

ヘノン写像の解析

高砂 裕也

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
流体地球物理学教育研究分野

2018/02/13

要旨

Lorentz(1963) は熱対流の支配方程式を簡略化した 3 変数の 1 階連立常微分方程式系, いわゆるローレンツ方程式系, を調べ, その解は “ストレンジアトラクタ” の傾向を示した. Henon(1976) はローレンツ方程式の解と同様な性質を示す以下の 2 変数の写像を提案した:

$$x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad (1)$$

$$y_{i+1} = bx_i. \quad (2)$$

ここで, a, b はパラメタである. この写像は今ではヘノン写像と呼ばれている. 本論文では Henon(1976) の再現とヘノン写像の安定性解析を行ない, 散逸系における時間的なカオスに関して考察した.

目次

第1章 序論	3
第2章 カオス力学系/力学系の基本概念	4
2.1 力学系	4
2.2 カオスの定義	4
2.3 反復と軌道	5
2.4 ポアンカレ切断面, ポアンカレ写像	5
2.5 アトラクタ	5
2.6 ストレンジアトラクタ	6
2.7 保存系	6
2.7.1 相空間の体積の保存	7
2.7.2 時間変転に対する方程式の普遍性	8
2.8 散逸系	8
2.9 分岐	8
2.9.1 分岐図	8
2.10 フローケ理論	9

ヘノン写像の解析	2
第3章 ヘノン写像	10
3.1 モデル	10
3.2 媒介変数の選択	14
3.3 数値計算結果	15
3.4 ヘノン写像の特性	19
3.4.1 ヤコビアン(7)の導出	20
3.4.2 固定点(9)の導出	21
3.4.3 トラッピング領域	21
3.5 線形安定性解析	22
3.6 分岐条件	24
3.6.1 分岐図	25
第4章 結論	28
謝辞	29
付録A 力学系の研究小史	30
付録B 保存系の例：Henon(1969)	33
付録C ローレンツ方程式系	40

第1章 序論

自然界には予測不可能なふるまいを表すカオス現象^{*1}が多く存在している。地球流体物理学の分野ではレイリーベナール対流がその一例である。レイリーベナール対流のカオスを直接解析することは容易ではないため、解析するために簡単化されたモデルが提唱されている。それが Lorentz(1963) で提案され、研究された3元連立一階微分方程式のローレンツ方程式系である。この方程式の解は相空間内で以下のような性質を持つ。相空間内の流れの発散が負の一定値を持つため、相空間内の任意の体積は時間とともに指数関数的に収束する。さらに境界領域 \mathbf{R} が存在し、どの軌道も最終的に境界領域 \mathbf{R} の内部のある値にひきつけられ捕らえられる。したがって全ての軌道は3次元測度が0となり、アトラクタと呼ばれる。これはある場合ではアトラクタは単純に点(ここでは安定な平衡点)や閉曲線(リミットサイクルとして知られている)である。しかし別の場合では、アトラクタはより複雑な構造を持つ局所的に2次元の多様体とカントール集合の積のように見える構造を持つ。これはストレンジアトラクタとして知られている。ストレンジアトラクタ内では、軌道は不規則に動き回る。さらに軌道は初期値に非常に敏感である。

ローレンツ方程式系のポアンカレ写像と類似した特性を持つ二次元写像としてヘノン写像が提案された。このヘノン写像を研究したのが Henon(1976) である。本論文では Henon(1976) の再現とさらなる解析を試みた。

本論文の構成は以下の通りである。第2章ではカオス力学系における基本的な概念を解説する。第3章では Henon(1976) に従いながらヘノン写像の解説と解析を行う。第4章では結論を記述する。

^{*1} カオスの定義に関しては2.1節参照。

第2章 カオス力学系/力学系の基本概念

Strogatz(2015), Devarney(1997) に従って本論文で必要なカオス力学系の基本概念を解説する.

2.1 力学系

力学系とは時間とともに発展する系のことである. 微分方程式を代表とする連続時間力学系と, 差分方程式や写像などで表される離散時間力学系がある. それらがさらに多岐に亘り分類される. 本論文で扱うヘノン写像は文字通り写像であるので, 離散時間力学系に属する. 連続時間力学系と, 連続時間連続系とでは数値計算や解析の困難さが異なる. 力学系の研究の歴史については付録 A を参照せよ.

2.2 カオスの定義

カオス力学系の本質が何かについての専門家の統一見解がなく, 複数の定義が考えられる. カオスとは不規則で複雑なふるまいのことである. 不規則であるとは, 数列が x_1, x_2, \dots で与えられるとすると, いくら大きい N においても x_N, x_{N+1}, \dots が周期的に変化しないという性質をもつことである.

より一般的には, 初期値のわずかなずれが指数関数的に増大する性質 (初期値鋭敏性) を持ち, かつ不規則 (非線形性や非周期性を持つ) で有界であることを表す. ここで有界とは, ある数列 x_1, x_2, \dots が与えられたとき, 各要素の絶対値 $|x_1|, |x_2|, \dots$ がある整数 C 以下であることを言う. これは時間発展してもトラッピング領域と呼ばれる領域内に留まることを表す.

2.3 反復と軌道

反復とは, ある過程を何度も繰り返すことであり, 本論文で扱う離散力学系では写像を繰り返し適用することである. 写像 T に対し, $T^2(x) = T(T(x))$ は T の二回反復であると呼ぶ. 一般的に $T^n(x)$ を n 回反復と呼ぶ.

離散力学系で, ある初期値 $x_0 \in \mathbf{R}$ に対して, x_0 の T による反復によって得られる点列 $x_0, x_1 = T(x_0), \dots, x_n = T^n(x_0), \dots$ を軌道と定義する.

2.4 ポアンカレ切断面, ポアンカレ写像

軌道が n 個の一階連立常微分方程式で表される力学系を考える. 自由度 n は任意であってかまわないが, n 次元相空間を考える. このとき, \mathbf{R}^n の軌道を追いかける代わりに, 軌道がある \mathbf{R}^{n-1} 平面と交差する点の軌跡を追いかけることを考える方がより重要な知見を得られることがある. この平面のことをポアンカレ切断面と呼ぶ. ポアンカレ切断面は任意の面でもよく, 解析がやりやすいように取る. ポアンカレ断面上のある点からある点への変換 T はポアンカレ写像と言われる.

ポアンカレ写像を用いることは4つの研究上のメリットがある. 第一にポアンカレ断面上の写像にすることによって変数の数を一つ減らしていること. 第二に時間が離散化されたために微分方程式が差分方程式に書き換えられ, その結果得られる代数方程式はより扱いやすくなっていること. 第三に途中の軌道上の情報を捨て去るため, 扱う情報量が圧倒的に少なくて済むことである. 最後に数学的なモデル化が容易になることである.

本論文において, 3変数の常微分方程式であるローレンツ方程式系のポアンカレ断断面をモデル化したものであるヘノン写像を解析することは, これらのメリットを享受するためである.

2.5 アトラクタ

後述する散逸系では, 全ての軌道はアトラクタと呼ばれる一定の領域に吸引される.

アトラクタには4種類存在する。一つは一点からなる固定点である。これは時間的に変化しない、または写像の適用により変化しないものである。二つ目はリミットサイクルである。時間的な周期解が写像におけるリミットサイクルの一例である。ポアンカレ断面上では周期解として表される。3つ目はトーラス T^r ($r < 2$) である。これは r 個の基本振動数を持つ準周期的な運動である。 $r = 2$ の場合のトーラス (円環面) は二つの単位円周の直積集合であり、図形的なイメージはドーナツである。4つ目は次節で説明するストレンジアトラクタである。

2.6 ストレンジアトラクタ

ストレンジアトラクタは以下の性質を持つアトラクタである。次元 D はフラクタル次元であり、初期値鋭敏性を持つ。フラクタル次元とは、アフィン自己相似図形における非整数の次元を表す概念のことである。アフィン自己相似図形とは、集合 S が k 個の合同な部分に分割でき各々を M 倍すると S となる図形のことをいう。簡単な例として正方形を挙げる。正方形を元の $1/n$ の大きさに分けると元の大きさと同じにするには n^2 個の部分が必要である。この指数2がフラクタル次元である。一般的には、フラクタル次元 D は、

$$D = \frac{\log k}{\log M} \quad (1)$$

で示される。また、初期値鋭敏性を持つことから、ストレンジアトラクタを持つ系はカオス的な振る舞いをする。

2.7 保存系

力学系は様々な系に分かれる。その中の保存系について、散逸系との性質の違いを述べる。保存系とは保存量が存在する力学系のことを表す。3章で扱うヘノン写像は保存量の存在しない散逸系である。力学系の相空間の拡大率を表すヤコビアン値によって保存系に属するか散逸系に属するかが決まる。一般化座標を q 、正準共役な運動量を p 、時間を t 、とすると、エネルギー散逸のない系の挙動はハミルトニアン H により、

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (2)$$

の形に理論的に完全に記述することができる。最小作用の原理に基づいて得られる $2n$ 個の微分方程式,

$$\frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4)$$

によりその解が決定する。これはエネルギー保存則を表す。 H が t をあらわに含まない場合は,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0 \quad (5)$$

となり, $H(q, p) = E = \text{一定}$ である。ハミルトニアンが t を含まない系はすべて保存系である。Henon (1969) で提案された保存系の写像,

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha - (y - x^2) \sin \alpha, \\ y_1 &= x \sin \alpha + (y - x^2) \cos \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

の数値計算した図と解説を付録 B で行う。

2.7.1 相空間の体積の保存

相空間を保存することが、保存系の性質である。面積要素 $\delta p_i \delta q_i$ は、 H が t をあらわに含まないとき運動に沿って一定に保たれる^{*1}。 $\delta p_i \delta q_i$ の領域に含まれる初期点の集団は、その面積を一定にして時間発展する。その時互いの距離はほとんど一定の場合も、または縮む場合もある。にもかかわらず面積が保存され続けるのは次のような二つの方法がある。一つは軌道に沿って面積が大きな変形を受けずに移動する方法であり、もう一つはある方向の距離は時間とともに $e^{\lambda t}$ ($\lambda > 0$) で引き伸ばされる一方でそれと直交する別の方向の距離は $e^{-\lambda t}$ で縮むことにより面積を $e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = 1$ のように不変に保つ方法である。第一の場合は二つの隣接する軌道は互いに常に近傍にあり、第二の場合は互いに指数関数的に離散していくことになる。

^{*1} このことを証明する。

$$\delta p_i \delta \dot{q}_i + \delta \dot{p}_i \delta q_i = \delta p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \delta q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (7)$$

$$= dH(p_i, q_i) \quad (8)$$

$$= 0 \quad (9)$$

より相空間が保存される。

2.7.2 時間変転に対する方程式の普遍性

時間の向きを $+t$ から $-t$ に変えても方程式は不変である。保存系の持つこの性質を可逆性と呼ぶ。

2.8 散逸系

散逸系の特徴として相体積が保存せず縮小することが挙げられる。これが散逸系の本質的な点である。

ヘノン写像において、 $|b| < 1$ のとき、散逸系である。つまり拡大率を表すヤコビアン¹の絶対値が負であるとき写像により相体積が減少するため散逸系といえる。

2.9 分岐

パラメタがある臨界値を越えると解の様子が定性的に変化することを分岐²とい³い、その点を分岐点と呼ぶ。分岐点では二つ以上の解が同時に現れる。分岐が発生する条件により様々な種類がある。

ヘノン写像では周期倍分岐⁴が起こる。この分岐はパラメタを徐々に変化させたとき、ある値になると安定な固定点が不安定化し、安定な2周期点が発生することである。周期倍分岐が連続して起こることでカオスへと至る。

2.9.1 分岐図

分岐図とは分岐を図に示したものである。横軸にパラメタ、縦軸に十分に時間発展させた後の微分方程式や写像の解を変化させて関数として表したものを分岐図と呼ぶ。ヘノン写像の分岐図を3.6.1節に掲載する。

2.10 フローケ理論

フローケ理論とは周期 T の周期解 $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)$ の線形安定性を調べる理論である。

$\delta\mathbf{X}$ を微小量とすると, 初期値 $\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}$ は1周期後に $\mathbf{X}_0 + M\delta\mathbf{X}$ に移る. ここで M はフローケ行列と呼ばれる. 線形安定性は M の固有値の性質から決まる. 行列 M は常に固有値1を持つことに注意せよ. これは $\delta\mathbf{X}$ をリミットサイクル上に置いたときその変位は1周期後でも同じ値となることからわかる. 従ってこの固有値は線形安定性とは関係はない. 軌道に垂直な方向の微小変位 $\delta\mathbf{X}$ が1周期後に増加するか減少するかが線形安定性に関係する. 一般に複素数の固有値が全て複素平面内の単位円の内側にあれば, 軌道に垂直な方向にも $\delta\mathbf{X}$ は1周期後に減少するため安定である. 一方, 固有値が一つでも単位円の外側にあれば, $\delta\mathbf{X}$ は次第に増加するので不安定である.

