

二次元乱流のエンストロフィー慣性領域
に関する数値実験的研究

藤林 凜

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
流体地球物理学教育研究分野

2018/03/27

要旨

Lilly (1969) は, 二次元非圧縮性の Navier-Stokes 方程式系を直接数値積分することで強制散逸二次元乱流の構造に関して Kraichnan (1967) の予測に対する妥当性を検証した. 当時の計算機環境では高解像度の数値シミュレーションを行うことが困難だったため, 正方形の計算領域に対して格子点数を 64×64 とすることが限度であった. そのため, Lilly (1969) で得られた結果では, 強制波数よりも高波数側におけるエンストロフィー慣性領域の k^{-3} エネルギースペクトルを再現することができなかった. 本研究では, Lilly (1969) でなされた数値実験における解像度の妥当性に関して, 詳細に検討するとともに, 同一条件下で複数回の数値計算を実行した結果をアンサンブル平均することで統計的に信頼度の高い結果を示すことを目指す. Lilly (1969) の追試実験で得られた結果からはエンストロフィー慣性領域を解像することができないことが確かめられる. またアンサンブル平均を用いた検証結果は Lilly (1969) の結果を支持するものである.

目次

第1章	はじめに	4
第2章	乱流の基礎理論	6
2.1	支配方程式	6
2.2	二次元乱流の保存量	7
2.3	Kolmogorov 理論	10
2.4	Kraichnan の予測	12
第3章	数値モデル	15
3.1	強制関数	15
第4章	Lilly (1969) の再現実験結果	17
第5章	議論	23
5.1	アンサンブル平均を用いた数値的検証	23
5.2	散逸スケールの解析	23
第6章	追加実験の結果および考察	25
6.1	高解像度での数値実験	25
6.2	高レイノルズ数下での数値実験	25

第7章 結論	28
付録A 本文中の式変形の補足	29
1 式 (5.3) の導出	29
付録B 一様等方性乱流の相似則	31
1 三次元等方性乱流の相似則	31
2 二次元等方性乱流の相似則	32
付録C 数値計算の知識	34
1 Adams-Bashforth 法	34
2 Gauss-Seidel 法	35
付録D Lilly (1969) の訳文	38
1 要旨	38
2 序論	38
3 Kraichnan の仮説	39
4 数値モデル	41
5 数値実験結果	44
6 普遍定数と流れパラメータの計算	49
7 生成率中の不安定性	53
8 いくつかの地球物理学的解釈とその他の解釈	54
9 まとめ	56
10 謝辞	57
謝辞	58

第1章 はじめに

乱流は、自然界でありふれた流れである。例えば、地球大気の境界層における流れは乱れており乱流状態にあるといえる。積乱雲中の大気も乱流運動をしている。また、乱流は地球大気に限らず、太陽大気や星間ガスも乱流状態にあると言える。乱流の主な特徴としては以下の点が挙げられる：

- 空間的・時間的な変化に対する不規則性
- 無数の渦の重ね合わせによる大きな自由度と非線形性
- 系に注入されたエネルギーから熱への散逸性

Kraichnan (1967) は、ある波数 k_f において一定のエネルギー注入率によって駆動された二次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式系 (NS 系) の乱流状態において、強制波数 k_f を境目として低波数側では $k^{-5/3}$ に比例するエネルギースペクトルをもつ波数領域が形成され、そこではエネルギーが輸送されるがエンストロフィーは輸送されないこと、高波数側では k^{-3} に比例するエネルギースペクトルをもつ波数領域が形成され、そこではエンストロフィーが輸送されるがエネルギーは輸送されないことを示した。このときエネルギースペクトルは 図 1.1 に示される形となる。

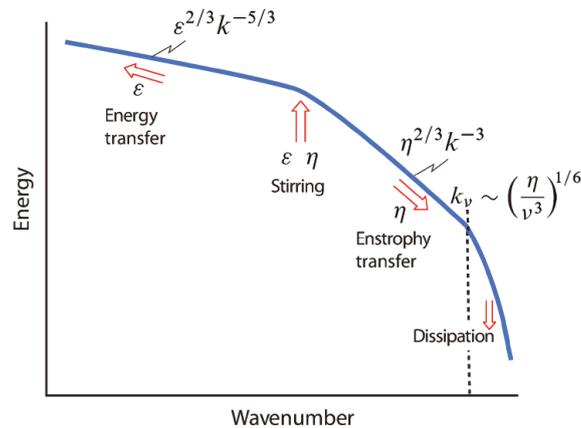


図 1.1: 二次元乱流におけるエネルギースペクトルの概念図 [2]

この Kraichnan の予測に対する妥当性を検証するために Lilly (1969) は二次元非圧縮性 NS 系を直接数値積分することで歴史的に初めて二次元乱流の数値シミュレーションを行った。その結果では、低波数側での $k^{-5/3}$ エネルギースペクトルは Kraichnan の予測と整合的であったが、高波数側での k^{-3} エネルギースペクトルに対しては Kraichnan の予測に対する妥当性を十分に検証することはできなかった。そこで、本研究では Lilly (1969) の追試実験を行うとともに高波数側のエネルギースペクトルに対してさらなる数値実験と解析を行う。

本論文の構成は以下の通り。第二章では二次元乱流を研究する上で重要な基本事項について述べる。第三章では本研究で扱った二次元乱流の数値モデルを解説する。第四章では本研究における基本実験となる Lilly (1969) の追試結果を見ていく。第五章では二次元乱流の数値シミュレーションに対する解析の手順とその結果を示す。第六章では本研究の結論を述べる。また、本論文を理解するための補足事項と Lilly (1969) の訳文を付録にまとめておく。

第2章 乱流の基礎理論

二次元乱流の研究を行うにあたり必要な基礎事項について解説する.

2.1 支配方程式

非圧縮性二次元流体の運動方程式は, 渦度 ζ と流線関数 ψ を用いて書き換えることができる. 今, 二次元非圧縮粘性 Navier-Stokes 方程式から始める:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

ここで, $\mathbf{u} = ui + vj$ は水平速度, ∇ は水平勾配演算子, ρ は密度, p は圧力, \mathbf{F} は強制関数である. ベクトル恒等式,

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla u^2 - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

を用いて, 式 (2.1) を変形すると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{2} \nabla u^2 + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2.3)$$

と書ける. ここで, $\boldsymbol{\omega} = \zeta \mathbf{k} = \nabla \times \mathbf{u}$ である. 次に, 水平勾配演算子を用いて (2.3) の回転をとると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

となる. 左辺第二項を展開することで,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

となり, 左辺第三項は非圧縮条件,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.6)$$

を用いることで消え, 以下の方程式が書ける:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{F}. \quad (2.7)$$

ここで, 順圧流れの場合, 等密度面と等圧面は平行であるから $\nabla \rho \times \nabla p = 0$ より式 (2.7) の右辺第一項は消え,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{F}. \quad (2.8)$$

また, 渦度の定義から二次元流れにおいて渦度は速度に対して垂直な成分しかもたないため, $k \cdot$ (2.8) を計算することで以下の形式の方程式が導かれる:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \zeta = \nu \nabla^2 \zeta + \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}), \quad (2.9)$$

式 (2.7), (2.8), (2.9) のような方程式を渦度方程式という. 本論文では上の形式で書かれた渦度方程式を数値積分することで二次元乱流の構造を考察する.

流線関数

非圧縮条件 (2.6) を用いることで, 流線関数 ψ を定義することができる:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.10)$$

したがって, 渦度 ζ の定義から

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi, \quad (2.11)$$

と, 渦度 ζ と流線関数 ψ は Poisson 方程式の形で関係づけられる. したがって, 渦度方程式 (2.9) はヤコビアンを用いることで以下のように流線関数 ψ のみで書き下すことができる:

$$\frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) = \nu \nabla^4 \psi + F. \quad (2.12)$$

2.2 二次元乱流の保存量

二次元乱流において, 非粘性の場合には適当な境界条件のもとでエネルギー E とエンストロフィー Q が保存する. ここでは渦度方程式から出発してこれらの保存量に対する保存則を導く.

2.2.1 エネルギー

式 (2.9) から強制なし非粘性渦度方程式はヤコビアンを用いて以下のように書ける:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = 0. \quad (2.13)$$

式 (2.13) の両辺に ψ を掛けると,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\zeta) - \zeta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi J(\psi, \zeta) = 0, \quad (2.14)$$

となる. ここで, 式 (2.14) の左辺第二項は,

$$\begin{aligned} \zeta \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot \left(\nabla \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \nabla \psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi \\ &= \nabla \cdot \left(\nabla \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \psi|^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

と変形できる. また, 式 (2.14) の左辺第三項はヤコビアンの性質より,

$$\begin{aligned} \psi J(\psi, \zeta) &= J\left(\frac{1}{2}\psi^2, \zeta\right) \\ &= \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{2}\psi^2 \nabla \zeta \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる. したがって, 式 (2.14) は以下のように書き直せる:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\zeta) - \nabla \cdot \left(\nabla \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla \psi|^2 + \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{2}\psi^2 \nabla \zeta \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z = 0. \quad (2.17)$$

ここで, 周期境界条件のもとで全空間で積分すると, 式 (2.17) の左辺第二項および第四項に相当する項は消えるため, エネルギー保存則が成り立つ:

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

ここで, エネルギー E は,

$$E \equiv \frac{1}{2S} \iint |\nabla \psi|^2 dx dy = - \iint \psi \zeta dx dy, \quad (2.19)$$

である. ここで, S は流れの領域面積である.

