

ヘノン写像の解析

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
流体地球物理学教育研究分野 高砂 裕也

はじめに

- 流体现象は非線形過程である
- 非線形過程の一つの特性としてカオス(初期値鋭敏性, 非周期性)が知られている
- 本研究ではカオスに着目し, カオス力学系で有名なヘノン写像の理論・数値実験的研究を行った

本研究の内容

- Henon (1976) で行われたヘノン写像に関する数値計算の再現を行う
 - モデルの説明
 - 数値計算結果
- ヘノン写像の解析を行う
 - 線形安定性解析
 - 分岐の解析

ヘノン写像の説明

- ヘノン写像は3つの写像で構成される
 - モデルは折り畳みと引き延ばしの効果によりカオスを表現している

$$T_1: x_1 = x, y_1 = y + 1 - ax^2$$

$$T_2: x_2 = bx_1, y_2 = y_1$$

$$T_3: x_3 = y_2, y_3 = x_2$$

$$T = T_3 T_2 T_1$$

$$\begin{cases} x_3 = x_{i+1}, y_3 = y_{i+1} \\ x = x_i, y = y_i \end{cases}$$

$$x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2$$

$$y_{i+1} = bx_i$$

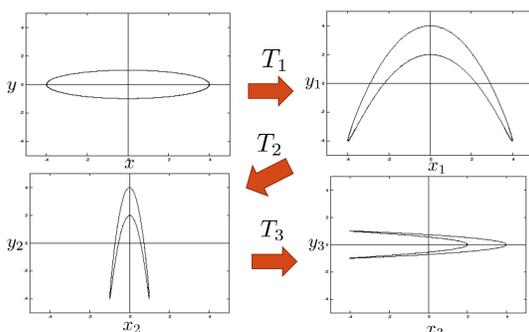


図1: 楕円にヘノン写像を構成する3つの写像をそれぞれ適用する。

数値計算結果

- 数値計算の条件
 - パラメタ: $a = 1.4, b = 0.3$
 - 初期値: $(x_0, y_0) = (0, 0)$
 - 写像を 10^6 回適用した
- ヘノン写像の適用によって得られた点列はストレンジアトラクタの構造を持つ(図2参照)
 - アトラクタ: ある力学系の解が $t \rightarrow \infty$ で属する集合
 - ストレンジアトラクタ: フラクタル構造を持つアトラクタ

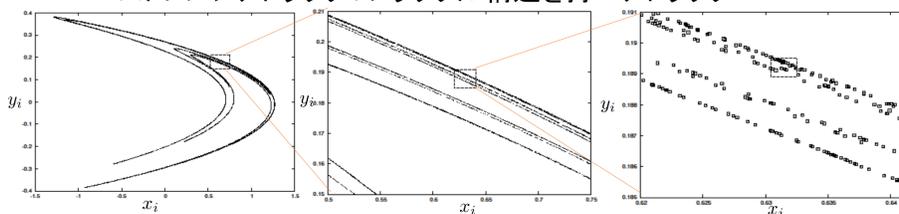


図2: ヘノン写像を初期値 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ から 10^6 回適用した連続点(左図)と, 左図の一部を拡大した図(中図, 右図)。

線形安定性解析

- 固定点近傍の安定性を解析する

固定点とは写像の適用により位置が変化しない点である。
この点では $x_i = x_{i+1}, y_i = y_{i+1}$ の条件を満たす。
固定点を (X_0^+, Y_0^+) とすると,
 $X_0^+ = (2a)^{-1}[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}]$
 $Y_0^+ = bX_0^+$
となる。固定点からの揺らぎ (x', y') を考えると, 固有値問題に帰着する。

$$\begin{pmatrix} x'_{i+1} \\ y'_{i+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \quad \lambda: \text{固有値}$$

各固定点 $(X_0^+, Y_0^+), (X_0^-, Y_0^-)$ に固有値が2つ現れる。表1の結果より, ヘノン写像の固定点でのアトラクタの接線方向である \vec{v}_2^+ , \vec{v}_1^+ 方向に不安定で, 法線方向である \vec{v}_1^+ , \vec{v}_2^+ 方向に安定であることが分かる。そのため法線方向には写像を繰り返しても交わることのない軌道がアトラクタ内に生じる。

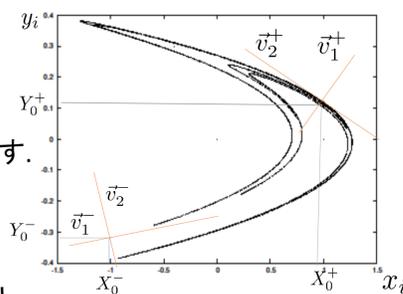


図3: ヘノン写像の固定点 (X_0^+, Y_0^+) での固有ベクトル。($a = 1.4, b = 0.3$)