パラメタを変えると, それに応じて行列 M も変化する. 行列 M の変化に伴い固有値が複素面上に軌道を描き, その軌跡が単位円と交差するとき周期解が安定性を失う. 固有値の軌道が複素平面上の単位円と交差する条件として3通り考えられる. $+1, -1, (\alpha \pm \beta)$ の3通りである. 平面の写像を考えるときは $+1$ の場合しか起こらない. このときサドルノード分岐が起こる

第3章 ヘノン写像

この章では, Henon(1976) の解説とさらなる解析を行う.

ヘノン写像 T は

$$T : x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i \quad (1)$$

で表現される. この写像はローレンツ方程式系と同様の性質を持つように作られた, ローレンツ方程式系の一般的なポアンカレ断面を生成する写像 (ポアンカレ写像) である. すなわち散逸系であり, 且つ境界領域 \mathbf{R} を持つため, 写像の反復により緻密な構造が現れ, ストレンジアトラクタの性質を持つ.

3.1 モデル

ローレンツ方程式系のポアンカレ断面と同様の性質を持つ写像の導出過程を述べる. 第1ステップは古典的な手法であり, 3次元空間内に切断面 S を考える. 切断面 S は2次元平面との連続した交点だけで構成されている. S のそれ自身への写像 T を以下のように定義する: S 上に点 A を与え, A を始点として再び S を横切るまで軌道を追跡し, この新しい点を $T(A)$ とする. この写像はポアンカレ写像と呼ばれる. したがって軌道は繰り返される写像 T の適用により, S 上の無数の点列に置き換えられる. 軌道に本質的な特性は対応する点列に反映される. したがって, 問題を形式的に2次元写像の問題を研究することに帰着する. しかし, ここから得られる唯一の利点は結果の表現の明確さである. 実際の写像の計算には, 微分を含むローレンツ方程式系を解かなければならないためまだ微分方程式の数値積分が必要である. ここで第2のステップに移る: 微分方程式の系については忘れ, 写像 T を明確な方程式により定義する. つまり A が知られているとき $T(A)$ を直接与える. 当然これにより計算は劇的に単純化される. 新しい写像 T はもはやローレンツシステムとは対応しないが, 慎重に写像を選択すると本質的な特性を維持できると期待できる. 第3ステップは T を指定することから構成される. ここでローレンツ方程式系における体積が回転運動中に1方向に引き伸ばされ同時に折り畳

まれることを写像で表現することを試みる. この引き伸ばしはストレンジアトラクタを表現するために行われる. 初期値のずれが引き伸ばされることにより初期値依存性を作り出すのである. また, 折り畳みにより境界領域を作り出し. 点列が無限大へ発散しないようにしている. (x, y) 平面から同じ平面への3つの写像によって折りたたみや引き伸ばしの模倣を行う. x 軸に沿って引き延ばされた領域を考える (図1). 折りたたみを

$$T' : x' = x, \quad y' = y + 1 - ax^2 \quad (2)$$

によって始める. その結果が図2である. a はパラメタである. x 軸に沿った収縮を行い,

$$T'' : x'' = bx', \quad y'' = y', \quad (3)$$

折り畳みを完了する. その結果が図3である. b はもう一つのパラメタであり, 絶対値が1より小さい値とする. 最後に x 軸に沿って方向づけを行う.

$$T''' : x''' = y'', \quad y''' = x'' \quad (4)$$

結果が図4である. 図1から図4は例として楕円 $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ へ (2) から (4) の写像を適用した場合を表している. 幾何学的な解釈は, T' は領域を保存し, T''' も領域を保存するが, 図形を裏返し, T'' は一定値 b を乗することにより領域を収縮するというものである. (3) の特性はローレンツ方程式系における一定の負の発散に対応する.

この写像は $T = T'''T''T'$ で定義される. ここで (x, y) を (x_i, y_i) , (x''', y''') を (x_{i+1}, y_{i+1}) と書くと,

$$T : x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i \quad (5)$$

を得る.

T の選び方はもっとも簡単で非自明な写像を見ることによって異なった方法で決められる. 次数が次第に増加する多項式の写像を考える. 線形写像は自明なので多項式の写像は少なくとも2次でなければならない. 最も一般的な2次の写像は,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f + ax_i + by_i + cx_i^2 + dx_iy_i + ey_i^2 \\ y_{i+1} &= f' + a'x_i + b'y_i + c'x_i^2 + d'x_iy_i + e'y_i^2 \end{aligned} \quad (6)$$

であり, 12個の媒介変数に依存する. もしヤコビアンが定数であるという条件を課すならば, これらの媒介変数のうちのいくつかに関係式が満たされなければならない. 座標平面の適切な線形変換によってさらに媒介変数の数を減らすことができる. (6) 式による一般形は2つの媒介変数のみに依存する正準形にまとめることが

できる. この手法は2次の保存系の写像は1つの媒介変数だけに依存する形式をもたらすという結果を示す Henon(1969) の一般化である. この正準形式は異なる方法で書くことができ, そのうちの1つは全く異なるやり方で導かれた (5) と等価である. 最初は経験的手法で構築されたヘノン写像も一定のヤコビアンを持つ最も一般的な2次の写像であった.

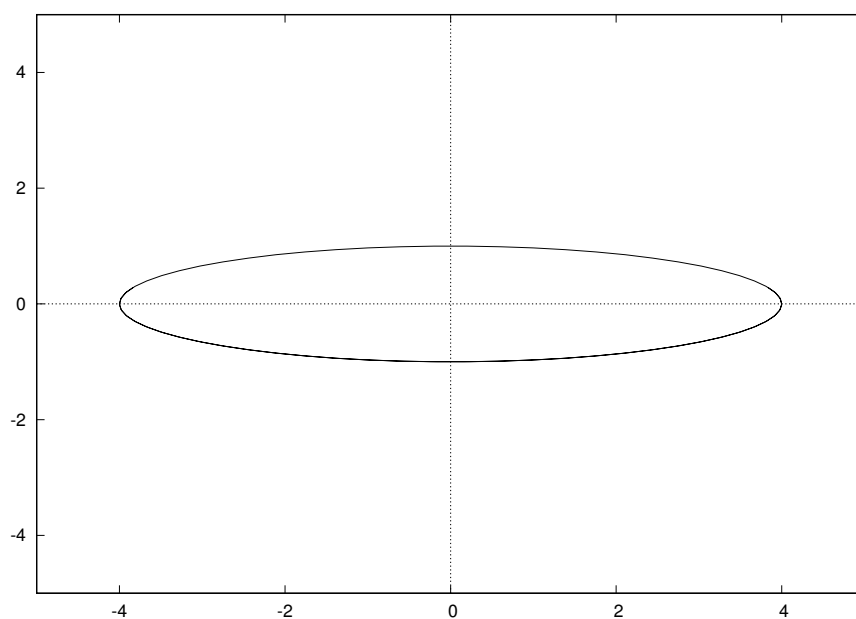
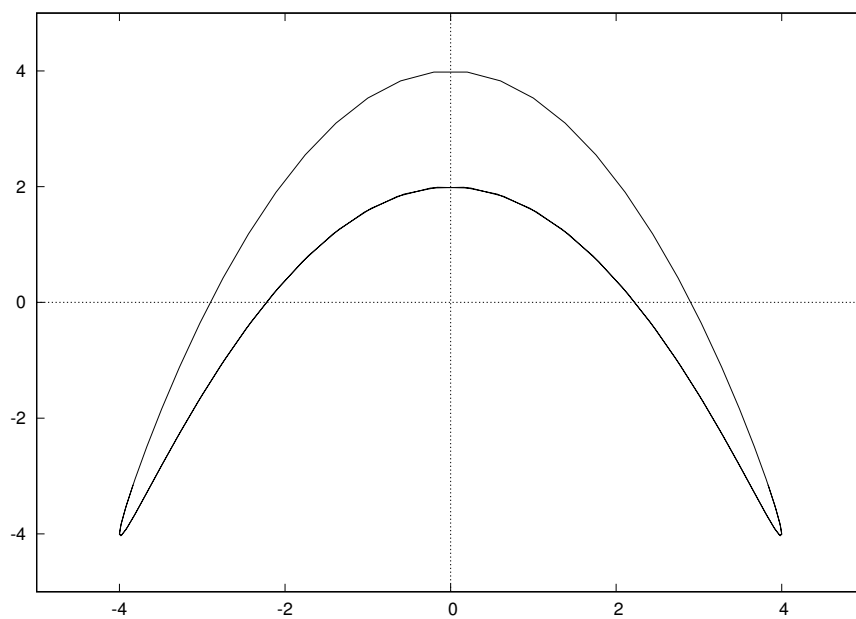
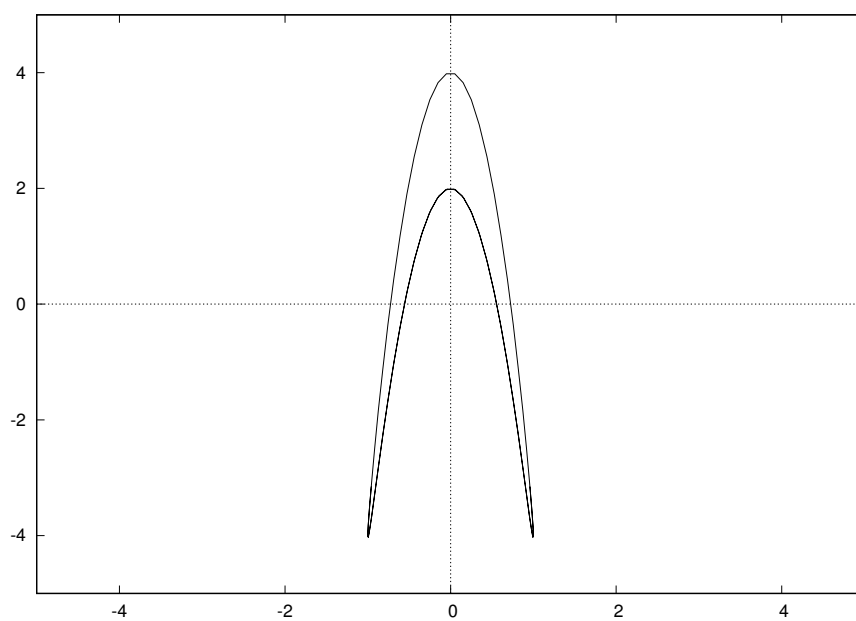


図 1: 写像を行う初期領域 $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$.

図 2: 図 1 に写像 T' を適用.図 3: 図 2 に写像 T'' を適用.

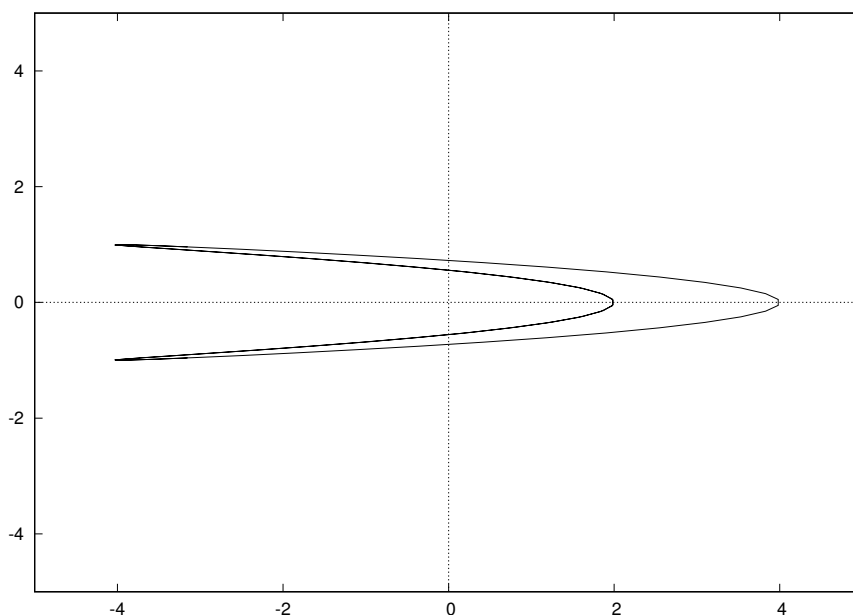


図 4: 図 3 に写像 T''' を適用.

