

二次元乱流のエンストロフィー慣性領域に関する数値実験的研究

流体地球物理学教育研究分野 1453436s 藤林 凜

1. 研究対象

- 乱流は自然界でありふれた流れである
- 例: 地球大気, 太陽大気, 星間ガス...
- Kraichnan (1967) の予測
- 強制散逸二次元乱流では, 低波数側へエネルギーが輸送され, 高波数側へエンストロフィーが輸送される
- エネルギースペクトルの形は以下の通り:

$$E(k) = \begin{cases} \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, & k < k_f, \\ \beta \eta^{2/3} k^{-3}, & k_f < k. \end{cases}$$

$E(k)$: エネルギースペクトル
 k : 波数
 k_f : 強制波数
 ϵ : エネルギー散逸率
 η : エンストロフィー散逸率
 α, β : 無次元定数

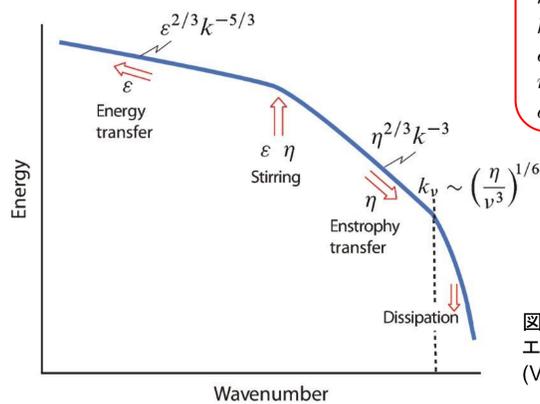


図1. 強制散逸二次元乱流におけるエネルギースペクトルの概念図 (Vallis, 2006)

- Lilly (1969) の実験
- 二次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式系を数値積分することで歴史的に初めて二次元乱流の数値シミュレーションを行った
- 数値実験結果では, 高波数側のエンストロフィー輸送について Kraichnan (1967) の予測に対する十分な検証ができなかった

2. 研究目的

- 本研究では, Lilly (1969) の再現実験を行い, さらにアンサンブル平均を用いた検証と散逸スケールの解析を行うことで強制散逸二次元乱流のエンストロフィー慣性領域について考察する

3. 数値モデル

- 支配方程式
- 渦度方程式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = \nu \nabla^2 \zeta + F$$

- 渦度と流線関数の関係式:

$$\zeta = \nabla^2 \psi$$

- 強制関数 F (強制波数 8 に固定):

$$F_{n+1} = R F_n + (1 - R)^{1/2} \sin(k_x x + k_y y + \theta_n)$$

- 計算領域: $2\pi \times 2\pi$ の正方形領域
- 解像度: 64×64
- 初期条件: $\zeta(x, t_0) = 0$
- 境界条件: 二重周期境界
- 数値計算法
- 時間積分: Adams-Bashforth 法
- 非線形項に対する差分: Arakawa-Jacobian 法
- Poisson 方程式の数値解法: Gauss-Seidel 法
- 積分時間: $t = 0$ から $t = 600$ まで計算

ζ : 渦度
 ψ : 流線関数
 \mathbf{u} : 水平速度
 ν : 粘性係数
 R : 無次元定数 (= 0.5)
 k_x, k_y : x, y 方向の波数
 θ_n : 乱数 ($0 \leq \theta_n < 2\pi$)

4. Lilly (1969) の再現実験結果

- 流線関数場と渦度場の時間発展

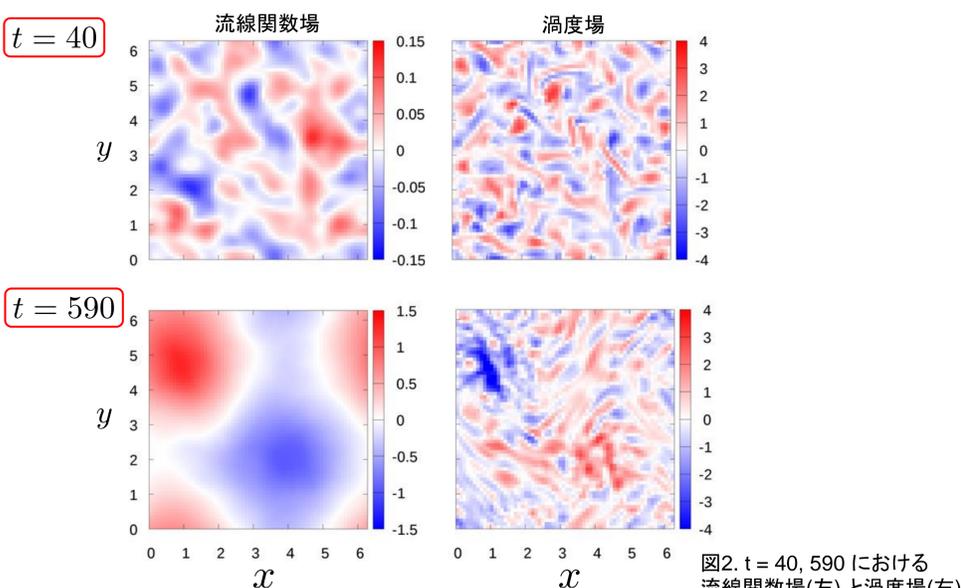


図2. $t = 40, 590$ における流線関数場(左)と渦度場(右)