エネルギースペクトル

上で述べたようにエネルギー E はベクトル形式で以下のように書ける:

$$E = \frac{1}{2S} \iint |\mathbf{u}^2| dx \quad (2.20)$$

被積分関数をフーリエ変換することで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2S} \iint |\mathbf{u}^2| dx &= \frac{1}{2S} \iint dx \mathbf{u}(\mathbf{x}) \left[\iint \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \right] \\ &= \frac{1}{2S} \iint d\mathbf{k} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \left[\iint \mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) dx \right] \\ &= \frac{(2\pi)^2}{2S} \iint d\mathbf{k} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる. ここで,

$$E(\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^2}{2S} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}), \quad (2.22)$$

とすると,

$$E = \iint E(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (2.23)$$

と表せる. ここで $E(\mathbf{k})$ はエネルギースペクトルである.

2.2.2 エンストロフィー

エネルギーを導出した方法と同様, 式 (2.13) の両辺に ζ を掛けてヤコビアン
の性質を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \zeta^2 \right) &= -\zeta J(\psi, \zeta) \\ &= -J \left(\psi, \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \\ &= - \left\{ \nabla \times \left(\psi \nabla \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \right\} \cdot \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2.24)$$

と変形でき, 周期境界条件のもとで全空間で積分すると, 式 (2.24) の右辺の項に相当する項はゼロとなるから以下の保存則が成り立つ:

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.25)$$

Q はエンストロフィー という二次元の非粘性非圧縮性流体でのみ保存する量である:

$$Q = \frac{1}{2S} \iint \zeta^2 dx dy, \quad (2.26)$$

エンストロフィースペクトル

式 (2.22), (2.23) と同様に波数 \mathbf{k} に対するエンストロフィースペクトル $Q(\mathbf{k})$ を,

$$Q(\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^2}{2S} \hat{\zeta}(\mathbf{k}) \hat{\zeta}(-\mathbf{k}), \quad (2.27)$$

とすることで,

$$Q = \iint Q(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (2.28)$$

となる. 以下に示すように $E(\mathbf{k})$ と $Q(\mathbf{k})$ の間には重要な関係がある. 渦度 ζ の定義 $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ から渦度のフーリエ成分は,

$$\hat{\zeta}(\mathbf{k}) = i(k_x \hat{v}(\mathbf{k}) - k_y \hat{u}(\mathbf{k})), \quad (2.29)$$

と書ける. ここで, k_x と k_y は各方向の波数である. よって,

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(\mathbf{k}) \hat{\zeta}(-\mathbf{k}) &= [k_x \hat{v}(\mathbf{k}) - k_y \hat{u}(\mathbf{k})][k_x \hat{v}(-\mathbf{k}) - k_y \hat{u}(-\mathbf{k})] \\ &= (k_x^2 + k_y^2)[\hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}(-\mathbf{k}) + \hat{v}(\mathbf{k}) \hat{v}(-\mathbf{k})] \\ &\quad - [k_x \hat{u}(\mathbf{k}) + k_y \hat{v}(\mathbf{k})][k_x \hat{u}(-\mathbf{k}) + k_y \hat{v}(-\mathbf{k})] \\ &= |\mathbf{k}^2| \hat{u}(\mathbf{k}) \hat{u}(-\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

である. したがって, 以下のような関係があることがわかる:

$$Q(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}^2| E(\mathbf{k}). \quad (2.31)$$

2.3 Kolmogorov 理論

Kolmogorov (1941) は三次元の一様等方性乱流にはある統計則があることを提唱した. その統計則を Kolmogorov 則と呼ぶ. ここでは Kolmogorov の仮説とともにその理論を解説する.

流体を波数 k_f 近傍の狭い帯域に一定のエネルギー注入率 ϵ_L で強制することで統計的に定常な乱流運動を維持しているとする. このとき, エネルギーを保有している大きな渦は小さな渦へ分裂し (このとき同時にエネルギーは小さな渦へ輸送され), 渦のスケールが系の実現しうる最小のスケールに達すると最後に粘性が効くことで熱へエネルギーが散逸される. このように小さな波数から大きな波数への効率的なエネルギーの流れをエネルギーカスケードという (図 2.1 を見よ). 今考えているような乱流に対して Kolmogorov (1941) は以下のような仮説をたてた:

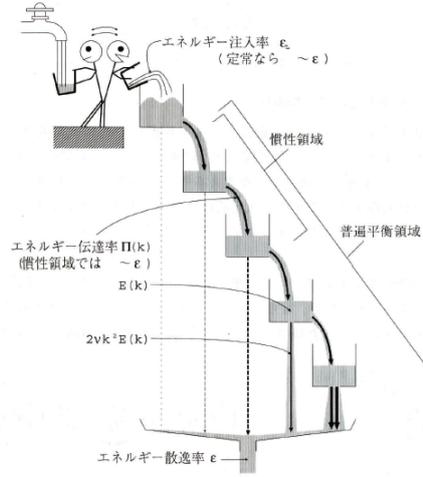


図 2.1: 一様等方性乱流におけるエネルギーカスケードの概念図 (伊賀, 2001) .

Kolmogorov の第一仮説 : 低波数領域においては統計的平衡状態になくとも, 高波数領域には一様・等方・定常で平衡を保つ波数領域が存在し, この平衡状態を決めるパラメータはエネルギー散逸率 ϵ と粘性係数 ν である.

強制波数 k_f より高波数側の領域が上で述べている平衡領域に相当する. この領域を普遍平衡領域 という. この第一仮説より, エネルギー散逸率 ϵ の次元 $[L^2T^{-3}]$ と粘性係数 ν の次元 $[L^2T^{-1}]$ を用いることで普遍平衡領域における特徴的な時間スケール t_d と特徴的な長さスケール l_d が決まる:

$$t_d = \nu^{\frac{1}{2}} \epsilon^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.32}$$

$$l_d = \nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}. \tag{2.33}$$

これらはそれぞれ Kolmogorov 時間, Kolmogorov 長さという. l_d の逆数 $k_d \equiv l_d^{-1}$ は Kolmogorov 波数と呼ばれる. これらを用いて普遍無次元関数 $F(x)$ を導入することでエネルギースペクトル $E(k)$ は,

$$E(k) = C\nu^{\frac{5}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}} F(k/k_d), \tag{2.34}$$

と表される^{*1}. ここで, C は任意の定数である.

Kolmogorov の第二仮説 : レイノルズ数^{*2} が十分に大きい場合, 普遍平衡領域の中には粘性がほとんど効かない領域が存在する.

^{*1}詳しい導出は付録を見よ

^{*2}式 (2.1) のような流体に対する運動量方程式において非線形項と粘性項の大きさの比を表す無次元量をレイノルズ数 Re という. 流体の運動に対する特徴的な長さスケール L と特徴的な速度

Kolmogorov 波数 k_d と同程度もしくはそれより高波数側では粘性による散逸を受けるため、普遍平衡領域の中でも Kolmogorov 波数より十分に小さい波数の領域が上で述べた第二仮説にある領域に相当する。このような領域を慣性領域もしくは慣性小領域という。この第二仮説より式 (2.34) からエネルギースペクトル $E(k)$ は、

$$E(k) = C' \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2.36)$$

で表される。したがって、慣性領域内ではエネルギースペクトルが波数 k の $-5/3$ 乗に比例するという相似則が成り立つ (図 2.2 を見よ)。これを Kolmogorov 則という。

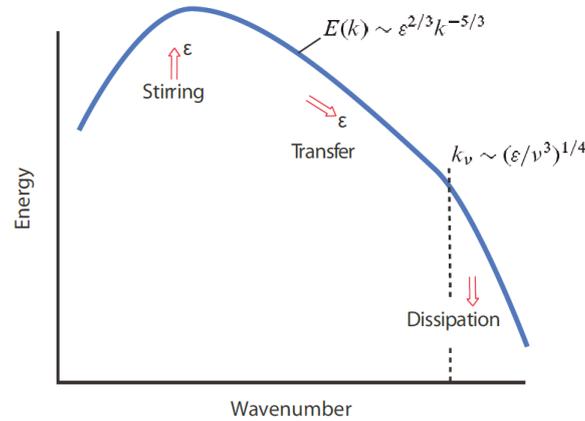


図 2.2: 三次元一様等方性乱流におけるエネルギースペクトルの概念図 (Vallis, 2006)。

2.4 Kraichnan の予測

前節で述べた Kolmogorov 則の妥当性はこれまでの室内実験や数値実験により明らかであるが、この統計則を導くための仮定は三次元流れに制限されないだろう。二次元の非粘性流れはエネルギーとエンストロフィーが保存するため、二次元流れのエネルギースペクトルに対する統計則を導く上で二種類の散逸、エネルギー散逸率 ϵ とエンストロフィー散逸率 η が重要である。Kraichnan (1967) は、二次元流れにおいて波数空間でエネルギーが輸送されるエネルギー慣性領域と、同様