3.2 媒介変数の選択

数値計算と解析を行うためにパラメタ a と b の特定の値を選択する. b は図 1 によって表現される折りたたみが実際に起こるために十分小さくしなければならない. しかしアトラクタの微細構造を目視するためには小さすぎてはいけない. よって b は,

$$b = 0.3$$

で数値計算を行う. a の適切な値は分岐条件を考慮する必要がある. $a < a_0$, または $a > a_3$ では, 点列は常に無限大へ逃げ, この場合アトラクタは存在しない. ここで a_0 は $a_0 = -(1-b)^2/4$ で与えられ, a_3 は $b = 0.3$ に対して値が 1.55 の程度である. $a_0 < a < a_3$ では, 初期値 (x_0, y_0) に依存して, 点列は無限大に逃げるか, 与えられた a の値に対して現れるアトラクタに収束するか的一方となる. ここではアトラクタに着目する. $a_0 < a < a_1$ では a_1 は (11) : $a_1 = 3(1-b)^2/4$ で与えられ, アトラクタは安定した不変点である. a が a_1 を上回ったとき, 初めはアトラクタはまだ単純で, 周期的な p 点群からなる (ローレンツ問題における同等のアトラクタはポアンカレ断面を p 回横切るリミットサイクルである). a が増大するにつれて, p の値は連続的な周期倍分岐を通じて p の値は増大し, さらに a がある臨界値 a_2 に近づくと, p の値は無限大になる傾向がある. この a_2 は $b = 0.3$ のとき 1.06 程度であ

る. $a_2 < a < a_3$ ではストレンジアトラクタの傾向を示す. ストレンジアトラクタの性質を示すように a の値を決める.

$$a = 1.4$$

3.3 数値計算結果

図2は, 任意に選んだ初期値 $x_0 = 0, y_0 = 0$ からの T の 10000 回反復により得られた連続点を描画した結果である. 縦軸は拡大されている. 図3は異なる初期値 $x_0 = 0.63135448, y_0 = 0.18940634$ から始めた T の写像の反復により得られた 10000 の連続点である (この初期値の選択の理由は後述する). 2つの図はほとんど一致して見える. このことから2つの図の中で見えているものは基本的にアトラクタそのものであることが分かる. 2つの図において連続点はすぐにアトラクタに近づき, 図のスケールでは区別できなくなる. このことは図2の初めの数点を見ることによって確かめられる. 初期値 $x_0 = 0, y_0 = 0$ と1回 T を反復した点 $x_1 = 1, y_1 = 0$ は明らかに目視できる. 2回反復した点 $x_2 = -0.4, y_2 = 0.3$ はまだ目視できる. 3回反復した点 $x_3 = 1.076, y_3 = -0.12$ はかろうじて区別できる. 4回繰り返した点 $x_4 = -0.7408864, y_4 = 0.3228$ は既に図4の解像度のアトラクタの中に埋もれて失われてしまった. 引き続く点は明らかにアトラクタ内を不規則な挙動で動き回る.

さらに図4から図6は階層的な列の存在を示しており, どの段階でも倍率を調整することで全く同じ構造が見える. これはカントール集合の構造である.

図4から図6の枠は固定点 (12) を含むように選ばれている. この点はアトラクタの境界の上部にあるように思われる. この点の存在は図では全く見えない. このことは安定と不安定な固定点が非常に目立った役割をしている領域を保存する場合と対照的である (第1章の Henon(1969) の図1から図12を見よ). しかし少なくとも局所的には固定点の存在は似たような階層的な構造を説明する. 各写像の適用時に横断方向の構造のスケールには後述する安定性解析において導出するフロケ行列の固有値 λ_1 が掛けられている. 同時に点群は λ_2 の値で規定されたように曲線に沿って広がる.

この特性により, 点列がアトラクタに近づく“過渡的な状態”を取り除くことが許される. この状態は興味のないものである. よって図6から図9の初期値は図2の初期値 $x_0 = 0, y_0 = 0$ とは異なり. $x_0 = 0, y_0 = 0$ から4回写像した点 (x_4, y_4) において, 初めの8桁で切り捨てることによって生成された値を再び写像の初期値とするものである. このことにより写像を不安定な点に非常に近いところから始め

ることにできる. この点群は $|\lambda_2|$ が明らかに 1 より大きいので勾配 p_2 の線に沿ってすぐに遠ざかる.

このアトラクタは多かれ少なかれ平行な曲線群から構成されることがわかる. つまり点群はそれらの曲線を濃くするように分布する傾向がある. 図2と図3にまだみられるわずかな違いはおそらく特定の重要性を持たない. 2つの図で点の位置は同じではない. これは単に疑似ランダムな点群の分布の統計的な揺らぎのせいであり, もしさらに多くの点をプロットすると消える. 従って, それぞれの曲線は本質的には1次元多様体なので曲線に沿ったアトラクタの縦断方向の構造は単純なように思われる.

曲線を横切る横断方向の構造は全く異なっており, 非常に複雑である. 既に図5, 図6での多くの曲線で見られ, 目に見えてそれらのいくつかが太いことから潜在的な構造が実際にあることが示される. 図7は図6の小さい四角の部分を拡大している. いくつかの以前の“曲線”は実際に二つ以上の部分に解像されている. 小さい範囲を調べるのに十分な数の点を得るため, 反復回数 n を 10^5 に増やしている. 図6の小さな四角の部分は再び n を 10^6 に増加させて拡大し図8を描画した. この結果, 再び目に見える“曲線”は増加した. $n = 5 \times 10^6$ でより拡大した結果が図9である. 点群はまばらになったが新しい曲線をまだ容易に追うことができる.

これらの図は“曲線”の多重過程が無限に続くことを強く示しており, それぞれの“曲線”の部分は実際無限の準平行な曲線から構成される.

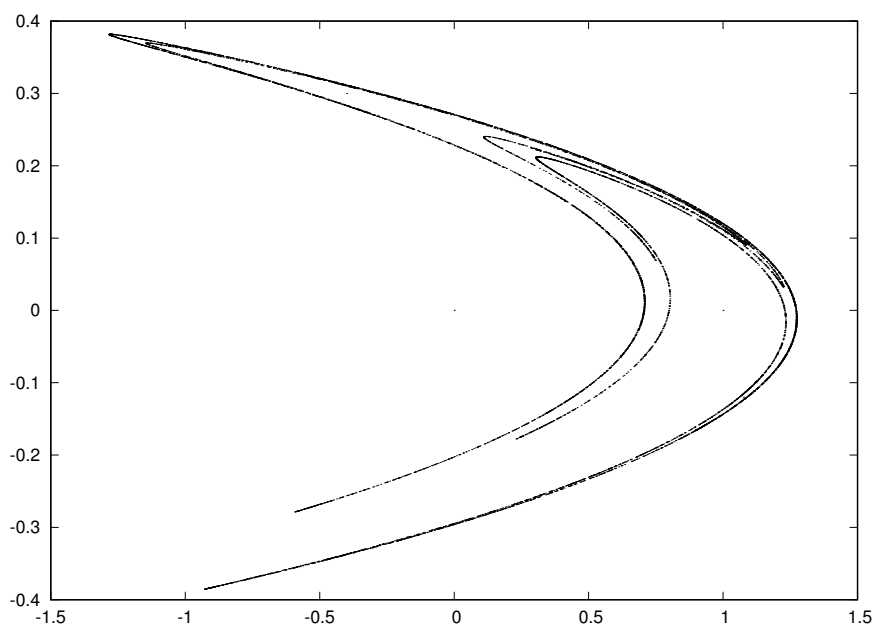


図 5: 初期値 $x_0 = 0, y_0 = 0$ から始めた写像 T の 10000 回の反復により得られた連続点.

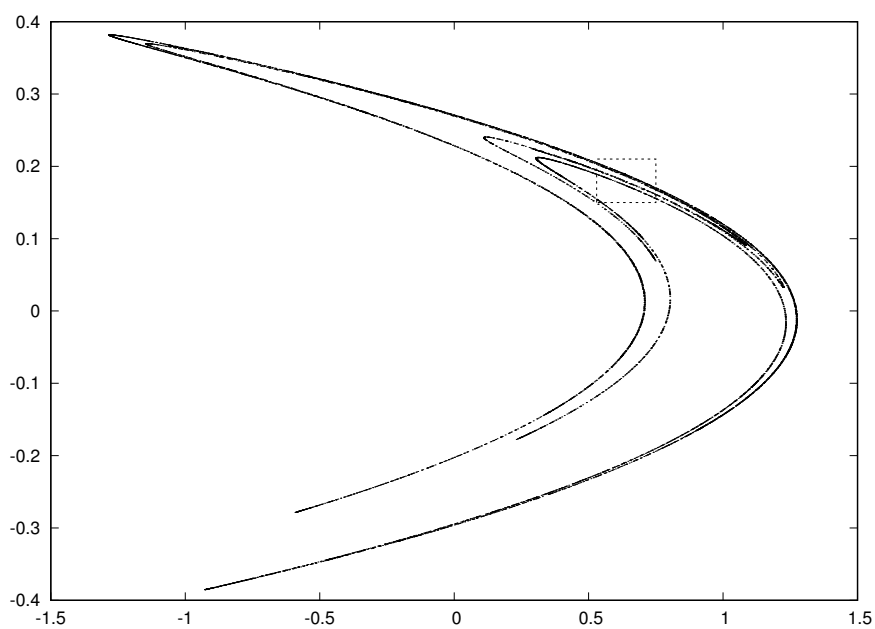


図 6: 図 5 と同様. ただし初期値は $x_0 = 0.63135448, y_0 = 0.18940634$ である.

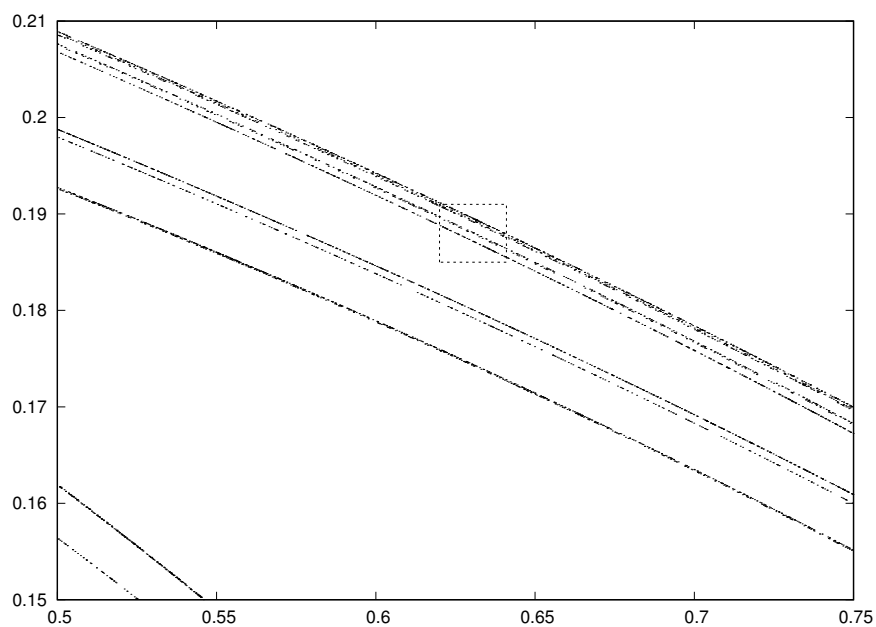


図 7: 図 6 の四角で囲われた範囲を拡大した. 数値計算した点列の数を $n = 10^5$ に増加させた.

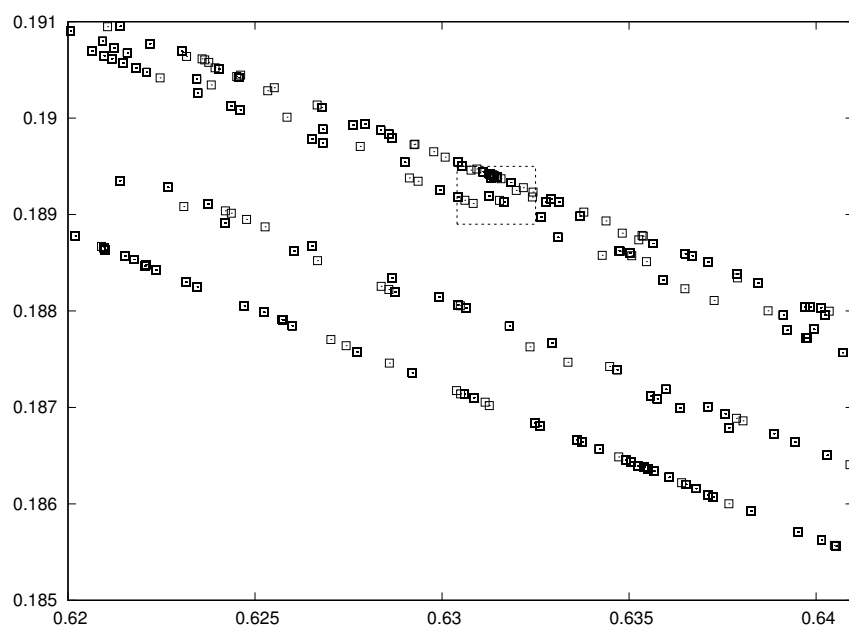


図 8: 図 7 の四角で囲われた範囲を拡大した. 数値計算した点列の数を $n = 10^6$ に増加させた.