表1: 固定点の座標, $(X_0^+, Y_0^+), (X_0^-, Y_0^-)$ での固有値と固有ベクトル。($a = 1.4, b = 0.3$)

固有値	固有ベクトル
$\lambda_1^+ = 0.15594632\dots$	\vec{v}_1^+
$\lambda_2^+ = -1.92373889\dots$	\vec{v}_2^+
$\lambda_1^- = -3.25982188\dots$	\vec{v}_1^-
$\lambda_2^- = -0.092029567\dots$	\vec{v}_2^-

分岐の解析

- ヘノン写像はパラメタ a を変化させると周期倍分岐(図4参照)が次々起こることによりカオスが生じる
 - 分岐図: 力学系のパラメタを変化させたときの解の振る舞いを示す図
- 分岐が起こる臨界点を調べる
 - 2周期が生じる臨界点は理論的に求め, 4周期以降の臨界点は数値計算により求める

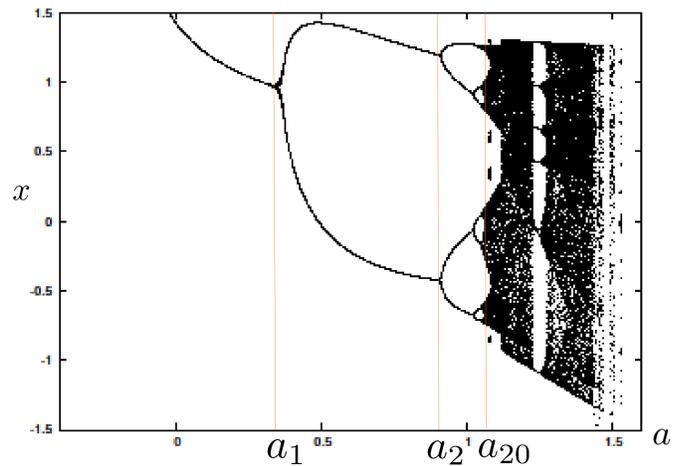


図4: ヘノン写像において, パラメタ b を $b = 0.3$ に固定し, a を変化させたときの x 座標の分岐図。

- 臨界点 a_1 : 2周期軌道が発生する臨界点

$$a_1 = \frac{3(1-b)^2}{4}$$

- 分岐図内にも自己相似性がある。相似比の極限はどのような写像でも等しくなることが知られている。これはファイゲンバウム定数と呼ばれ,

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i - a_{i-1}}{a_{i+1} - a_i} = 4.669201609\dots$$

の形で表される。

- 倍精度での 2^n 周期倍分岐の起こる臨界点 a_n を数値的に求め, 相似比を求めた結果が表2である。表2によると n が大きくなるにつれて相似比がファイゲンバウム数に揺らぎながら漸近することが確かめられた。

表2: $b = 0.3$ の場合の周期倍分岐が生じるパラメタ a の値を数値実験より求めた値

周期	パラメタ a の値	相似比
2^1	$a_1 = 0.3550\dots$	$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2} = 4.607$
2^2	$a_2 = 0.9016\dots$	$\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_3} = 4.300$
2^3	$a_3 = 1.01964\dots$	$\frac{a_4 - a_3}{a_5 - a_4} = 3.569$
2^4	$a_4 = 1.04723\dots$	$\frac{a_5 - a_4}{a_6 - a_5} = 3.031$
2^5	$a_5 = 1.05500\dots$	$\frac{a_6 - a_5}{a_7 - a_6} = 6.343$
2^6	$a_6 = 1.05755\dots$	\vdots
2^7	$a_7 = 1.0579\dots$	$\frac{a_{19} - a_{18}}{a_{20} - a_{19}} = 4.668$
\dots	\dots	\vdots
2^{20}	$a_{20} = 1.05997\dots$	$\frac{a_{20} - a_{19}}{a_{20} - a_{19}} = 4.668$

結論

- カオスを示すことが知られている散逸系のヘノン写像の解析を Henon (1976) に沿って行った。それによりアトラクタの接線方向に不安定で, 法線方向に安定であることと, 分岐が生じる臨界点, a_1, a_{20} を確認した。
- ヘノン写像において周期倍分岐が生じるパラメタの値が相似比 $\delta = 4.669201609\dots$ に揺らぎながら漸近することを確認した。

参考文献

- M. Henon, 1976: A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. Commun. math. Phys., 50, 69-77.
- P. Berge, Y. Pomeau, Ch. Vidal, 1992: カオスの中の秩序, 相澤洋二訳, 産業図書株式会社.
- S. H. Strogatz, 2015: 非線形ダイナミクスとカオス, 田中久陽・中尾裕也・千葉逸人訳, 丸善出版株式会社.