スケール U を用いて、

$$R_e \equiv \frac{\text{非線形項}}{\text{粘性項}} \sim \frac{U \cdot U/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu}, \quad (2.35)$$

と表すことができる。

にエンストロフィーが輸送される新しい慣性領域 (以降, エンストロフィー慣性領域) が定義できると提唱した. エネルギー慣性領域ではエネルギースペクトルが $k^{-5/3}$ に比例することはよく知られている. 同様の次元解析を行うことでエンストロフィー慣性領域ではエネルギースペクトルが k^{-3} に比例することが導かれる. また, Kraichnan (1967) はエネルギー輸送とエンストロフィー輸送が相互に独立なものであることを証明した. つまり, $k^{-5/3}$ のエネルギー慣性領域ではスケールの大小にかかわらずエンストロフィーを輸送することはできず, 同様に k^{-3} のエンストロフィー慣性領域ではエネルギーを輸送することができない.

今, 流体を波数 k_f 近傍の狭い帯域に一定のエネルギー注入率 ϵ_L で系を強制することで, 流体中で絶えずエネルギーとエンストロフィーを注入しているという系を考える. 次元的考察より Kraichnan の予測に基づくエネルギースペクトルは以下の形をする^{*3}:

$$E(k) = \begin{cases} \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, & k_e < k < k_f, \\ \beta \eta^{2/3} k^{-3}, & k_f < k < k_d. \end{cases} \quad (2.37)$$

ここで, α と β は無次元定数, k_e と k_d はそれぞれ系における最小および最大波数である. この Kraichnan の予測に基づくエネルギースペクトルの時間発展が図 2.3 に示されている. 高波数側のスペクトルではエンストロフィーがより高い波数へ輸送されおり, この領域ではエネルギーは輸送されない. つまり, $k_f \ll k_d$ であればエネルギーは散逸されない. しかし, エネルギーは $k^{-5/3}$ で比例するエネルギースペクトル領域でより低波数側へ輸送される. つまり, 二次元流れでは小さなスケールから大きなスケールへエネルギーが輸送される. これをエネルギーアップワードカスケードもしくは逆カスケードという. ここで, 最小波数 k_e は時間とともに減少する量 (次元的考察より $k_e \propto \epsilon^{-1/2} t^{-3/2}$) である^{*4}.

^{*3}詳しい導出は付録 B を見よ.

^{*4}詳しい導出は付録 B を見よ.

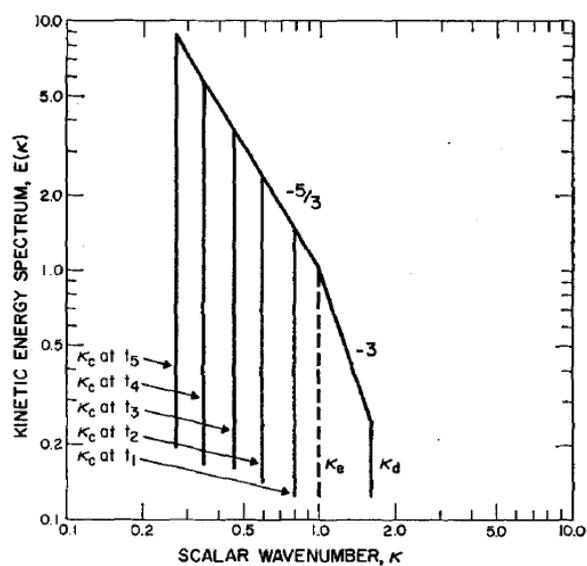


図 2.3: 強制散逸二次元乱流におけるエネルギースペクトルの時間発展の概念図 (Lilly, 1969) .

第3章 数値モデル

本研究の数値計算で取り扱われた方程式系は以下の通りである:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \zeta = \nu \nabla^2 \zeta + F, \quad (3.1)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi. \quad (3.2)$$

数値計算において時間差分には二次の Adams-Bashforth 法^{*1} を採用する. また, 式 (3.2) は Gauss-Seidel 法^{*2} を用いることで数値計算を行う. また, 式 (3.1) 中の非線形項に対しては Arakawa-Jacobian 法を採用した. この空間差分法により非線形項内で運動エネルギーとエントロフィーが保存される. 計算領域は $2\pi \times 2\pi$ の正方形領域とする. さらに境界条件には二重周期境界条件を課す. 渦度場と流線関数場はともにゼロから出発して, 次節で述べる強制関数を導入することで系を強制し場を発展させる.

数値計算による誤差の大部分は非線形相互作用における高波数成分のエイリアジング誤差によるものである. Arakawa-Jacobian 法によりエイリアジングが不安定性をもたらすことは少ないが, 格子間隔の四倍以下の波数においてはスペクトルが歪められることが考えられる. Lilly (1969) では計算領域に対して格子点数を 64×64 で数値計算を行った. このとき各方向に波数 32 までのフーリエ成分を与える. よって波数 16 以上の成分はエイリアジング誤差によってスペクトルの変形を受けることが考えられる.

3.1 強制関数

本研究の数値実験において強制関数の設定は重要と言える. Kraichnan は一定のエネルギー注入とエントロフィー注入を仮定したが, それを実現するためには ψ と F もしくは ζ と F の間に一定の共分散を与える必要があり, それらを数値

^{*1}付録 C を参照のこと.

^{*2}付録 C を参照のこと.

計算で実現することは非常に難しい。本実験では振幅は一定であるが、位相とフーリエ成分の構成を時間とともにランダムに変化させるような強制関数 F を定める。具体的には以下の強制関数 F を用いた:

$$F_{n+1} = RF_n + (1 - R^2)^{1/2} \sin(k_x x + k_y y + \theta). \quad (3.3)$$

ここで、 F の下付き文字は時間ステップ数を表す。また R は無次元の相関係数 ($0 \leq R \leq 1$) であり本実験では $R = 0.5$ に固定させて数値実験を行う。 θ には 0 から 2π の間の乱数を時間ステップによって変えて用意する。さらに dt ごとに強制波数 k_f に対して $k_f^2 = k_x^2 + k_y^2$ を満たす波数 k_x, k_y を入れることにより、時間によって位相とフーリエ成分の構成はランダムだが一定の振幅と波数をもつ強制関数 F を実現させる。

第4章 Lilly (1969) の再現実験結果

前章で述べた数値モデルを扱っていくつかの数値実験を行った。この章では, Lilly (1969) と同様の実験設定で行った数値実験 (以降, この実験を「基本実験」と呼ぶこととする) の結果を示す。詳細な実験設定としては, 強制波数 $k_f = 8$, 粘性係数 2.5×10^{-4} , $R = 0.5$ である。また時間刻み幅 $dt = 4.0 \times 10^{-2}$ で時刻 $t = 0$ から $t = 600$ まで数値積分を行った。

図 4.1 は基本実験において扱われた初期段階の強制関数の場である。3.1 節で扱った通り, 強制関数は時間とともに場の構造を変えるがこれは後の時刻での強制関数の典型例である。

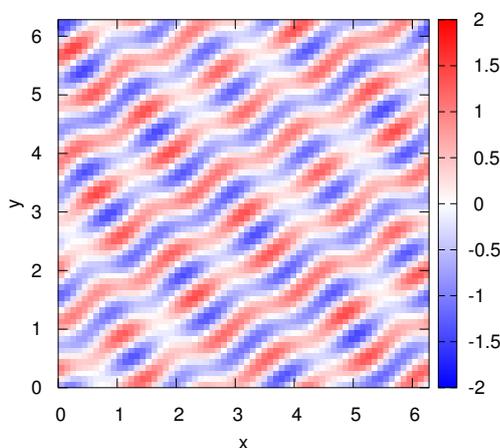


図 4.1: 基本実験における強制関数 F の典型例。

数値計算においてその初期段階では, わずかな粘性減衰を伴うが, 場は強制関数によって線形成長するため, 流線関数および渦度の場は単に時間とともに強制関数が足しあげられたものとよく似ている様子が見られる。 $t = 40$ 以降では, 波数空間において非線形項が支配的となり高速のエネルギー分散が始まる。図 4.2 に基本