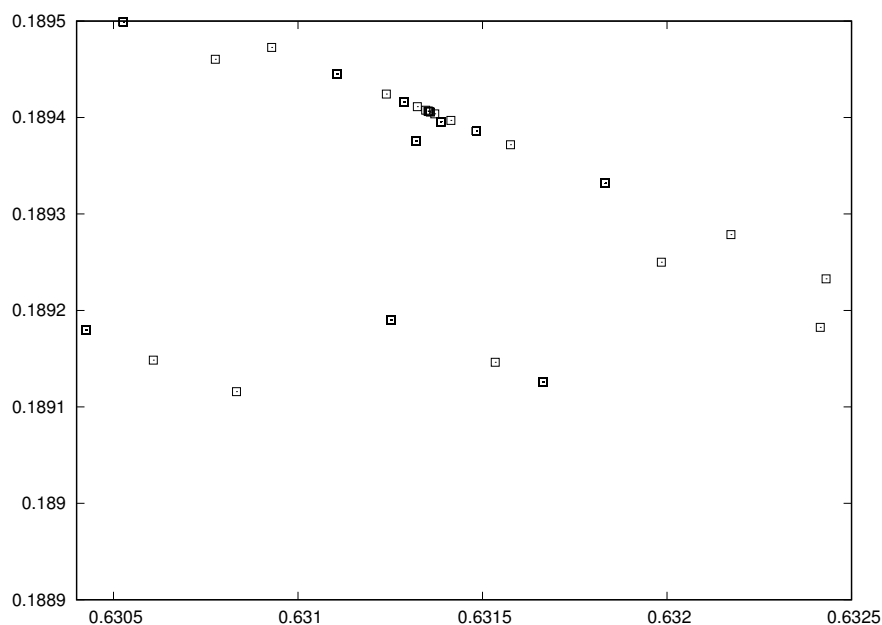


図 9: 図 8 の四角で囲われた範囲を拡大した ; 数値計算した点列の数を $n = 5 \times 10^6$ に増加させた.

3.4 ヘノン写像の特性

この写像はいくつかの興味深い特性を持つ.

ヤコビアンは定数である. つまり,

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = -b \quad (7)$$

である. (7) を満たす多項式の写像は完全クレモナ変換として知られており, 逆写像も多項式で与えられる. 実際に,

$$T^{-1} : x_i = b^{-1}y_{i+1}, \quad y_i = x_{i+1} - 1 + ab^{-2}y_{i+1}^2 \quad (8)$$

を得られる. 従って T は平面から平面への 1 対 1 の写像である. この特性はローレンツシステムにおける, ある与えられた点を通る唯一の軌道が存在するという事実に対応する.

ローレンツの問題との 1 つの違いは, T の繰り返しによって得られた連続点は必ずしもアトラクタに集中するわけではなく, しばしば無限大に発散する. これは原

点からの距離が大きくなったとき, (5) の 2 次の項が優位になるからである. しかし, a と b が特定の値のときは一度点が入り込んでしまうと逃れられない閉じたトラッピング領域 \mathbf{R} が存在する. T は,

$$X_0 = (2a)^{-1}[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}], \quad y = bx \quad (9)$$

で与えられる 2 つの固定点を持つ. これは 3.4.2 節で導出する. それらの点で,

$$a > a_0 = -(1-b)^2/4 \quad (10)$$

なら実数である. これは 2 つの固定点の 1 つが常に線形不安定な場合である. 一方もう 1 つの点は,

$$a > a_1 = 3(1-b)^2/4 \quad (11)$$

の場合不安定である. この条件は 3.6 節で導出する.

3.4.1 ヤコビアン (7) の導出

ヘノン写像では 2 次元平面内の面積が一定の割合で減少する. 以下でこの性質を説明する. $\delta X_i \times \delta Y_i$ の T による一回写像された微小面積を $\delta X_{i+1} \times \delta Y_{i+1}$ とすると,

$$\delta X_{i+1} \times \delta Y_{i+1} = \left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} \delta X_i + \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \delta Y_i \right) \times \left(\frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i} \delta X_i + \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_i} \delta Y_i \right) \quad (12)$$

$$= \left(\frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_i} \right) \delta X_i \times \delta Y_i \quad (13)$$

$$= \frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} \delta X_i \times \delta Y_i \quad (14)$$

となる. $\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)}$ はヤコビアン A である. これを計算すると,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial y_{i+1}}{\partial x_i} & \frac{\partial y_{i+1}}{\partial y_i} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$= \begin{pmatrix} -2aX_0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b \quad (16)$$

を得る. ここで X_0 は $X_0 = (2a)^{-1} \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}$ の固定点である. ヤコビアンは写像の拡大率を表す. ヘノン写像におけるヤコビアンは $-b$ であり, $|b| < 1$ の条件があるため, 写像の適応によって一定値 b の割合で 2 次元平面内の面積が減少することを示せた.

3.4.2 固定点 (9) の導出

固定点では $x_i = x_{i+1}, y_i = y_{i+1}$ を満たす. よって固定点を (X_0, Y_0) とすると, (X_0, Y_0) は,

$$X_0 = Y_0 + 1 - aX_0^2, \quad Y_0 = bX_0 \quad (17)$$

を満たす. これを整理すると,

$$aX_0^2 + (1 - b)X_0 - 1 = 0, \quad Y_0 = bX_0 \quad (18)$$

と変形できる. この2次方程式を解くと, (9) 式,

$$X_0 = (2a)^{-1}[-(1 - b) \pm \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}], \quad Y_0 = bX_0 \quad (19)$$

が得られる.

3.4.3 トラッピング領域

5×10^6 回の反復の後でさえ点群は無限大に発散しないことは点群が逃れられない領域が平面上にあることを示している. これは実際に領域自体の内側に写される領域 \mathbf{R} が見つかることにより証明されている. このような領域の例として,

$$\begin{aligned} x_A = -1.33, \quad y_A = 0.42, \quad x_B = 1.32, \quad y_B = 0.133, \\ x_C = 1.245, \quad y_C = -0.14, \quad x_D = -1.06, \quad y_D = -0.5 \end{aligned} \quad (20)$$

で定義される四辺形 $ABCD$ がある. 図 10 に四辺形 $ABCD$ を図示する.

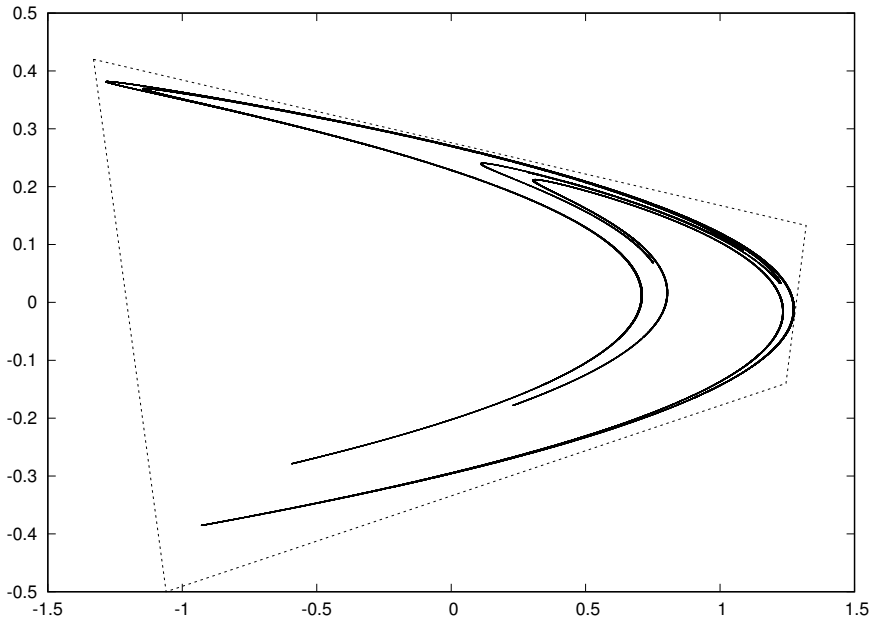


図 10: トラッピング領域の図示.

3.5 線形安定性解析

安定性解析とは不変点近傍の力学系の振る舞いを分析することである. 平衡点に近い初期値を与え, この初期値から出発した解と不変点との距離の時間的变化を解析する. ヘノン写像は,

$$T : x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i \quad (21)$$

で表現される. 不変点を (X_0, Y_0) とすると, この点は同じ点へ写されるので,

$$X_0 = Y_0 + 1 - aX_0^2, \quad Y_0 = bX_0 \quad (22)$$

である. ここで不変点 (X_0, Y_0) からの揺らぎを x'_i, y'_i とおくと,

$$x_i = X_0 + x'_i, \quad y_i = Y_0 + y'_i \quad (23)$$

と表現できる. これをヘノン写像を表す方程式へ代入すると, y_i は,

$$Y_0 + y'_{i+1} = b(X_0 + x'_i), \quad (24)$$

$$y'_{i+1} = bx'_i \quad (25)$$

となり, x_i は,

$$X_0 + x'_{i+1} = Y_0 + y'_i + 1 - a(X_0 + x'_i)^2, \quad (26)$$

$$x'_{i+1} = y'_i - 2aX_0x'_i + \mathcal{O}(x'^2) \quad (27)$$

$$\simeq y'_i - 2aX_0x'_i \quad (28)$$

となる. これを行列の形で書くと,

$$\begin{pmatrix} x'_{i+1} \\ y'_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2aX_0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

となる. ここで $\begin{pmatrix} -2aX_0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ はフローケ行列 M と呼ばれる写像変換を表す行列である. λ を固有値とし,

$$\begin{pmatrix} x'_{i+1} \\ y'_{i+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \quad (30)$$

と仮定する. これにより固有値問題に帰着する. よって,

$$\begin{vmatrix} -2aX_0 - \lambda & 1 \\ b & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

を満たす λ を求める. これを解くと, λ は,

$$-\lambda(-2aX_0 - \lambda) - b = 0, \quad (32)$$

$$\lambda^2 + 2aX_0\lambda - b = 0 \quad (33)$$

となり, λ_1, λ_2 をもつ. それらは,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -aX_0 + \sqrt{a^2X_0^2 + b}, \\ \lambda_2 &= -aX_0 - \sqrt{a^2X_0^2 + b} \end{aligned} \quad (34)$$

である. 固有方程式は, 固有値を求めるフローケ行列 M と固有値 λ_1, λ_2 , それに属する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を用いて,

$$(M - \lambda_1 E)\mathbf{v}_1 = 0, \quad (35)$$

$$(M - \lambda_2 E)\mathbf{v}_2 = 0 \quad (36)$$

である. よって, 固有ベクトルは,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ aX_0 + \sqrt{a^2X_0^2 + b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ aX_0 - \sqrt{a^2X_0^2 + b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

である。よって固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の傾き p_1, p_2 はそれぞれ,

$$\begin{aligned} p_1 &= -\lambda_2, \\ p_2 &= -\lambda_1, \end{aligned} \quad (39)$$

となる。

先に求めた $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2$ へ, $a = 1.4, b = 0.3$ の場合のヘノン写像の固定点の座標の一つ,

$$X_0 = 0.63135448\dots, \quad Y_0 = 0.18940634\dots \quad (40)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.15594632\dots, & p_1 &= 1.92373886\dots, \\ \lambda_2 &= -1.92373889\dots, & p_2 &= -0.15594632\dots \end{aligned} \quad (41)$$

が得られる。このことはヘノン写像の図において、固定点での接線方向である \mathbf{v}_2 方向に不安定で、法線方向である \mathbf{v}_1 方向にストレンジアトラクタがみられることを示している。もう一つの固定点の座標,

$$X_0 = -1.1313544\dots, \quad Y_0 = -0.3394063\dots \quad (42)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3.25982188\dots, & p_1 &= 0.092029567\dots, \\ \lambda_2 &= -0.092029567\dots, & p_2 &= -3.25982188\dots \end{aligned} \quad (43)$$

が得られ, (43) で与えられる摂動解も (41) のそれらと同様の性質を示す。

3.6 分岐条件

(11) で示される固定点の 2 周期の分岐条件を求める。2.10 節で説明したフローケ理論より, (29) で示されるフローケ行列の固有値の最も中心に近いものが単位円を -1 のところで外向きに横切るとき, 周期倍分岐が発生する。つまり固有値が実

数条件を満たし、且つ固有値 $\lambda_2 < -1$ となる条件を導出する.

$$\lambda_2 = -aX_0 - \sqrt{a^2X_0^2 + b} < -1, \quad (44)$$

$$-aX_0 + 1 < \sqrt{a^2X_0^2 + b}, \quad (45)$$

$$a^2X_0^2 - 2aX_0 + 1 < a^2X_0^2 + b, \quad (46)$$

$$-2aX_0 + 1 < b, \quad (47)$$

となる. ここに負符号の固定点 X_0 を代入すると,

$$1 - b + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a} + 1 < b, \quad (48)$$

$$2(1 - b) < -\sqrt{(1 - b)^2 + 4a}, \quad (49)$$

$$4(1 - b)^2 < (1 - b)^2 + 4a, \quad (50)$$

$$\frac{3(1 - b)^2}{4} < a, \quad (51)$$

より, (11) が導出された. ヘノン写像のさらなる n 周期倍分岐の条件は, 分岐図で目視により確認できる.

