の知れない境界条件を使わなくてすむ, と主張する. 実際, 下手に境界条件を設定すると, ろくな事が無い.⁶

移流方程式に対する 4 次のスキームは, 実際の予報に使うべきだと考える人々もいる. 中緯度の天気予報では, 高気圧, 低気圧 (すなわち, 波長の長い波) の位相の進行を正しく予報することが重要とされるからである. 一方, 大気大循環モデルに対しては, 余り効果が無いと考えられている. この場合, スキームの正確度を上げるよりは, 格子間隔を小さくすることに努力した方がいいとされる (Thompson, 1961, p.157).

格子間隔と同じスケールの現象を扱う, 本当に満足の行く有限差分法は, 結局の所存在しない. 格子間隔を小さくするのが確実な方法である. 図 1 を見れば, 格子間隔を半分にするれば, 最短波長では位相速度は 0 だったのが, 2 次のスキームの場合, 真の解のほぼ $\frac{2}{3}$ にまで回復することが分かる. 問題は, 計算時間が長くなるこ

⁶なんのこともよくわからないが....

とである。2次元問題では、計算量は空間について4倍、安定性を保つため、CFL condition より時間も2倍としなければならない。1970年代前半では、移流項に対する空間的な打ち切り誤差は、短期の天気予報に対する最大の誤差原因と見積られている。これについては、Anderson and Fattahi(1974) 参照。リファレンスもこれに豊富にある。

文献

- Anderson, D. and B. Fattahi, 1974: A comparison of numerical solutions of the advective equation. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1500–1506.
- Egger, J., 1971: Mindestgrösse von Gebirgen und Konvektionsgebieten, die in den Modellen der numerischen Vorhersage berücksichtigt werden können. *Beitr. Phys. Atmos.*, **44**, 245-271.
- Matsuno, 1966c: False reflection of waves at the boundary due to the use of finite differences. *J. Meteor. Soc. Japan, Ser. 2*, **44**, 145-157.
- Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods Used in Atmospheric Models. *WMO/ICSU Joint Organizing Committee, GARP Publications Series*, No.17.
- Thompson, P. D., 1961: Numerical Weather Analysis and Prediction. *New York, Macmillan.*, 170pp.
- Wurtele, M. G., 1961: On the problem of truncation error. *Tellus*, **13**, 379-391.