実験における $t = 40$ での流線関数場と渦度場を示している。流線関数場と渦度場との間には負の相関があることが確認できる。また、流線関数場と比べて渦度場は明らかに小さな構造まで詳細に示されている。これは式 (3.2) からわかる通り渦度 ζ が二階の空間微分された量であるためである。後の時刻、 $t = 590$ における流線関数場と渦度場を図 4.3 に示している。この図からわかる通り高波数の渦度は低波数の流線関数のシア領域に伴い発展する。最終的に流線関数場は一組のセル対となる。流線関数場の向きがランダムであるために平均速度は生成されず、渦度場の向きがランダムであるために循環が生成されないが、このセル対はこの系で実現可能な最小波数のモードである。

図 4.4 には基本実験におけるエネルギー E とエンストロフィー Q の時間発展の様子を示している。数値計算において dt 毎に系を強制しているためにエネルギーは常に増加していることがわかる。一方で $t = 30$ 以降ではエンストロフィーが振動しながらも一定の値に近づいていることが確認できる。これはエンストロフィーは強制波数よりも高波数側へ選択的に輸送され、粘性による散逸を受けるためである。図 4.5 にエネルギー E とエンストロフィー Q の比を示している。式 (2.31) よりエネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルの比をとることで波数の自乗 k^2 を求められることがわかるが、ここではエンストロフィーをエネルギーで割ることで特性波数の自乗の値を見積もった。図よりこの比は初期段階においては指数関数的に減少し一定値に近づくことがわかる。この結果からも系におけるエネルギーアップワードカスケードしていることが確認できる。

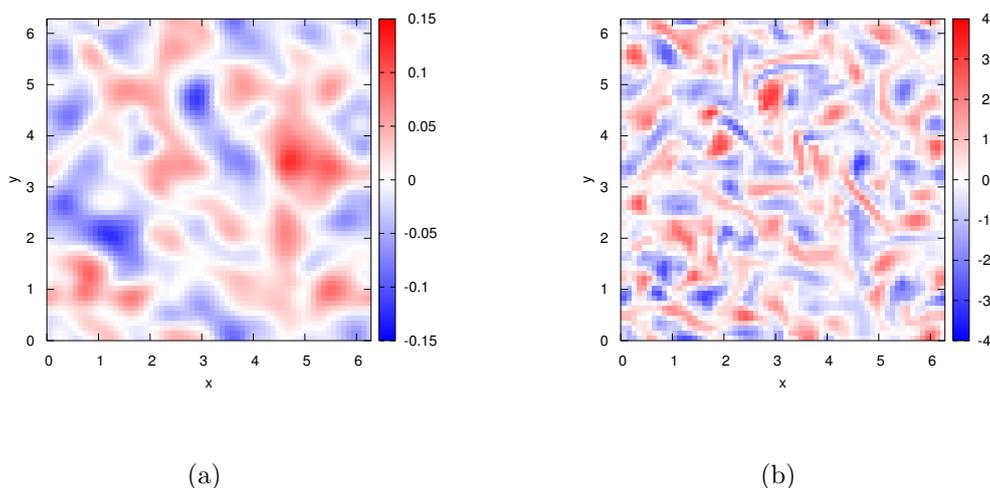


図 4.2: 基本実験における $t = 40$ での流線関数 (a) と渦度 (b) .

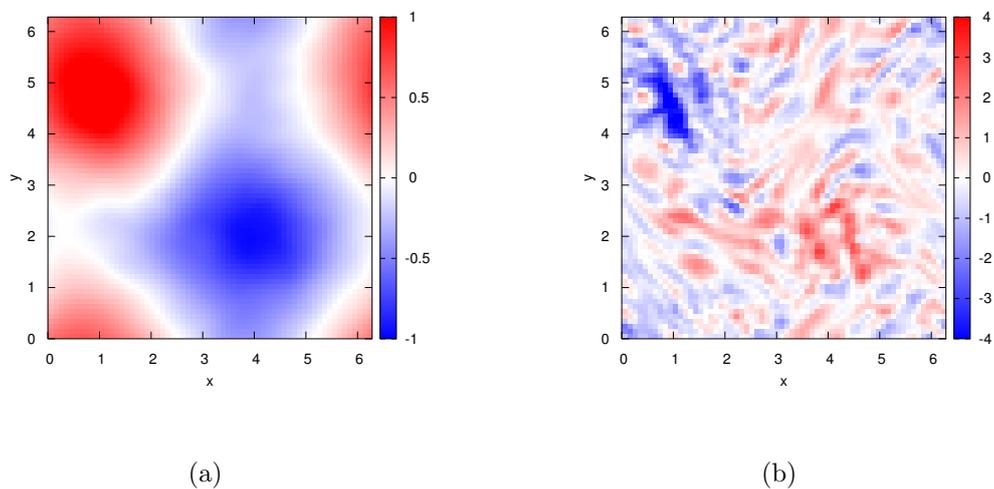


図 4.3: 基本実験における $t = 590$ における流れ関数 (a) と渦度 (b) .

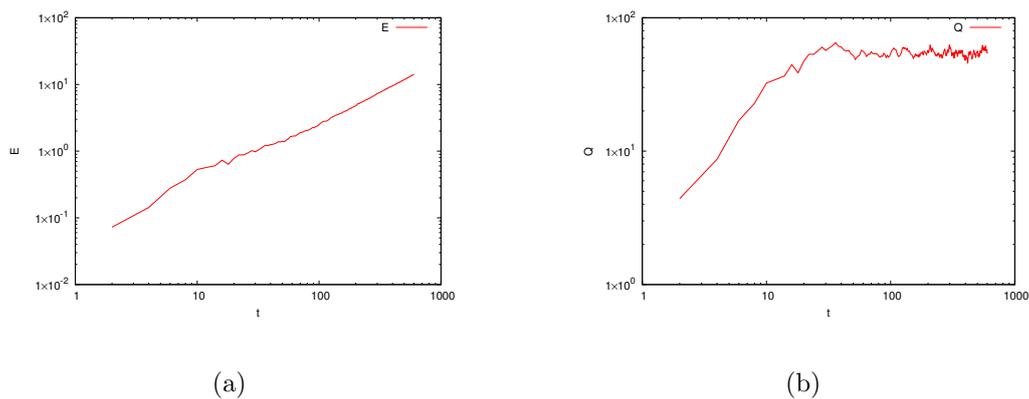


図 4.4: 基本実験におけるエネルギー E (a) とエンストロフィー Q (b) の時間発展の様子. 横軸には基本実験における時刻を示してある.

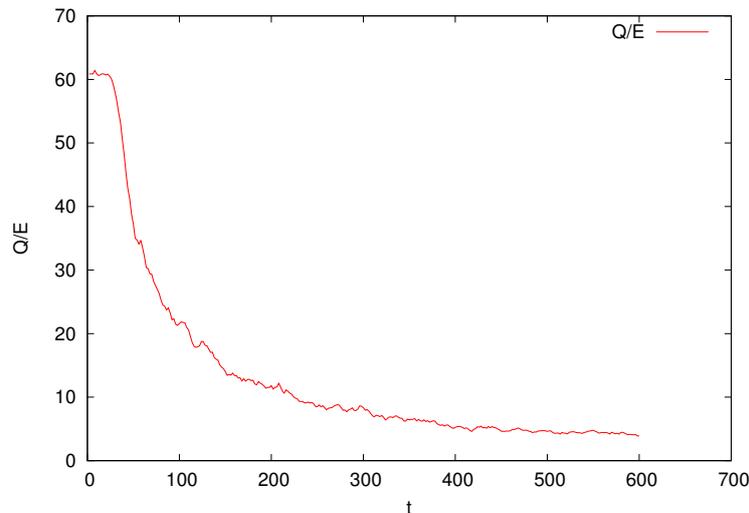


図 4.5: 基本実験におけるエネルギーとエンストロフィーの比.

図 4.6 に基本実験におけるエネルギースペクトルの時間発展を示している. これは二次元波数空間の円上にある波数 k ($= \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$) による寄与を足しあげられることで得られる. 初期時刻付近 $t = 10$ ではまだ強制関数のみが支配的であるために強制波数 $k_f = 8$ に強いピークがあることがわかる. また, 強制波数より高波数側のエンストロフィー慣性領域は $t = 24$ ですでに統計的平衡状態に達していることがわかるが, 一方で強制波数よりも低波数側のエネルギー慣性領域では時々刻々とエネルギーが集積し $t = 142$ において最小波数のスペクトルが立ち上がることを確認できる. また図には Kraichnan の予測に基づく対数則の線を破線で重ねてある. 低波数側におけるエネルギー慣性領域内での $k^{-5/3}$ エネルギースペクトルに関しては $t = 142$ におけるエネルギースペクトルから予測と一致する結果が確認できる. 一方で高波数側におけるエンストロフィー慣性領域内での k^{-3} エネルギースペクトルに関しては少し急な傾きが見られる. これは最小波数まで発展した時刻においてスペクトルが歪められることが原因と考えられるが十分な確証はない.