3.6.1 分岐図

以下にパラメタ b を $b = 0.3$ に固定し, a を -0.2 から 1.5 まで変化させてときの分岐図とその拡大図, 軌道図と固定点をパラメタの関数として同時に表示した図を掲載する.

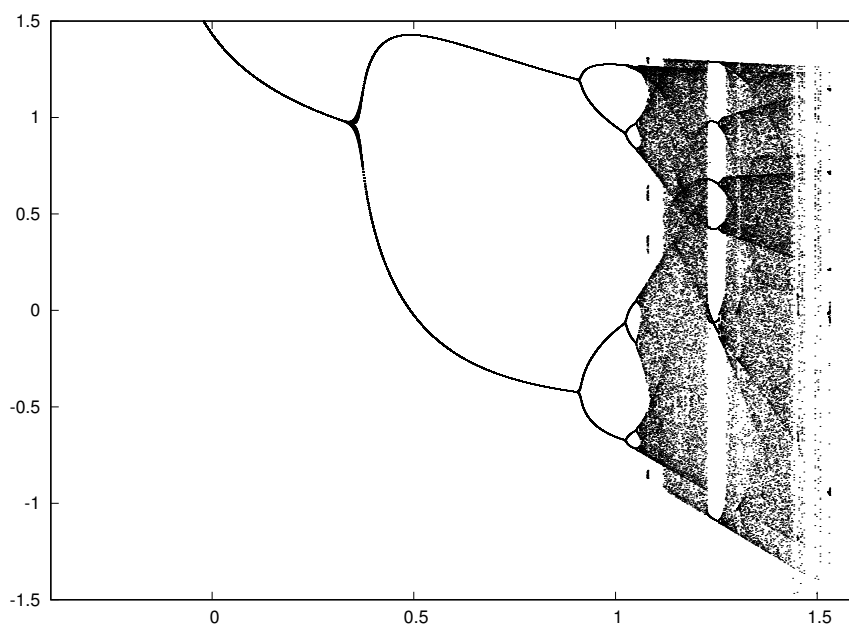


図 11: ヘノン写像の分岐図 : $b = 0.3$ において a を -0.2 から 1.5 まで 0.001 刻みで変化させたときの x 座標 x_i を $i = 101$ から 201 まで表示.

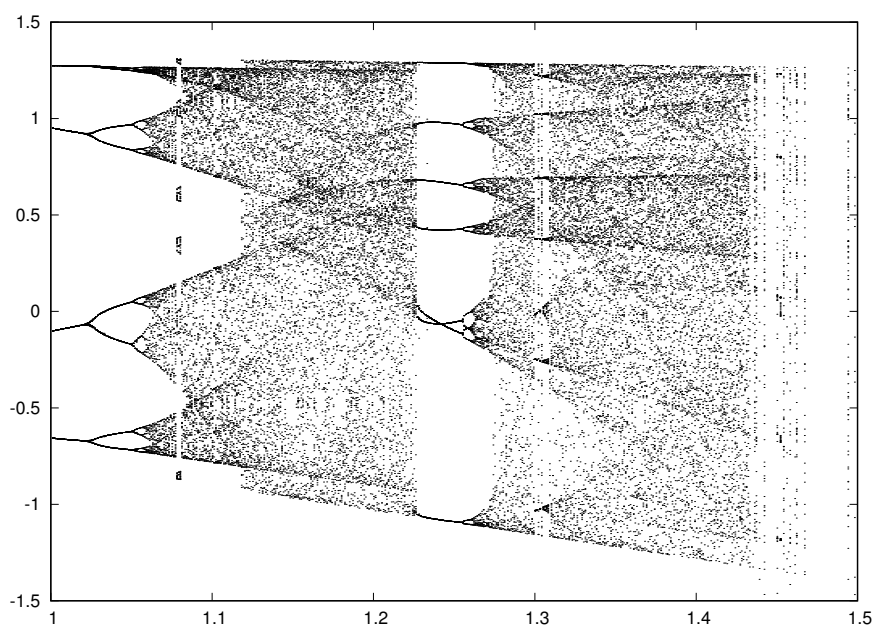


図 12: 図 11 の拡大図.

固定点の安定性を解析するために固定点 $X_0 = (2a)^{-1}[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}]$

を分岐図 (図 8) に重ねたものが図 13 である.

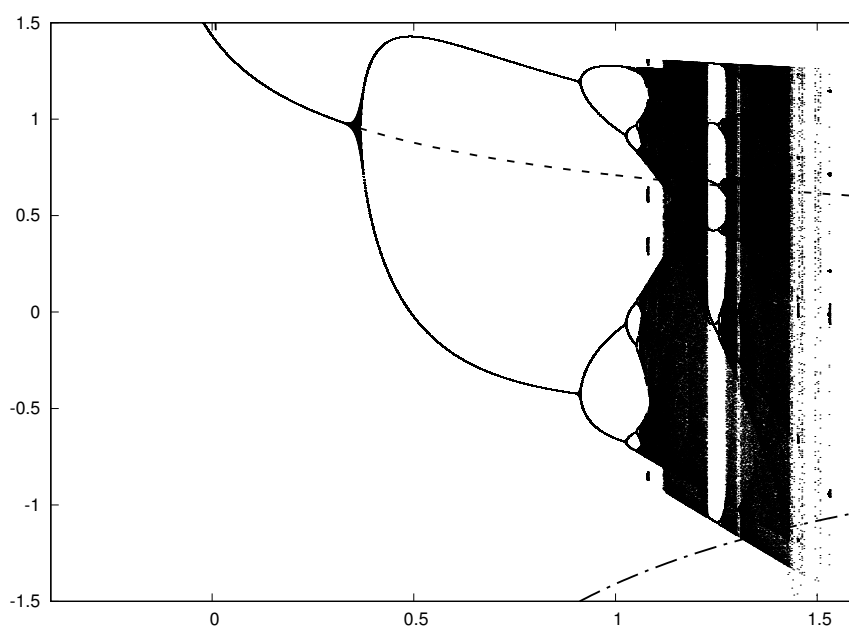


図 13: 図 11 と固定点の x 座標 X_0 の変化. ここで破線と一点は戦はそれぞれ固定点 $X_0 = (2a)^{-1}[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}]$ を表す.

分岐図から 3.2 節で議論したパラメタ a の周期倍分岐の条件を目視することができる.

第4章 結論

ローレンツ方程式系を離散化し, 2次元写像に簡単化したモデルである散逸系のヘノン写像の解析を M. Henon (1976) に沿って行った. それにより接線方向に不安定で, 法線方向に安定であることと, 分岐の条件 a_0, a_1, a_2, a_3 を確認した.

ヘノン写像とローレンツ方程式系は, ともに散逸系だが, ヘノン写像は十分に時間が経過したとき無限大に逃げる軌道が存在するという点でローレンツ方程式系とは異なる. また, ヘノン写像では散逸率が小さくなるようにパラメタ b の値を $b = 0.3$ としたため, 視覚的にもストレンジアトラクタを容易に見ることができた.

トラッピング領域を決めるプログラムを作ること, ローレンツ方程式系においても数値的に同様の性質を示すことの2つが課題として残った.

謝辞

本研究を行うにあたり, 岩山隆寛准教授には研究内容に関してご指導いただきました. また, 林祥介教授, 高橋芳幸准教授にはセミナーやポスターセッションにおいて鋭いご指摘を頂きました. 流体地球物理学研究分野の皆様にも卒論の進め方から研究内容に至るまで様々なアドバイスを頂きました. 皆様に心よりお礼を申し上げます.

付録A 力学系の研究小史

力学系の研究は、数学の一分野として長い歴史を誇っている。この章では、Strogatz(2015), Devaney(1997) に従って力学系の研究の歴史を紹介する。

アイザック・ニュートンによって基礎づけられた微分方程式は、時間とともに連続的に推移する過程を記述するために主な数学的技法となった。18, 9世紀、数学者は微分方程式を陽に解く数多くの技法を編み出した。それらはラプラス変換、べき級数展開、変数変化方、線形代数的手法などである。

しかし、この発展には一つの大きな欠陥があった。運動方程式を解くこうした解析的手法のほとんどすべてが主として線形の微分方程式にしか適用できなかったことである。非線形の微分方程式は解くのがはるかに難しいことが明らかとなるが、自然におけるもっとも重要な過程の多くは本質的に非線形なのである。このことは、ニュートンがそもそも微積分と微分方程式を開発した元々の動機によっても例証される。ニュートンの法則によって、我々は多くの重要な物理的な現象の中でも最たるものである太陽系における惑星の運動を記述する方程式を書き出すことができる。ニュートンの法則はその解が重力のみを受けて互いに引き合う n 個の質点の空間内の運動を記述する微分方程式を与える。これは n 体問題として知られている。これらの質点の初期の位置と速度が分かれば将来これらの質点がどこへどのように移動するかを予言するためにニュートンの微分方程式を解くだけでよい。ところが、これは実に大変な課題であることが分かってきた。惑星一つか二つならば、これらの方程式は陽に解くことができる。しかし三つ以上の質点に対しては数えきれない数学者による過去三世紀に及ぶ努力の甲斐もなく、今日でも未解決である。多くの場合、解の本当の振る舞いをコンピュータを使った微分方程式の数値解によって近似できるというのは事実である。しかし、 n 体問題には、その解があまりにも入り組んでおり、カオス的であるために数値解すら拒んでいる領域が依然として存在するのである。

非線形微分方程式に対する陽の解はとらえどころのないものであるが、この百年間に我々の力学系研究の方法に革命をもたらした三つの大きな成果があった。そのうちでもっとも重要な成果は1890年に起こった。当時スウェーデン王オスカー

二世は、 n 体問題を解いて太陽系の安定性を最初に証明した数学者に賞を与えると告知していた。言うまでもなく本来の問題を解き得た者はいなかったが、偉大なフランス人数学者 H. ポアンカレはそれに最も近づいた。論文においてポアンカレはこれらの方程式を陽に解くのではなく、全ての解の大域的な構造を明らかにするトポロジー（位相幾何）の手法を使った定性的な研究を提唱したのである。彼はこの解を個別に研究するよりも、対象とする形のすべての可能な振る舞いを知ることが重要と考えていた。ポアンカレが賞を獲得した論文には、微分方程式の解の振る舞いに対する偉大な洞察が含まれている。数学者はそれまで、これらの解を記述するのに今日我々が安定多様体と不安定多様体と呼ぶものが常に一致すると暗黙の内に定義してきた。ポアンカレはこの過程に疑問を投げかけた。当初、彼は常にこれが成立することを示そうと長い間頑張ったが、証明できなかった。そして彼は安定多様体と不安定多様体が一致せず角度を持って交わりうると結論付けた。この可能性を認めるとき、このことが解に過去誰も想像しなかったような複雑な振る舞いを引き起こすことに気づいた。ポアンカレは今日われわれが呼ぶところのカオスを発見したのである。微分方程式のカオス的なふるまいを理解するための多くの試みを数年にわたり行った後、自らの見出した複雑さを理解するものが果たして現れるかどうか訝しがりながら手を引いたのである。今日呼ばれるところのカオス理論はこのようにアンリ・ポアンカレの仕事にさかのぼることができるのである。

ポアンカレの数学における業績は、力学系の分野をはるかに超えている。彼のトポロジー的手法の提唱は、数学において全く新しい主題を拓いた。実際彼のアイデアの上に数学者たちは続く数十年力学系を離れ、これらの関連分野にその関心を転じていたのである。20 世紀には代数的トポロジー、微分トポロジーといった数学の領域が生まれた。しかし、誰一人としてポアンカレが観察したカオス的な振る舞いを扱うことはできず力学の研究はしぼんでいったのである。ただしこれは二つの顕著な例外が存在する。一つはフランスの数学者、P. ファトゥーと G. ジュリアによる複素解析的写像の力学に関する 1920 年代の仕事である。彼らもまた、カオス的なふるまいを我々が今日ジュリア集合と呼んでいるものの中に見た。彼らはジュリア集合がいかにすさまじく入り組んでいるかを理解した。しかし彼らはこれらの集合を見るのに使えるコンピューターグラフィックスを持っていなかったしたがってこの仕事も 1930 年代には停止してしまった。

これと同じ頃、アメリカの数学者 G・D・バーコフはポアンカレ的な力学に対する定性的な視点を取り入れ微分方程式の力学的振る舞いを理解するためのより簡単な方法として反復過程の研究を提唱した。力学系における第二の大きな発展は 1960 年代起こった。アメリカの数学者 S. スメールは反復の視点からポアンカレの安定多様体と不安定多様体の交差について再考察し、先人たちを困らせたカオス的な振る舞いは理解可能であり、完全に解析しうることを実例によって示したのである。彼がこの解析に用いた技法は記号力学と呼ばれる。同時にアメリカの気象学者 E.

