流体力学: 境界条件

林 祥介, 竹広 真一

2000 年 05 月 24 日

目 次

要旨

ここでは, 流体力学において通常よく用いられる境界条件の例を示す.

流体の運動を完全に記述をするためには, 質量保存則・運動量保存則・エネルギー保存則に加えて, 境界条件が必要である.

境界で与えるべき情報は, 質量フラックス, 運動量フラックス, エネルギーフラックスである. しかし普通, 境界条件としては, 境界におけるフラックスを直接与えるのではなく, 物理的意味付けのはっきりした変数, 例えば, 圧力, 速度の境界における値を与えることが多い. その場合, 与えられた条件が境界における各フラックスの値を決めているかどうかは, 問題に応じて考察, 確認しなければならない[1]

[1]実戦的には, 1 次の差分スキームをつくって検討するとよい.

1 固体境界

静止した固体表面において, 流体が満たすべき条件を挙げる.

質量保存則より, 固体表面を通しての質量流束は 0 であるから,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{at surface.} \tag{1}$$

$\boldsymbol{n}$ は固体表面の法線ベクトルである.

粘性流体の場合は, これだけでは条件が不足して解くことができないので, 境界条件を付け加える必要がある. 固体表面では流体は密着していると考えて（粘着条件）,

$$\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{at surface.} \tag{2}$$

一般に, 動いている物体の表面での条件を, 物体が静止している場合をもとに, 考える.

境界を通しての質量フラックスが 0 であるから, 境界面の法線方向の速度成分が一致する. すなわち,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}^{(s)} \cdot \boldsymbol{n} \qquad \text{at surface.} \tag{3}$$

ただし $\boldsymbol{v}^{(s)}$ は物体の表面速度である.

粘性流体の場合の対応する粘着条件は, 流体の速度と物体表面の速度が一致することである.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(s)} \qquad \text{at surface.} \tag{4}$$

さらにこの他に, 熱に関する境界条件が必要である. これは, 問題設定により異な

るので, ここでは述べない[2].

2 2種類の流体の境界面

2種類の流体の境界面を考える[2]. 境界面が静止している系で考えたとき境界面を通しての質量流束が同じでなければならない.

$$\rho^{(1)}\boldsymbol{v^{(1)}}\cdot\boldsymbol{n}=\rho^{(2)}\boldsymbol{v^{(2)}}\cdot\boldsymbol{n}\qquad \text{at surface.} \tag{5}$$

ただし, 添え字 $(1),(2)$ は, それぞれ, 流体 $(1),(2)$ の物理量であることを示す.

境界面が動いている系からだと

$$=\rho^{(1)}(\boldsymbol{v^{(1)}}-\boldsymbol{v^{(s)}})\cdot\boldsymbol{n}=\rho^{(2)}(\boldsymbol{v^{(2)}}-\boldsymbol{v^{(s)}})\cdot\boldsymbol{n}\qquad \text{at surface.} \tag{6}$$

となる.

特に混じりあわない流体の場合には, 面を通しての質量流束が0である. したがって境界面の速度を $\boldsymbol{v^{(s)}}$ とすると

$$\boldsymbol{v^{(s)}}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v^{(1)}}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v^{(2)}}\cdot\boldsymbol{n}\qquad \text{at surface.} \tag{7}$$

すなわち, 境界面の法線方向の速度が等しい.

粘性流体の場合には粘着条件がよく用いられる.

$$\boldsymbol{v^{(1)}}=\boldsymbol{v^{(2)}}\qquad \text{at surface.} \tag{8}$$

流体同士の境界面では, 境界面に垂直な方向の運動量流束が連続でなければならない. 境界面 df を通しての運動量流束は $\Pi_{ik}n_k df=(\rho v_i v_k-\sigma_{ik})n_k df$ である. 境界面が静止している系で考えると

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}_{ik}n_k df &= \Pi^{(2)}_{ik}n_k df,\\ (\rho^{(1)}v^{(1)}_i v^{(1)}_k-\sigma^{(1)}_{ik})n_k df &= (\rho^{(2)}v^{(2)}_i v^{(2)}_k-\sigma^{(2)}_{ik})n_k df,\end{aligned}$$

[2]例えばよく用いられるのは, 断熱条件 $q_k=0.$ at surface である. あるいは, Benard 問題のように, T を fix にすることである.

[2]この当たりの詳細な議論は「多成分多相系の流体力学」を参照すべし

である[1].

まず, 理想流体の場合には,

$$\begin{aligned}(\rho v_i^{(1)} v_k^{(1)} + p\delta_{ik}^{(1)}) n_k df &= (\rho v_i^{(2)} v_k^{(2)} + p\delta_{ik}^{(2)}) n_k df \\ (\rho^{(1)} v_i^{(1)} v_k^{(1)}) n_k + p^{(1)} n_i df &= (\rho^{(2)} v_i^{(2)} v_k^{(2)}) n_k + p^{(2)} n_i df.\end{aligned}$$

混じりあわない場合は (30) より, $v_k^{(1)} n_k^{(1)} = v_k^{(2)} n_k^{(2)} = 0$ だから, 境界条件は,

$$p^{(1)} = p^{(2)} \qquad \text{at surface.} \tag{9}$$

すなわち, 圧力が連続であることが境界条件となる.

粘性流体の場合には, 粘着条件より $\boldsymbol{v}^{(1)} = \boldsymbol{v}^{(2)} = 0$ だから,

$$\sigma_{ik}^{(1)} n_k = \sigma_{ik}^{(2)} n_k \qquad \text{at surface.} \tag{10}$$

が境界条件である.

[1] これが互いに相手の流体に働く力になる. この境界条件は, 相手の流体に働く力同士は, 大きさが等しく, 向きが反対になること—作用反作用の法則—と同値である.

3 参考文献

Batchelor,G.K., 橋本英典 他 訳 : 入門流体力学, 東京電機大学出版局, 614pp.

Landau,L.D., Lifshitz,E.M., 竹内 均 訳, 1970 : 流体力学 1, 東京図書, 280pp.

今井 功, 1973 : 流体力学 (前編), 裳華房, 428pp.

Glansdorff,P.,Prigogine,I., 松本 元 , 竹山 脇三 訳, 1977 : 構造・安定性・ゆらぎ. みすず書房, 297pp.

4 謝辞

本稿は 1989 年から 1993 年に東京大学地球惑星物理学科で行われていた, 流体理論セミナーでのセミナーノートがもとになっている. 原作版は竹広真一による「流体力学の基礎方程式」(1989-04-21) であり, 保坂征宏による改定 (1990-04-23) を経て, 林祥介/竹広真一によって「連続体力学: 基礎法則」として書き直された (1996-04-23). さらに竹広真一によって「流体力学: 境界条件」に分割・編集された (2000-05-24). 構成とデバッグに協力してくれたセミナー参加者のすべてに感謝するものである.