図 4.7 は波数 4, 8 そして 12 の成分のエネルギーの時間発展を表している. 波数 8 のモードは初期にオーバーシュートした後でゆっくり減衰振動をしながら準平衡状態へ近づく様子が確認できる. 波数 4 のモードではこれに似た特徴を示すが波数 8 のモードと比べて後の時刻で極値をもつことがわかる. 波数 12 のモードは早く平衡状態に達するが, 他のモードとの非線形相互作用により平衡状態付近でわずかに振動している.

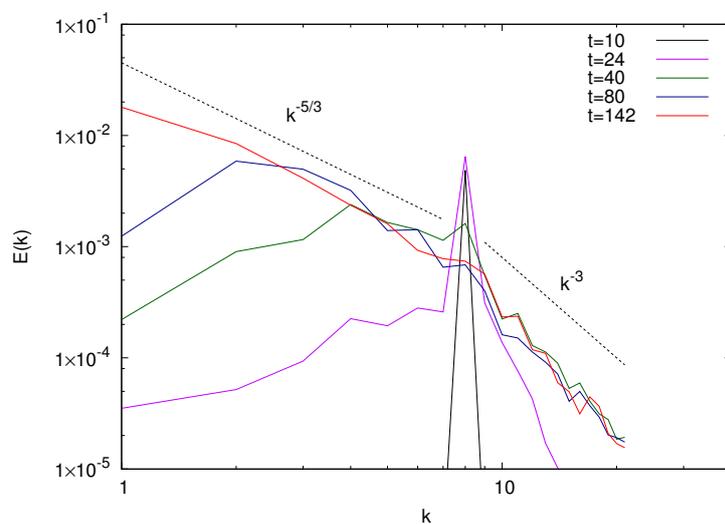


図 4.6: 基本実験におけるエネルギースペクトルの時間発展の様子. $t = 10, 24, 40, 80, 142$ におけるエネルギースペクトルを重ねてある.

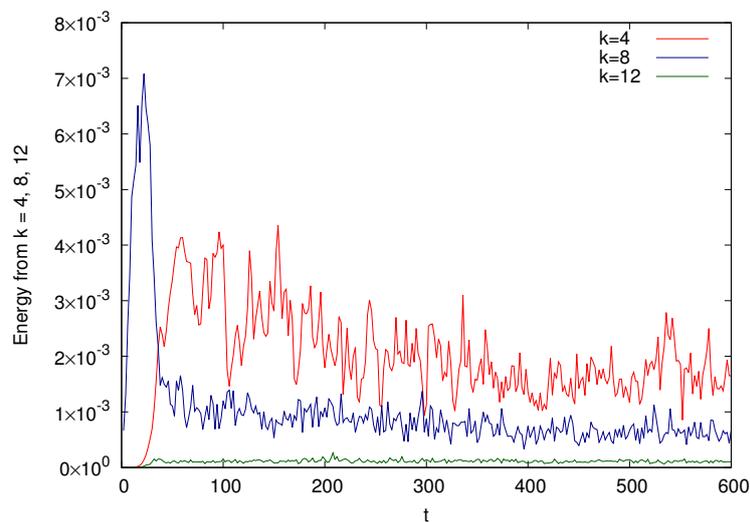


図 4.7: 基本実験における波数 4, 8, 12 から全エネルギーへの寄与. 横軸には基本実験における時刻を示してある.

Lilly (1969) の再現実験の結果を示してきたが, 図 4.6 にあるようにエンストロフィー慣性領域内のスペクトルの傾きは Kraichnan の予測とは一致しない. このことについて 5 章以降で述べる.

第5章 議論

5.1 アンサンブル平均を用いた数値的検証

Lilly (1969) で示されるエネルギースペクトルは各実験設定に対して一回実行された結果が示されていた. ここでは同一条件下で複数回実行した数値実験結果をアンサンブル平均することによって統計的に信頼度の高い結果を示す. 具体的な実験設定は, 強制波数 $k_f = 8$, 粘性係数 2.5×10^{-4} , $R = 0.5$, 時間刻み幅 $dt = 4.0 \times 10^{-2}$ で時刻 $t = 0$ から $t = 100$ である. この設定は前章で示した実験と概ね同じである. この実験設定のもとで強制関数 F 中の乱数部分のみを変えた実験を計 16 回行いアンサンブル平均をとった. 図 5.1 には得られた結果の中でエネルギースペクトルの時間発展を示している.

図中のエンストロフィー慣性領域に着目すると, 図 4.6 と比較して各波数における揺らぎが見られなくなかったが, k^{-3} エネルギースペクトルよりは急な傾きが表示される結果である. これは Lilly (1969) で示された結果を支持する.

5.2 散逸スケールの解析

図 1.1 にあるとおり Kraichnan は強制散逸二次元乱流に対するエネルギースペクトルでは高波数側で粘性による散逸があることを予測している. しかし, 図 4.6 で示したエネルギースペクトルでは粘性による散逸が見られなかった. ここでは, その原因について考えていく.

次元的考察から強制波数より高波数側の平衡領域でのエネルギースペクトルは,

$$E(k) = D\nu^{\frac{3}{2}}\eta^{\frac{1}{6}}G(\nu^{\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{6}}k), \quad (5.1)$$

と表せる^{*1}. ここで, D は任意の定数, $G(x)$ は普遍無次元関数である. よって, 粘

^{*1}詳しい導出は付録 B を見よ.

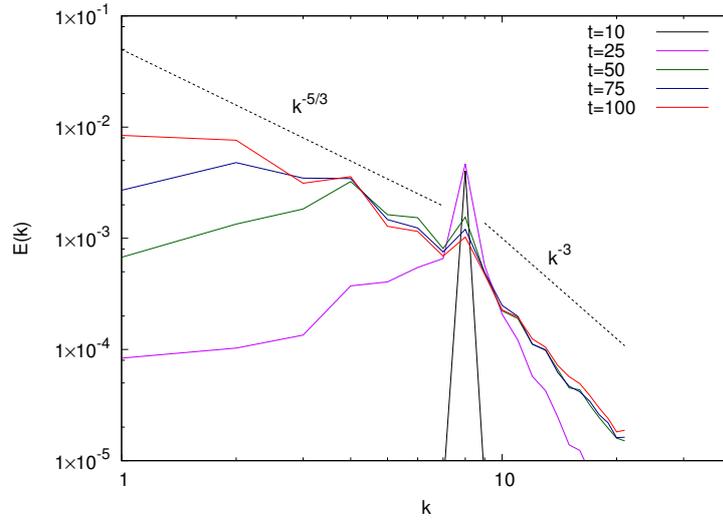


図 5.1: アンサンブル平均したエネルギースペクトルの時間発展. $t = 10, 25, 50, 75, 100$ におけるエネルギースペクトルを重ねてある.

性波数 k_ν を定義できる:

$$k_\nu \equiv \nu^{-\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{6}} . \tag{5.2}$$

また, エンストロフィー散逸率 η は波数 k とエネルギースペクトル $E(k)$ を用いて,

$$\eta = -2\nu \int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk , \tag{5.3}$$

と表される^{*2}. これを用いて基本実験における粘性波数を求めると $k_\nu \sim 63$ となる. 基本実験では正方形の計算領域に対して格子点を各方向に 64 点とっているため切断波数 $k_T = 21$ である. $k_T < k_\nu$ より基本実験におけるエネルギースペクトルでは粘性による散逸が確認できないことがわかる. また, 計算領域を各方向に 256 点 (このとき $k_T = 85$) とって数値実験を行うことでエネルギースペクトルの高波数側で粘性散逸が確認できることが期待される.

^{*2}導出は付録 A を見よ.

第6章 追加実験の結果および考察

前章の議論から Lilly (1969) の実験設定に関する問題点として, エンストロフィー慣性領域と粘性散逸領域の両方を表現するためには, 解像度が低いことが挙げられる. そこで, 本章ではこの点を解消するために試行した二つの実験結果とその考察を述べる.

6.1 高解像度での数値実験

エネルギースペクトル中の粘性散逸領域を解像するために Lilly (1969) の実験設定よりも高解像度で数値シミュレーションを行った. 具体的には, 5.2 節で求めた粘性波数を固定 (つまり, 粘性係数 $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$ を固定) させたまま, 解像度 N を $N = 128$ (切断波数 $k_T = 42$) と $N = 256$ (切断波数 $k_T = 85$) とした実験を行った. また, 高波数スペクトル領域を広げるために強制波数 $k_f = 4$ とした. 図 6.1 には各実験の時刻 $t = 142$ におけるエネルギースペクトルを示している.