N. ローレンツは極めて粗末なコンピュータを使って非常に簡単な微分方程式もポアンカレが気づいたカオスを示しうることを発見した。実はローレンツは、バーコフの博士課程の学生であった。さらに彼はその簡単な気象学的モデルが今日いうところの初期値に対する敏感な依存性を示すことも観測した。これはまさに長期にわたる天気予報が不可能であることを意味するものに他ならなかった。こうして、彼は数学の一話題であるカオスが化学のほかの領域でも重要であることを示したのである。

このことは1970年代に非線形ダイナミクス研究の興隆と興奮へと導いた。生態学者 R. メイは数理生物学に現れる非常に簡単な反復過程が信じられないほど複雑なカオス的なふるまいを生み出しうることを見出した。物理学者 M. ファイゲンバウムはスメールの初期の仕事の上に立ち、カオス的なふるまいの複雑さにもかかわらず、系がカオス的となる際の順序にはある類似が存在することに気づいた。物理学者 H. スウィニーと J. コラブは、こうした数学的な時間発展が実際の物理系、とりわけ乱流において自裁に観察されうることを示した。最近になって、冥王星の運動や人間の心拍などの流体以外の系も同様のカオス的なパターンを示すことが分かってきた。一方、数学においてはカオスを理解するのに役立つ新しい技法が開発された。J. グッケンハイマーと R. F. ウィリアムズは十年前にローレンツが観察した現象を説明するのにストレンジアトラクタの理論を用いた。また、シュワルツ微分、記号力学、分岐理論といった道具が力学系の振る舞いを理解するのに重要な役割を果たすことが示された。

第三の、もっとも最近の力学系の発展は、高速のコンピュータが使えるようになったこと、そしてコンピューターグラフィックスの存在がある。コンピューターによって生成される結果の中で真っ先に挙げられるのが、1980年にマンデルブローによって発見され、今日マンデルブロー集合と呼ばれているものである。この美しい画像は直ちに、昔ジュリアとガトーが行った仕事に対する興味を改めてかきたてることとなった。コンピューターの画像をガイドとして、E. ドゥアディ、J. ハバード、D. サリバンといった数学者がこの古典的理論に大きな進展をもたらした。軌道の図やローレンツアトラクタのようなコンピューターグラフィックス画像が数学者の間に少なからぬ興味を起こさせ、さらなる進展を呼んだのである。

高速のコンピューターとコンピューターグラフィックスが使えるようになった恩恵の一つは力学系の研究に実験の要素を導入した点である。先人たちは自らの想像力と知力のみで頼らなければならなかったが、今や数学者は付加的な手段としてコンピュータを用いることができるのである。

付録B 保存系の例：Henon(1969)

Henon(1969) において示された,

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \alpha - (y - x^2) \sin \alpha \\y_1 &= x \sin \alpha + (y - x^2) \cos \alpha\end{aligned}\tag{B.1}$$

で表現される2次の写像は保存系である。これはヤコビアンが $\partial(x_1, y_1)/\partial(x, y) = 1$ となることにより確認される。図1は $\alpha = 0.8$ の場合の(5)の $x - y$ 空間における解の振る舞いである。ある初期値を選ぶと、 $(0, 0)$ を中心とした1つの閉軌道が得られる。図1では5つの異なる初期値からの反復を示している。以下同様に様々な α の場合に、いくつかの初期値からの(5)による反復を図1から図12に示す。

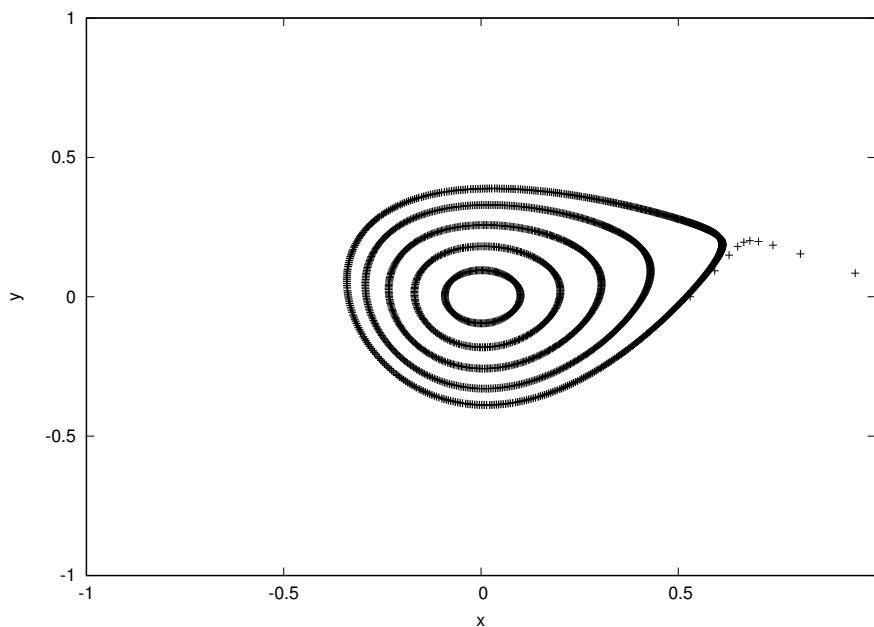


図1: $\alpha = 0.8$ の場合の(5)のアトラクタ。

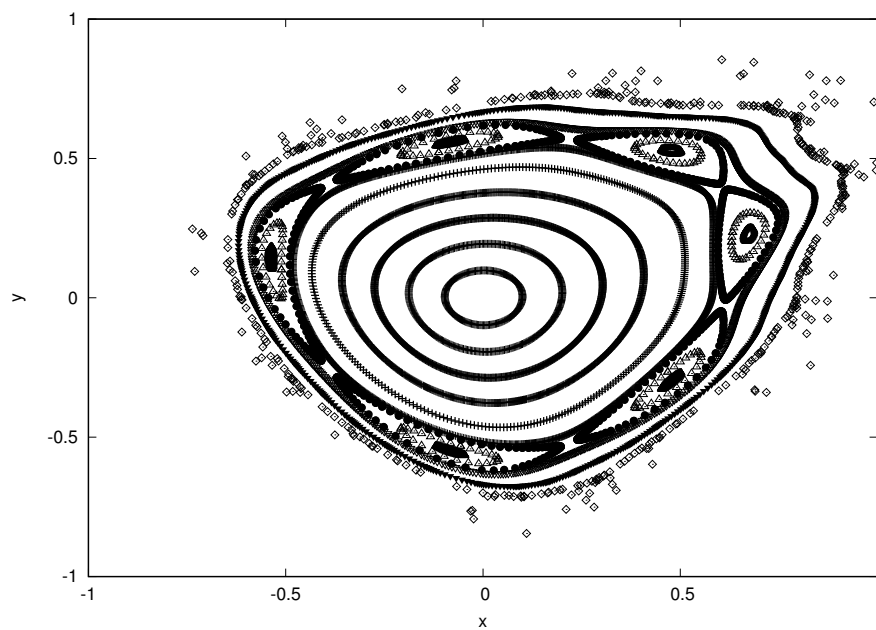


図 2: 図 1 と同様. ただし $\alpha = 0.4$ の場合.

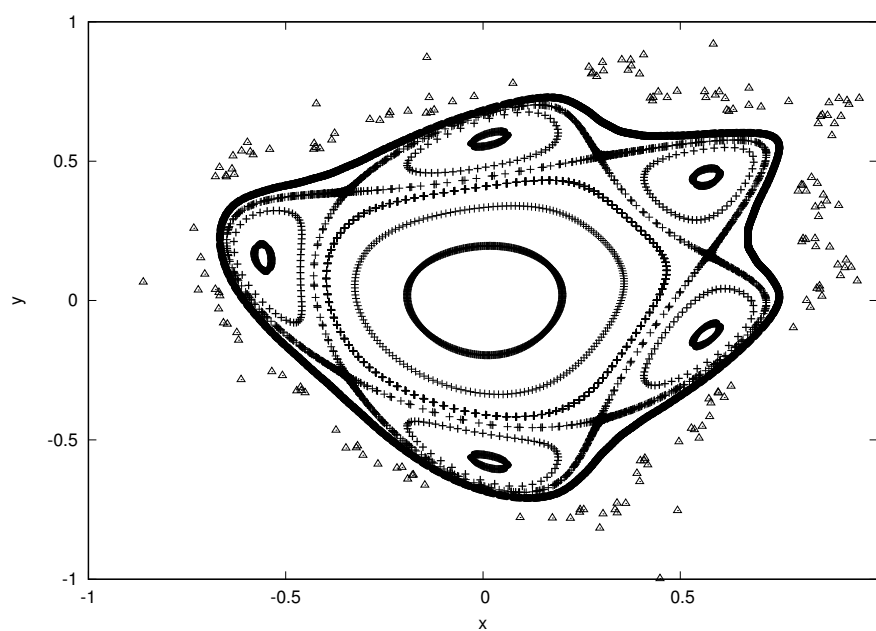


図 3: 図 1 と同様. ただし $\alpha = 0.24$ の場合.

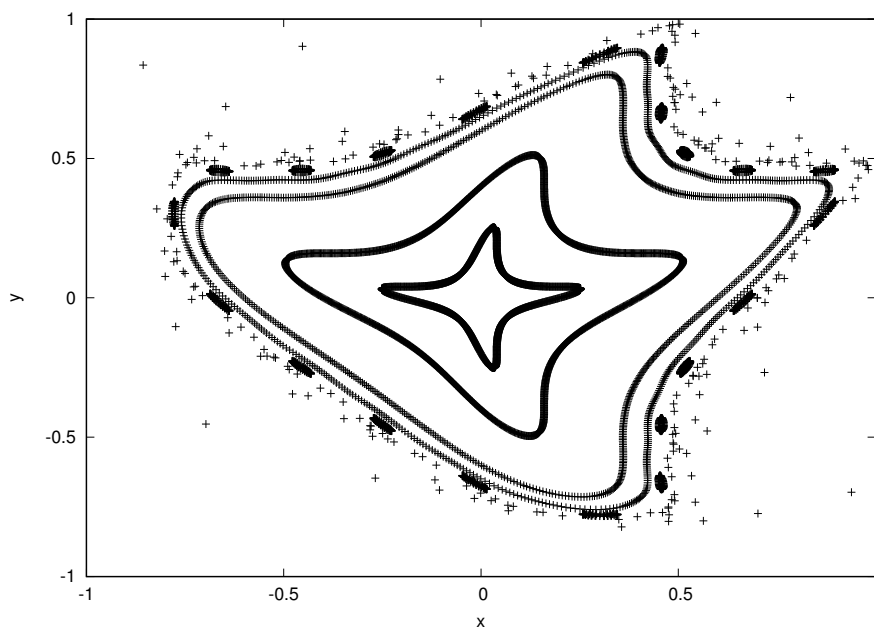


図 4: 図 1 と同様. ただし $\alpha = 0.0$ の場合.