- 時間とともに場が小さいスケールから大きなスケールへ発展すること (エネルギーアップワードカスケード) が確認できる

4. Lilly (1969) の再現実験結果 (つづき)

- エネルギースペクトルの時間発展

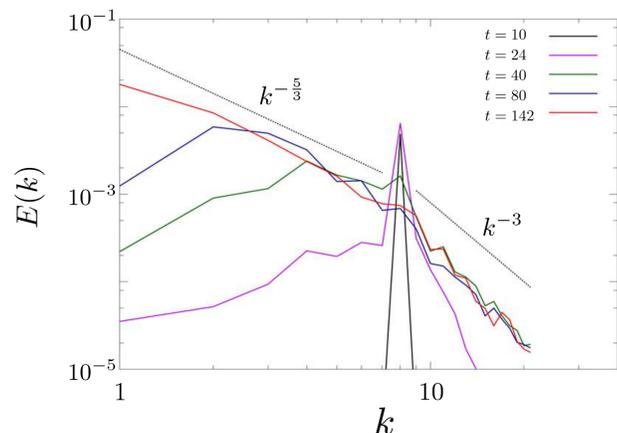


図3. Lilly (1969) の再現実験におけるエネルギースペクトルの時間発展

- 時間発展の初期段階において高波数側のエネルギースペクトルは, 統計的平衡状態に達する
- Lilly (1969) の数値実験結果と同様, エンストロフィー慣性領域内のエネルギースペクトルは Kraichnan (1967) の予測と一致しない

5. 議論

5.1. アンサンブル平均を用いた数値的検証

- Lilly (1969) の再現実験結果をアンサンブル平均することで統計的に信頼度の高い結果を示す
- 再現実験と同様の設定の下で強制関数内の乱数部分のみを変えた実験を計 16 回行い, その結果をアンサンブル平均する

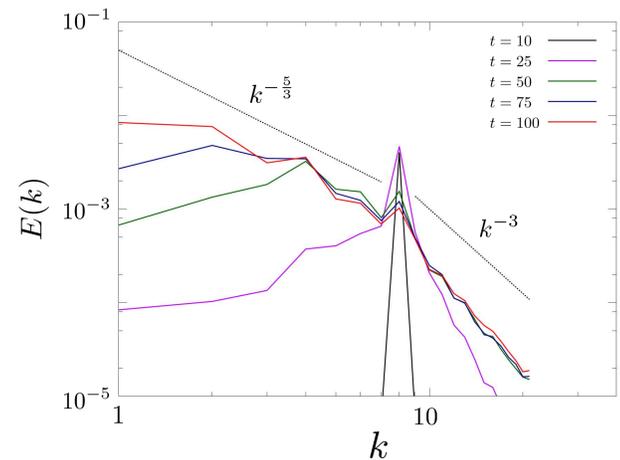


図4. アンサンブル平均を用いた結果におけるエネルギースペクトルの時間発展

- 図中のエンストロフィー慣性領域に着目すると, 図 4 と比べて各波数における揺らぎは見られなくなったが, そのエネルギースペクトルは Kraichnan (1967) の予測を満足しない

5.2. 散逸スケールの解析

- 次元解析から粘性波数を定義する:

$$k_\nu \equiv \nu^{-1/2} \eta^{1/6}$$

- Lilly (1969) の再現実験結果から粘性波数は 63 程度と見積もることができる
- 実験設定より最大波数を Nyquist 波数とする波数領域は, $1 \leq k \leq 32$ であることから, 再現実験結果では粘性散逸領域が表現できないことが確かめられる

6. まとめ

- 強制散逸二次元乱流の数値計算として Lilly (1969) の再現実験を行った
- Lilly (1969) の再現実験を計 16 回行い, その結果をアンサンブル平均することで統計的に信頼度の高い結果を示し, 解像度の妥当性について散逸スケールを算出した
- アンサンブル平均を行った検証からもまたエンストロフィー慣性領域におけるエネルギースペクトルが Kraichnan (1967) の予測とは一致せず, Lilly (1969) を支持する
- 粘性波数が 63 程度であることから粘性散逸領域を表現するためには, Lilly (1969) の実験設定では解像度が低いこと, 又は粘性係数が小さいことがわかった
- エンストロフィー慣性領域と粘性散逸領域の両方を解像するためには, 解像度 256×256 以上の数値シミュレーションを行う必要がある

7. 参考文献

- Kraichnan, R. H., 1967: Inertial ranges in two-dimensional turbulence, *Physics of Fluids*, **10**, 1417.
- Lilly, D. K., 1969: Numerical simulation of two-dimensional turbulence, *Physics of Fluids*, **12**, II-240.
- Vallis, G. K., 2006: Atmospheric and oceanic fluid dynamics, Cambridge University Press, 430 pp.