この図から, 解像度 $N = 256$ でのエネルギースペクトルには 5.2 節で算出した粘性波数 $k_\nu = 63$ よりも高波数側でスペクトルの傾きが非常に急である領域が現れることが確認できる. しかしながら, エンストロフィー慣性領域内のスペクトルの傾きは k^{-3} というよりもむしろ k^{-4} に比例しているように見える. このような結果となった原因としては粘性が大きいにもかかわらず慣性領域の範囲が狭いために慣性領域内のスペクトルを歪めていることが考えられる.

6.2 高レイノルズ数下での数値実験

前節から Lilly (1969) の再現実験で用いられた粘性係数が大きいことが考えられたため, より高レイノルズ数下での流体運動をシミュレーションする必要がある. そこで, 粘性係数を $\nu = 1.6 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-6}$ とした実験を行った. ここで, 解像

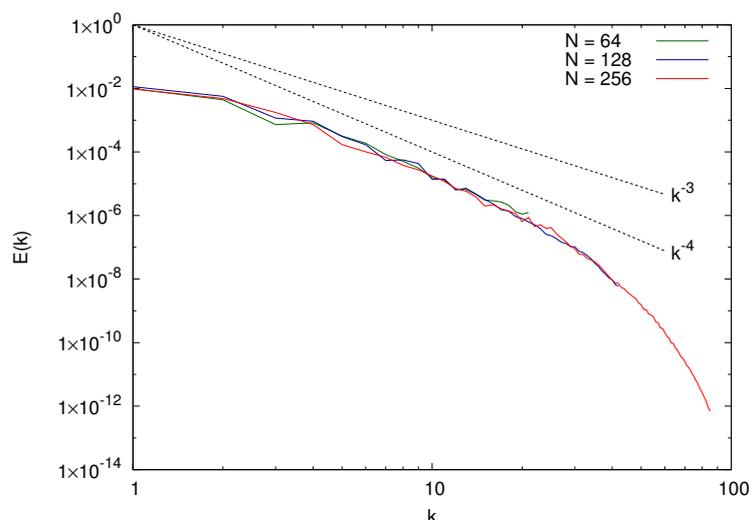


図 6.1: $t = 142$ における解像度 $N = 64, 128, 256$ に対するエネルギースペクトル.

度 $N = 256$, 強制波数 $k_f = 4$ としてある. これらの設定のもとでおこなった実験での時刻 $t = 142$ におけるエネルギースペクトルが図 6.2 に示してある.

この図から, 粘性係数が小さくなるにつれてエンストロフィー慣性領域内のスペクトルの傾きは緩やかになり k^{-3} に近づくように見える. 粘性係数 $\nu = 2.5 \times 10^{-6}$ の実験による高波数のスペクトルは k^{-3} よりも緩やかであるように思えるが, これは粘性散逸領域が表現できていないために高波数にエネルギーが集積してしまったためであると考えられる.

これらの結果から二次元乱流の数値シミュレーションを行うにあたりエンストロフィー慣性領域内のスペクトルを正確に得るためには, 高レイノルズ数下でエンストロフィー慣性領域内の波数領域を広くする必要があることがわかる.

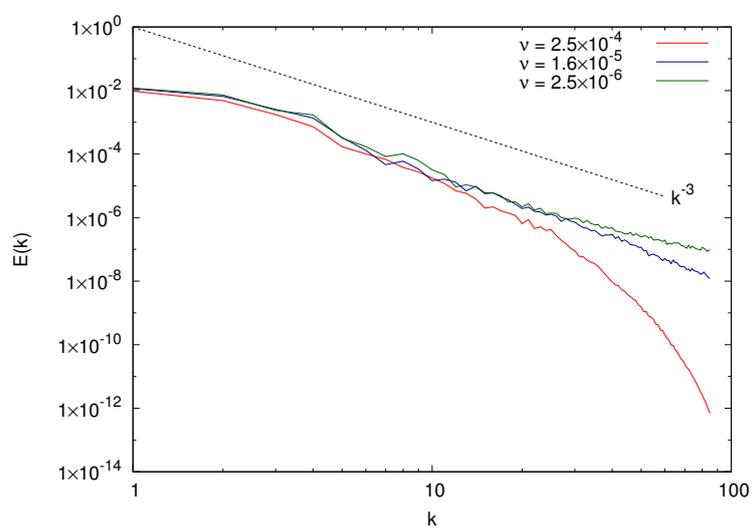


図 6.2: 粘性係数を $\nu = 2.5 \times 10^{-4}, 1.6 \times 10^{-5}, 2.5 \times 10^{-6}$ と変えた実験での $t = 142$ におけるエネルギースペクトル.

第7章 結論

Lilly (1969) は強制散逸二次元乱流の構造に関して Kraichnan (1967) の予測に対する妥当性の検証を試みたが, 強制波数よりも高波数側におけるエントロフィー慣性領域の k^{-3} エネルギースペクトルを再現することができなかった. そこで, Lilly (1969) でなされた数値実験における解像度の妥当性に関して, より詳細に検討するとともに, 同一条件下で複数回の数値計算を実行した結果をアンサンブル平均することで統計的に信頼度の高い結果を示した. 粘性波数 $k_\nu \sim 63$ と Lilly (1969) で行った数値シミュレーションではエネルギースペクトルの高波数スペクトルにおいて粘性散逸が確認できないことが確かめられた.

付録 A 本文中の式変形の補足

1 式 (5.3) の導出

エンストロフィー散逸率 η ,

$$\eta \equiv -\frac{dQ}{dt}, \quad (\text{A.1})$$

の表式を得る. 今, エンストロフィー Q は非線形相互作用を受けないことから以下の形式の渦度方程式から始める:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta. \quad (\text{A.2})$$

式 (A.2) の両辺に ζ を掛けて全領域で積分すると,

$$\iint \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} dx dy = \iint \nu \zeta \nabla^2 \zeta dx dy, \quad (\text{A.3})$$

となる. これは式変形することで,

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \iint \zeta^2 dx dy = - \iint \nu |\nabla \zeta|^2 dx dy, \quad (\text{A.4})$$

である. 式 (A.4) の両辺を全領域面積 $\iint dx dy$ で割ると左辺は $-\eta$ となるから,

$$\eta = -\frac{\iint \nu |\nabla \zeta|^2 dx dy}{\iint dx dy} \quad (\text{A.5})$$

と書ける. ここで, 渦度 ζ と流線関数 ψ は Fourier 級数を用いて,

$$\zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.6})$$

と表せる. ここで, $\hat{\zeta}, \hat{\psi}$ は Fourier 係数である. また, 本文中の式 (2.11) から各 Fourier 係数は以下の関係式を満たす:

$$\hat{\zeta}(\mathbf{k}) = k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}). \quad (\text{A.7})$$

式 (A.6) から,

$$|(\nabla\zeta)^2| = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'| \hat{\zeta}(\mathbf{k}) \hat{\zeta}^*(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.8})$$

と書ける. 上式を全領域で積分すると,

$$\begin{aligned} \iint |(\nabla\zeta)^2| dx dy &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'| \hat{\zeta}(\mathbf{k}) \hat{\zeta}^*(\mathbf{k}') \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \iint dx dy \\ &= k^2 \hat{\zeta}^2(\mathbf{k}) \iint dx dy, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる. ここで, δ はクロネッカーのデルタである. 式 (A.7) を用いて,

$$\iint |(\nabla\zeta)^2| dx dy = k^4 \hat{\psi}(\mathbf{k}) \hat{\zeta}(\mathbf{k}) \iint dx dy, \quad (\text{A.10})$$

と変形できる. したがって, エンストロフィー散逸率 η は,

$$\eta \equiv -\frac{dQ}{dt} = -2\nu \sum_{\mathbf{k}} k^4 E(k) \quad (\text{A.11})$$

と表される.

付録B 一様等方性乱流の相似則

1 三次元等方性乱流の相似則

はじめに, 次元的考察から三次元等方性乱流における平衡領域でのエネルギースペクトルを導出する. 今, エネルギースペクトル $E(k)$ を,

$$E(k) = C\nu^\alpha \epsilon^\beta F(\nu^\gamma \epsilon^\delta k), \quad (\text{B.1})$$

とおく. ここで, ν は粘性係数, ϵ はエネルギー散逸率, k は波数, $F(x)$ は普遍無次元関数であり, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ次元数を表す. C は定数であり, 次元をもつ数であるかは実験によって決まる. 各パラメータの次元はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \nu &: [L^2 T^{-1}] \\ \epsilon &: [L^2 T^{-3}] \\ k &: [L^{-1}] \\ E(k) &: [L^3 T^{-2}], \end{aligned}$$

であるから, (B.1) において次元解析を行うと以下の結果が得られる:

$$E(k) = C\nu^{\frac{5}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}} F(\nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}} k). \quad (\text{B.2})$$

これが平衡領域でのエネルギースペクトルである. 次に三次元等方性乱流におけるエネルギー慣性領域^{*1}でのエネルギースペクトルを導出する. ここでは, $F(x) = x^\kappa$ と仮定する. この仮定のもとで次元解析を行うと, (B.2) より, $\kappa = -\frac{5}{3}$ と決まる. したがって, エネルギー慣性領域でのエネルギースペクトルは,

$$E(k) = C\epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (\text{B.3})$$

とわかる.