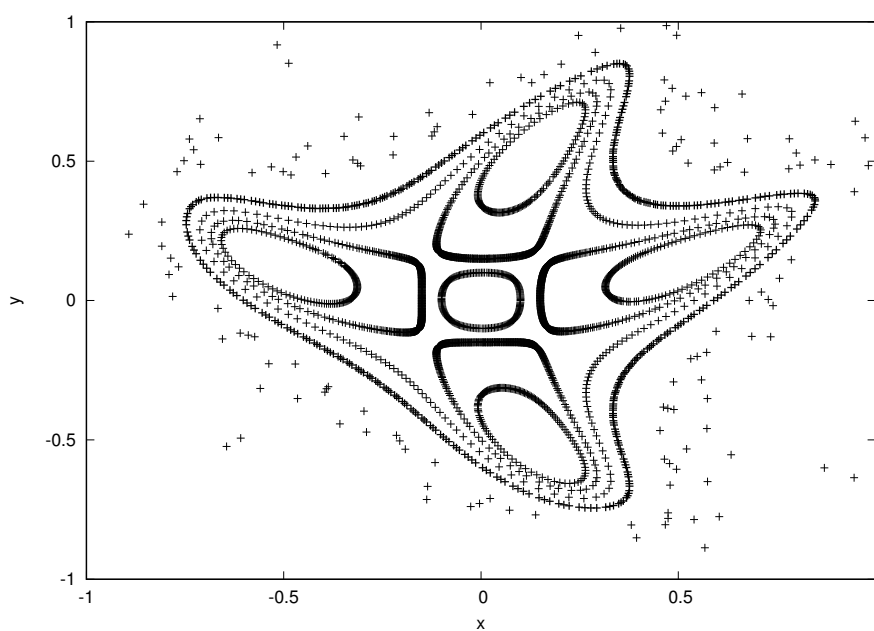


図 5: 図 1 と同様. ただし $\alpha = -0.01$ の場合.

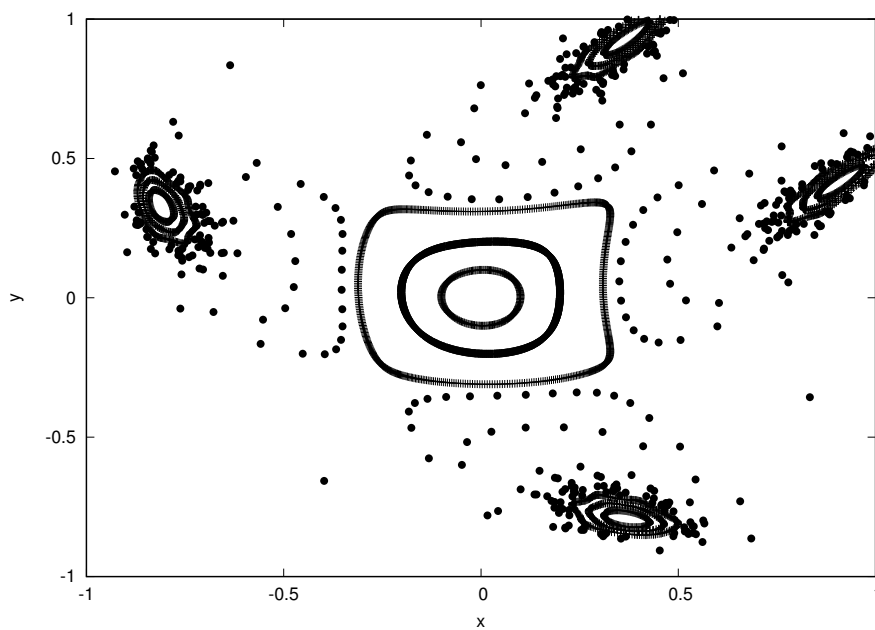


図 6: 図 1 と同様. ただし $\alpha = -0.05$ の場合.

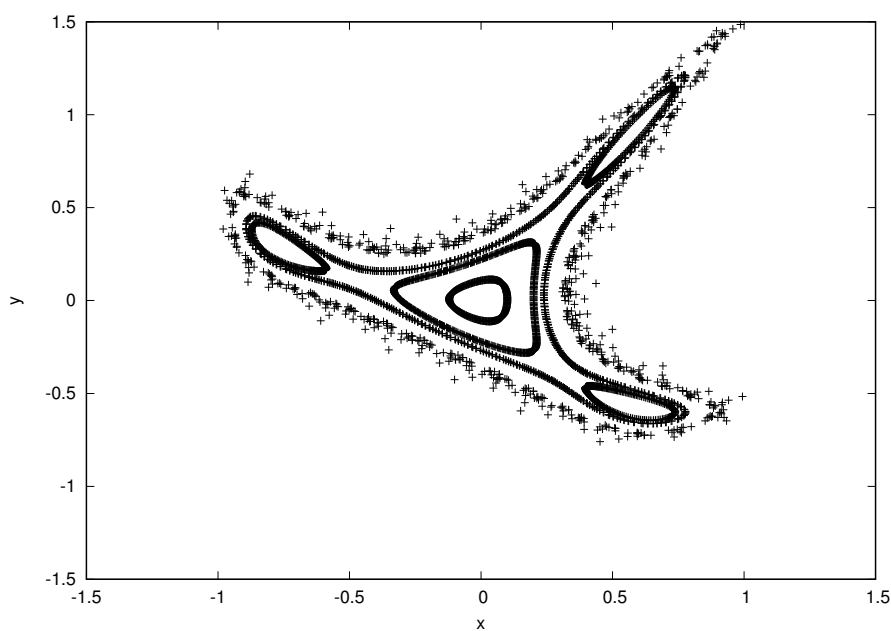


図 7: 図 1 と同様. ただし $\alpha = -0.42$ の場合.

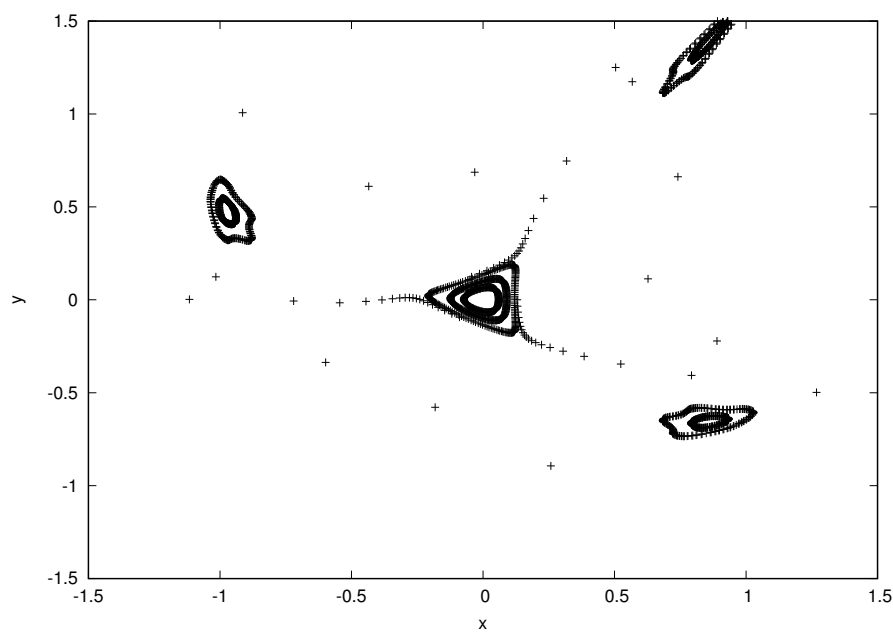


図 8: 図 1 と同様. ただし $\alpha = -0.45$ の場合.

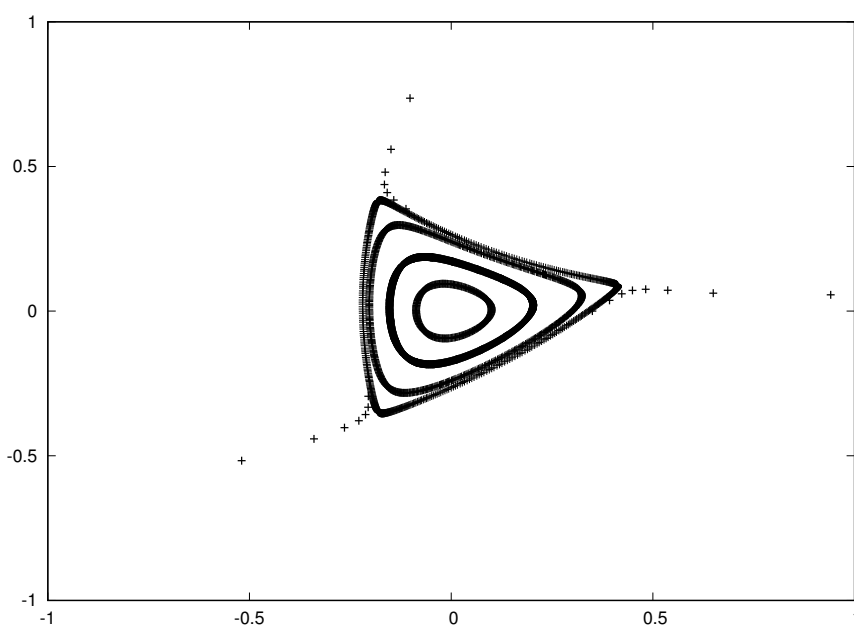


図 9: 図 1 と同様. ただし $\alpha = -0.60$ の場合.

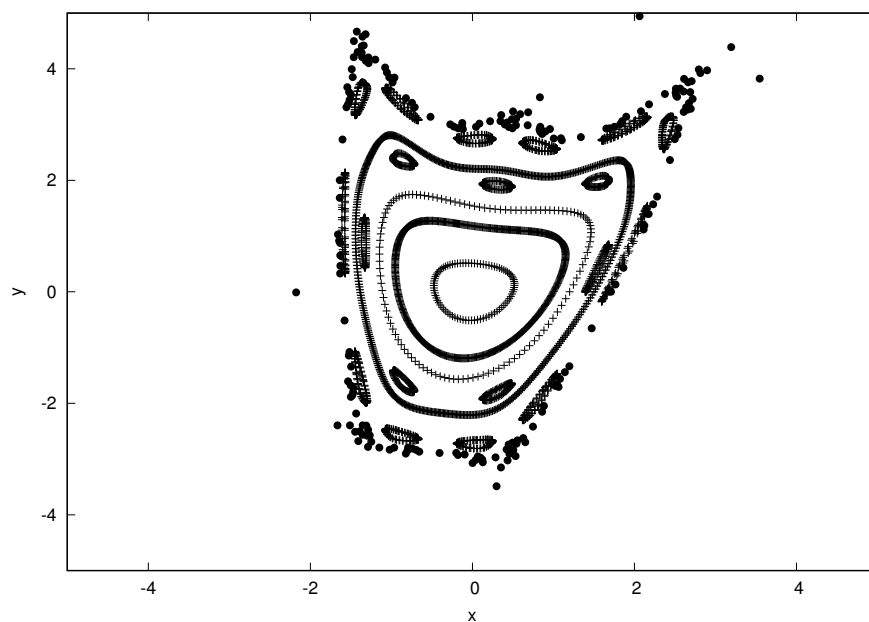


図 10: 図 1 と同様. ただし $\alpha = -0.95$ の場合.

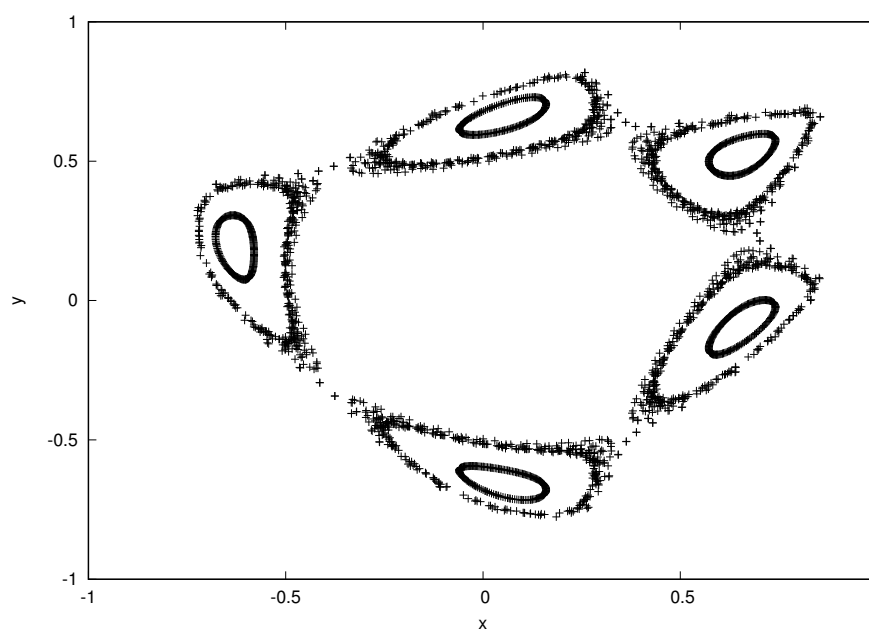


図 11: 図 1 と同様. ただし $\alpha = 0.22$ の場合.

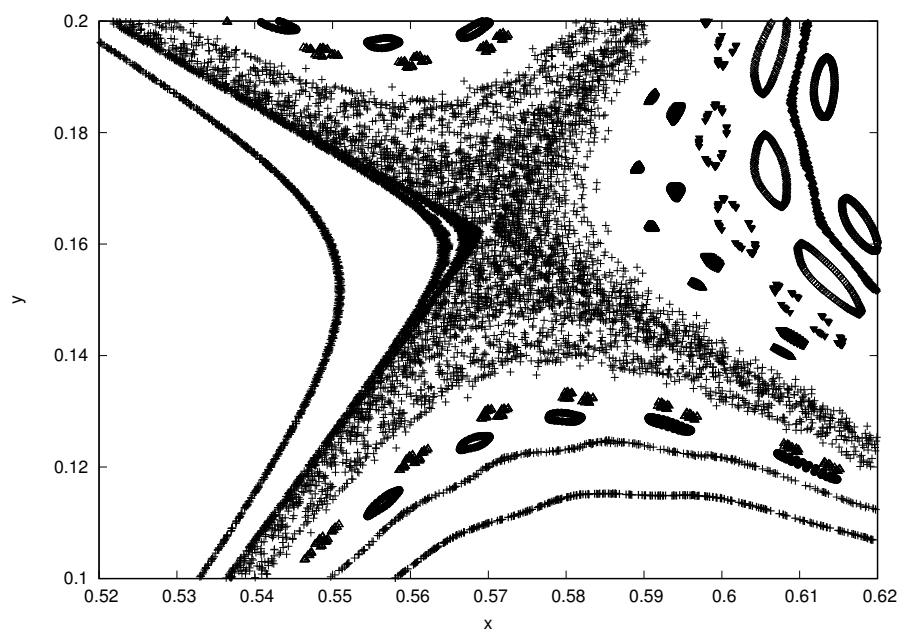


図 12: 図 1 と同様. ただし $\alpha = 0.24$ の場合.

保存系では散逸系と違いアトラクタや固定点の位置が目視できる. ここで固定点は $I_1 : x = y = 0$ と, $I_2 : x = 2 \tan \alpha / 2, y = 2 \tan^2 \alpha / 2$ で与えられる.

付録C ローレンツ方程式系

Lorenz は熱対流を記述する方程式系を 3 変数で切断した微分方程式系を導出した:

$$\dot{X} = -\delta X + \delta Y, \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \quad (\text{C.2})$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \quad (\text{C.3})$$

ここで $\delta > 0$ はプラントル数であり, ここでは $\delta = 10$ の値を用いる. b はローレンツ方程式系においては $b = 3/8$ の定数, r は定数であり, ここでは $r = 28$ の値を採用する. 以下の図 1 に (C.1) から (C.3) の解 $X(t), Y(t), Z(t)$ の軌道を示す. 数値計算には 4 次のルンゲクッタ法を用いた. 初期値は $(X, Y, Z) = (1.0, 1.0, 1.0)$ である. 時間の刻み幅 Δt を 0.01 として 10000 ステップを計算した.

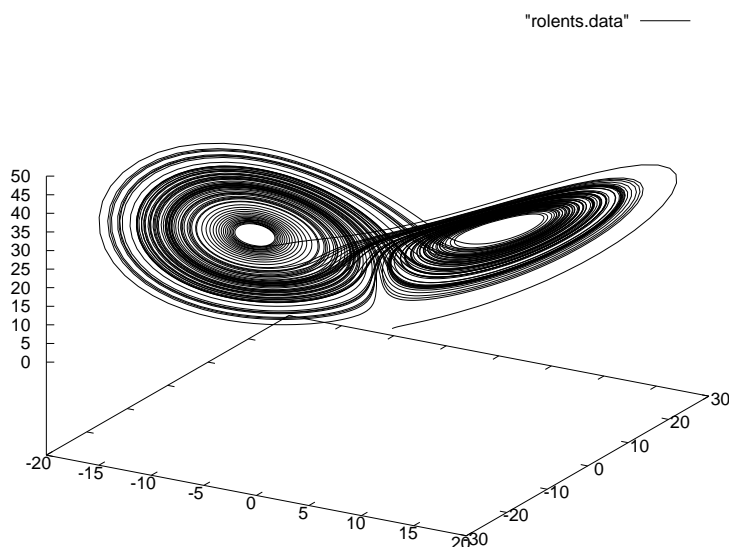


図 1: (C.1) から (C.3) を $\delta = 10, r = 28, b = 3/8$ の条件で数値的に解いたときの位相空間内の軌道.

この方程式系で時間変化する任意の微小体積を考える。流れの発散は、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} \quad (\text{C.4})$$

$$= -\delta - 1 - b < 0 \quad (\text{C.5})$$

となり負の一定値である。このため、ローレンツ系では X, Y, Z ではられる位相空間内の体積は一定の割合で縮小していく。

ローレンツ方程式系の導出を行う。この方程式系はレイリーベナール対流を記述する流体力学の基礎方程式系から導かれる。

無限に広い水平な流体層を下部から均等に加熱したときの流体の運動を考える。簡単化のため、不安定化により生じる対流パターンは平行なロール状である場合を考える。 x 軸を水平方向に、 y 軸をロールの軸方向に、 z 軸を鉛直方向にとる。よって空間の変数は2つである。また x, z 方向の厚さ d を単位長さとし、境界は $z = \pm 1/2$ とする。速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ の満たす運動量輸送と、対流がある場合の温度場と対流がなく静止している場合の温度場の差 $\theta(\mathbf{r}, t)$ の満たす熱輸送の式をブネスク近似の下で無次元化した式と非圧縮性の式は、

$$\delta^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \theta \boldsymbol{\lambda} + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{C.6})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = Ra \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v} + \nabla^2 \theta \quad (\text{C.8})$$

である。ここで、方程式系に含まれるパラメタは以下の通りである；

- $\delta = \nu/D_T$: プラントル数
- $Ra = (\rho_0 g \alpha d^3 / \eta D_T) \delta T$: レイリー数
- D_T : 熱拡散係数
- η : 動粘性係数
- α : 熱膨張率
- g : 重力加速度
- ρ_0 : 流体層の平均密度
- $\boldsymbol{\lambda}$: 重力方向の単位ベクトル

である。

速度場の x および z 成分をそれぞれ $u(x, z, t)$, $w(x, z, t)$ とおくと非圧縮条件 (C.7) は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.9})$$

である. したがって流れ関数 $\psi(x, z, t)$ を用いて,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\psi_z, \quad (\text{C.10})$$

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial x} = +\psi_x \quad (\text{C.11})$$

が (A.9) の解となる. 以下では下付き添字の t, x, z はそれぞれ変数に関する偏微分を表すものとする. 次に境界条件を考える. 境界では流速がゼロとする.

$$w|_{z=\pm 1/2} = \psi_x|_{z=\pm 1/2} = 0 \quad (\text{C.12})$$

さらに上面下面での表面張力を無視する. つま応力テンソルの剪断力成分はゼロである.

$$-\eta \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=\pm 1/2} = \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=\pm 1/2} = \psi_{zz}|_{z=\pm 1/2} = 0 \quad (\text{C.13})$$

ガラーキンの方法を用いて, ψ を,

$$\psi(x, z, t) = \psi_1(t) \cos(\pi z) \sin(qx) \quad (\text{C.14})$$

とすると, 速度場は,

$$u = \pi \psi_1(t) \sin(\pi z) \sin(qx), \quad (\text{C.15})$$

$$w = q \psi_1(t) \cos(\pi z) \cos(qx) \quad (\text{C.16})$$

のようになる. 次に (C.1) を x, z 成分に分けると,

$$\delta^{-1}(u_t + uu_x + wu_z) = -p_x + \Delta u, \quad (\text{C.17})$$

$$\delta^{-1}(w_t + uw_x + ww_z) = -p_z + \Delta w + \theta \quad (\text{C.18})$$

である. (C.17) を z で微分したものと (C.18) を x で微分したものの差をとると,

$$\delta^{-1} \left[-(\Delta \psi)_t + (uu_x + wu_z)_z - (uw_x + ww_z)_x \right] = -\Delta^2 \psi - \theta_x \quad (\text{C.19})$$

となる. ただし,

$$\Delta \psi = -(u_z - w_x) \quad (\text{C.20})$$

である。

θ は, (C.1) や (C.19) より速度場と関係しているので x 依存性は w と同じである. さらに液相の上面と下面で温度が一定値なので境界条件は,

$$\theta|_{z=\pm 1/2} = 0 \quad (\text{C.21})$$

である. これらの条件から, $\theta(x, z, t)$ を,

$$\theta(x, z, t) = \theta_1(t) \cos(\pi z) \cos(qx) + \theta_2(t) \sin(2\pi z) \quad (\text{C.22})$$

と置くことにする. 右辺第二項は非線形性から生じる高周波成分を考慮して追加した. (C.19) に u, w, ψ, θ を代入すると,

$$\delta^{-1}\psi_1 = \frac{q\theta_1}{\pi^2 + q^2} - (\pi^2 + q^2)\psi_1 \quad (\text{C.23})$$

が得られる.

熱力学方程式 (C.3) は ψ を用いて書くと,

$$\theta_t + \psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x = Ra\psi_x + \Delta\theta \quad (\text{C.24})$$

である. 非線形項 $\psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x$ は,

$$\psi_x \theta_z - \psi_z \theta_x = \pi q \psi_1 \left[\frac{-\theta_a}{2} \sin(2\pi z) \theta_2 \cos(qx) (\cos(\pi z) + \cos(3\pi z)) \right] \quad (\text{C.25})$$

である. (C.24) に速度の式 (C.15), (C.16) と温度の式 (C.22) を代入すると, 一つの方程式が得られる. この厳密解は対流がないとき, つまり $\psi_1 = 0$ のみである. しかし近似的に考えているため, その式は厳密ではない. 近似的に正しいのは $\cos(qx) \cos(\pi z)$ の成分と $\sin(2\pi z)$ の成分のみで $\cos(qx) \cos(3\pi z)$ の成分は無視する. すると二つの成分の独立性から,

$$\dot{\theta}_1 = -\pi q \psi_1 \theta_2 + qRa\psi_1 - (\pi^2 + q^2)\theta_1, \quad (\text{C.26})$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2}\pi q \psi_1 \theta_1 - 4\pi\theta_2 \quad (\text{C.27})$$

の関係が得られる. (C.23), (C.26), (C.27) の三式は $\psi_1, \theta_1, \theta_2$ の時間変化を完全に記述する. 見やすくするために,

$$t' = (\pi^2 + q^2)t, \quad (\text{C.28})$$

$$X = \frac{\pi q}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)} \psi_1, \quad (\text{C.29})$$

$$Y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)^3} \theta_1, \quad (\text{C.30})$$

$$Z = \frac{\pi q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} \theta_2 \quad (\text{C.31})$$

$$(\text{C.32})$$

とし, パラメタを,

$$r = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} Ra, \quad (\text{C.33})$$

$$b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2}, \quad (\text{C.34})$$

とおくとローレンツ方程式系,

$$\dot{X} = -\delta X + \delta Y, \quad (\text{C.35})$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \quad (\text{C.36})$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (\text{C.37})$$

を得る.

関連図書

- [1] M. Henon, 1976: A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. Commun. math. Phys., **50**, 69-77.
- [2] M. Henon, 1969: Numerical Study of Quadratic Area-preserving Mappings. Quarterly of Applied Mathematics, **27**, 291-312.
- [3] P. Berge, 1992: カオスの中の秩序, 産業図書株式会社, 281-291.
- [4] R. L. Devarney, 1997: カオス力学系の基礎, 株式会社ピアソン・エデュケーション.
- [5] S. H. Strogatz, 2015: 非線形ダイナミクスとカオス, 丸善出版株式会社.
- [6] 井上 政義, 秦 浩起, 1999: カオス科学の基礎と展開, 共立出版株式会社, 65-116.