^{*1}平衡領域の中でも粘性による散逸を受けないような領域を慣性領域という.

2 二次元等方性乱流の相似則

ここでは、二次元等方性乱流の相似則を導く。まず、低波数側のスペクトルについて考察する。二次元等方性乱流において低波数側でのエネルギー・スペクトルは、エネルギー・散逸率 ϵ 、時間 t による関数であるという仮定のもとで次元解析を行う。エネルギー・スペクトル $E(k)$ を、

$$E(k) = D\epsilon^\alpha t^\beta G(\epsilon^\gamma t^\delta k), \quad (\text{B.4})$$

とおく。ここで、 k は波数、 $G(x)$ は普遍無次元関数であり、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ次元数を表す。 D は無次元の定数である。各パラメータの次元はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \epsilon &: [L^2 T^{-3}] \\ t &: [T^1] \\ k &: [L^{-1}] \\ E(k) &: [L^3 T^{-2}], \end{aligned}$$

であるから、(B.4) において次元解析を行うと以下の結果が得られる:

$$E(k) = D\epsilon^{\frac{3}{2}} t^{\frac{5}{2}} G(\epsilon^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} k). \quad (\text{B.5})$$

これが平衡領域でのエネルギー・スペクトルである。上式より $k \propto \epsilon^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}}$ とわかり、確かに波数は時間とともに低波数側へ移動することがわかる。つづいて二次元等方性乱流におけるエネルギー・慣性領域でのエネルギー・スペクトルを導出する。ここでは、 $G(x) = x^\kappa$ と仮定する。エネルギー・慣性領域ではエネルギー・スペクトルが時間 t によらないという考察のもとで次元解析を行うと、(B.5) より、 $\kappa = -\frac{5}{3}$ と決まる。したがって、エネルギー・慣性領域でのエネルギー・スペクトルは、

$$E(k) = D\epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (\text{B.6})$$

とわかる。

次に高波数スペクトルを導く。高波数側ではエネルギー・スペクトルが粘性係数 ν 、エンストロフィー・散逸率 η によるという仮定から二次元等方性乱流における平衡領域でのエネルギー・スペクトルを導出する。エネルギー・スペクトル $E(k)$ を、

$$E(k) = D'\nu^{\alpha'} \eta^{\beta'} G'(\nu^{\gamma'} \eta^{\delta'} k), \quad (\text{B.7})$$

とおく。ここで、 $G'(x)$ は普遍無次元関数であり、 $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ はそれぞれ次元数を表す。 D' は無次元の定数である。各パラメータの次元はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \nu &: [L^2 T^{-1}] \\ \eta &: [T^{-3}], \end{aligned}$$

であるから, (B.7) において次元解析を行うと以下の結果が得られる:

$$E(k) = D' \nu^{\frac{3}{2}} \eta^{\frac{1}{6}} G'(\nu^{\frac{1}{2}} \eta^{-\frac{1}{6}} k). \quad (\text{B.8})$$

これが平衡領域でのエネルギースペクトルである. 次に二次元等方性乱流におけるエンストロフィー慣性領域でのエネルギースペクトルを導出する. ここでは, $G'(x) = x^{\kappa'}$ と仮定する. この仮定のもとで次元解析を行うと, (B.8) より, $\kappa' = -3$ と決まる. したがって, エンストロフィー慣性領域でのエネルギースペクトルは,

$$E(k) = D' \eta^{\frac{2}{3}} k^{-3}, \quad (\text{B.9})$$

とわかる.

付 録 C 数値計算の知識

1 Adams-Bashforth 法

ここでは二次精度の Adams-Bashforth 法を導出とともに紹介する. 今, 一階の常微分方程式,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (\text{C.1})$$

を初期条件,

$$x(t_0) = x_0, \quad (\text{C.2})$$

のもとで数値的に解く. ここで, f は一般的な関数である. 数値計算において時刻 t を時間刻み幅 Δt によって以下のように離散化して扱う:

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{C.3})$$

ここで, 下付き文字 k は時間ステップ数を表す. 時刻 $t = t_k$ における数値解を $x(t_k)$ とすると $t = t_k$ における数値解は, Taylor 展開し三次以上の項を無視すると,

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= x(t_k + \Delta t) \\ &= x(t_k) + \frac{dx(t_k)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2x(t_k)}{dt^2}\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= x(t_k) + f(x(t_k), t_k)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{df(x(t_k), t_k)}{dt}\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\approx x_k + f(x_k, t_k)\Delta t + \frac{1}{2}\frac{f(x_k, t_k) - f(x_{k-1}, t_{k-1})}{\Delta t}\Delta t^2 \\ &= x_k + \left(\frac{3}{2}f(x_k, t_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1}, t_{k-1})\right)\Delta t, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

ここで, $x(t_k)$ の値を x_k と表した. また f の時間微分は後方差分を用いることで差分化した. 上のように微分方程式を数値的に解く方法を Adams-Bashforth 法という.

2 Gauss-Seidel 法

連立一次方程式の数値解法には、直接法と反復法がある。ここでは、反復法の一つである Gauss-Seidel 法を紹介する。反復法とは、未知数に対して適当な初期値を仮定し、必要な精度に到達するまで繰り返し計算することで解を求める方法である。

実際に Gauss-Seidel 法を用いた連立一次方程式の数値解法の手順を示す。以下のような連立一次方程式を考える：

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} . \quad (\text{C.5})$$

ここで、 A は n 次正方行列であり、 X, C は n 次ベクトルである。Gauss-Seidel 法では (C.5) を以下のように書き換えて解いていく：

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= (c_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k)/a_{11} \\ x_2^{k+1} &= (c_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k)/a_{22} \\ &\dots\dots \\ x_i^{k+1} &= (c_i - a_{i1}x_1^{k+1} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{k+1} \\ &\quad - a_{i,i+1}x_{i+1}^k - \cdots - a_{in}x_n^k)/a_{ii} \\ &\dots\dots \\ x_n^{k+1} &= (c_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1})/a_{nn} . \end{aligned}$$

ここで、 $k(\geq 1)$ は反復回数を表す。 $(k+1)$ 回目の計算において絶対誤差、

$$\epsilon_i = |x_i^{k+1} - x_i^k|, i = 1, \dots, n, \quad (\text{C.6})$$

の最大値が、予め設定しておいた許容誤差 ϵ_s を下回った時、つまり、

$$\max\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_n\} \leq \epsilon_s, \quad (\text{C.7})$$

を満たした時、反復終了とする。したがって、Gauss-Seidel 法の公式は以下の通り：

$$x_i^{k+1} = \left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) / a_{ii}$$

Gauss-Seidel 法では常に最新の x_i の値を計算に使うことで収束が早いことが予想される。以降、例題を扱うことで Gauss-Seidel 法を理解していく。

例題

以下の連立一次元方程式を Gauss-Seidel 法を用いて解く:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 28 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 76 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

今, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$ から始めることとする. また, 許容誤差 $\epsilon_s = 1.0\%$ とする.

解答

まず 1 ステップ目:

$$x_1 = \frac{1 - 3x_2 + 5x_3}{12} = \frac{1 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1}{12} = 0.5 \quad (\text{C.2})$$

$$x_2 = \frac{28 - x_1 - 3x_3}{5} = \frac{28 - 0.5 - 3 \cdot 1}{5} = 4.9 \quad (\text{C.3})$$

$$x_3 = \frac{76 - 3x_1 - 7x_2}{13} = \frac{76 - 3 \cdot 0.5 - 7 \cdot 4.9}{13} = 3.0923 \quad (\text{C.4})$$

相対誤差は以下の通り.

$$|\epsilon_r^1| = \left| \frac{0.5 - 1}{0.5} \right| \times 100 = 100\% \quad (\text{C.5})$$

$$|\epsilon_r^2| = \left| \frac{4.9 - 0}{4.9} \right| \times 100 = 100\% \quad (\text{C.6})$$

$$|\epsilon_r^3| = \left| \frac{3.0923 - 1}{3.0923} \right| \times 100 = 67.662\% \quad (\text{C.7})$$

ここで, 誤差の最大値は,

$$\max\{100, 100, 67.662\} = 100\%, \quad (\text{C.8})$$

である. 許容誤差を下回っていないため, 次のステップへ進む.

2 ステップ目:

$$x_1 = \frac{1 - 3 \cdot 4.9 + 5 \cdot 3.0923}{12} = 0.14679 \quad (\text{C.9})$$

$$x_2 = \frac{28 - 0.14679 - 3 \cdot 3.0923}{5} = 3.7153 \quad (\text{C.10})$$

$$x_3 = \frac{76 - 3 \cdot 0.14679 - 7 \cdot 3.7153}{13} = 3.8118 \quad (\text{C.11})$$

相対誤差も同様に計算すると,

$$|\epsilon_r^1| = 240.61\% \quad (\text{C.12})$$

$$|\epsilon_r^2| = 31.889\% \quad (\text{C.13})$$

$$|\epsilon_r^3| = 18.894\% \quad (\text{C.14})$$

となり, その最大値は,

$$\max\{240.61, 31.889, 18.894\} = 240.61\% , \quad (\text{C.15})$$

である. これも許容誤差を下回っていないため, 次のステップへ進む. 以降, 反復計算を行うと以下の表のような結果が得られる:

表 3.1: (C.1) の反復計算結果

ステップ数	$\max \epsilon_r (\%)$
1	100
2	240.6
3	80.23
\vdots	\vdots
6	0.743

上の表より 6 ステップ目で許容誤差を下回ることがわかる. 6 ステップ終了後の解は,

$$(x_1, x_2, x_3) = (0.99919, 3.0001, 4.0001) ,$$

となる. (C.1) の厳密解は, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 4)$ であることから, 以上の反復計算から有意な解が得られていることがわかる.

付録D Lilly (1969) の訳文

1 要旨

二次元乱流の構造に関して Kraichnan の予測の妥当性を検証するために二次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式が数値積分される。数値シミュレーションされた乱流は、人為的な強制関数によって生じる。強制関数は、スカラー波数（以下、単に「波数」と呼ぶ） k_ℓ 付近の狭いスペクトル帯の範囲内に位置するフーリエモードのランダムに変化する集合から構成されている。一定のエネルギー注入率によって保たれている乱流の場合、Kraichnan は、 k_ℓ より低波数側の $k^{-5/3}$ 領域と、 k_ℓ より高波数側の k^{-3} 領域の二つの冪乗則エネルギースペクトルの発展を予測している。切断誤差とエイリアジング誤差は計算の有用なスペクトル領域を、十分に満足のいく試験に対して望ましいものよりも小さなものに制限するが、計算結果はこれらの予測と一致する。予測と結果は、地球流体力学のいくつかの分野と、他の数値シミュレーション実験に対する正しい解釈に明らかに適切である。

2 序論

本論文で報告される主な計算は、ランダムでほとんど単色の一定の振幅強制^{*1}によって生じた二次元乱流の性質において Kraichnan の予測の妥当性を検証するために用いられた。もし妥当であれば Kraichnan によって推定されるモデルは地球流体力学における様々な準二次元乱流に適用されるだろう。計算結果はまた、それらを得るために使われた計算手順の妥当性における多少厳しい検証を与える。

^{*1}[原文脚注 1] R. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967) .

3 Kraichnan の仮説

コルモゴロフスペクトルの妥当性は明らかであるけれども、乱れた流れの慣性領域においてコルモゴロフエネルギースペクトルを導く仮定は形式上、三次元流れに制限されないということが長く言及されてきた。二次元非粘性流れは、運動エネルギーに加えてもう一つの二次の不変量である渦度の二乗、ここで定義よりエンストロフィー^{*2}の二倍、が含まれていることもまた長く言及されてきた。したがって、粘性のある場合、二種類の散逸、つまり、運動エネルギー散逸率 ϵ とエンストロフィー散逸率 η 、が重要であると考えられる。同様に、Kraichnan は二種類の慣性領域、エネルギーが波数空間内で輸送されるコルモゴロフの慣性領域とエンストロフィーが同様に輸送される新しい慣性領域、が形式上定義され得ると言及された。もちろん、前者は(三次元乱流において)よく知られていて、実験的に十分に実証されている、波数 k のスカラーエネルギースペクトル(以下、単に「エネルギースペクトル」と呼ぶ)に対する $k^{-5/3}$ 冪乗則を導く。一方で、後者はよく似た次元の推論により k^{-3} 則を導く。Kraichnan はこれらの輸送が相互に独立的であることを証明することもできた。したがって $k^{-5/3}$ スペクトルは大きなスケールにも小さなスケールにもエンストロフィーを輸送することができないし、同様にエネルギーは k^{-3} 領域内の波数空間において伝播されない。Leith^{*3} によってエネルギースペクトル方程式における簡単化されたクロージャー近似の文脈の中で似た証明がなされた。

ここでは仮想的な物理的状況を考えよう。波数 k_ℓ 近傍におけるスペクトル空間の狭い領域から選んだ要素から構成されるが等方的で一様であるランダムな強制擾乱が、大きい有限の(5節で定義される)レイノルズ数をもつ粘性流体中で絶えず運動エネルギーとエンストロフィーを生成する。僅かに修正された形でのKraichnanの仮説は発展するエネルギースペクトルの形に関して以下の予測から構成される:

$$E(k) = \begin{cases} \alpha \left(\frac{d\bar{E}}{dt} \right)^{2/3} k^{-5/3}, & k_e < k < k_\ell, \\ \beta \eta^{2/3} k^{-3}, & k_\ell < k < k_d. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $E(k)$ は波数 k のエネルギースペクトル、 \bar{E} は全エネルギーで、

$$\int_0^\infty E(k) dk,$$

に等しい。 k_ℓ は強制擾乱の中間の波数であり、 k_e と k_d はそれぞれスペクトルの低波数と高波数の極限である。 α と β は無次元定数である。この理想化されたモ

^{*2}[原文脚注 2] 渦度の二乗の二分の一である「エンストロフィー」という言葉は Nickel によって初めて示され、Leith (参考文献 3) によって論文に現れた。ギリシア語の語源で「回る」を意味する「strophe」から生まれた。

^{*3}[原文脚注 3] C. E. Leith, Phys. Fluids 11, 671 (1968) .

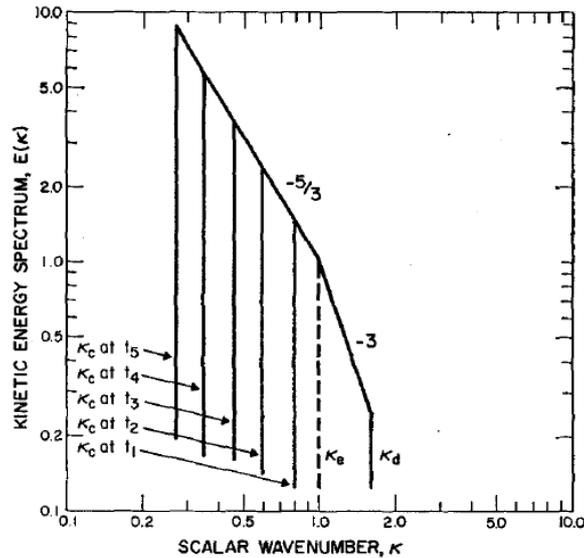


図 C.1: Kraichnan によって予測され、本論文で解釈された強制された二次元乱流におけるエネルギースペクトルの概念図。エネルギーは波数 k_ℓ 周辺で注入もしくは生成され、低い極限 k_e を移動させながら、発達する $k^{-5/3}$ 領域内を通じてより低い波数へ輸送される。二乗平均渦度（エンストロフィー）が k_ℓ でさらに生成され、散逸スケール k_d で終わる k^{-3} 領域内を通じてより高い波数へ輸送される。（この図にはないが）理想的には $k_e \ll k_\ell \ll k_d$ である。

デルのスペクトルが図 C.1 に両対数図で描かれており、時間とともにその発展を示している。高波数スペクトルではエンストロフィーがエンストロフィー散逸率 η でより高い波数へ輸送され、 k_d は散逸長さスケールを表している。運動エネルギーはこの領域内で輸送されない。したがって、もし $k_\ell \ll k_d$ ならばそれは散逸されない。しかし、運動エネルギーは $k^{-5/3}$ スペクトル領域内でより大きなスケールへ輸送され、低い極限 k_e は必然的に時間の減少関数である。結局、 k_e が、例えば地球もしくは他の物理的境界のサイズのような物理的な系のスケール限度に達したとき、エネルギーは最も低い可能な波数において増え始めなければならない。

限界波数 k_e と k_d はモデル上で理想化されたものであり、スペクトルで急落の兆候として扱われるべきではない。より完全な解析ではスペクトルは、 $d\bar{E}/dt$, η , k , 粘性率そして時間について一般化された関数として考えられるべきである。加えて、同様の解析から低波数スペクトルは無次元群 $(d\bar{E}/dt)^{1/2} k t^{3/2}$ の関数であると予測される。そこで、現在の近似では $k_e \propto (d\bar{E}/dt)^{-1/2} t^{-3/2}$ である。

4 数値モデル

Kraichnan によって予測された状況のシミュレーションに適切な微分方程式は次式の通りである:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta = F + \nu \nabla^2 \zeta, \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{V} = -\mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \zeta = \nabla^2 \psi. \quad (\text{C.2})$$

ここで, ζ は流れの場である x - y 平面に垂直な渦度成分であり, 流線関数 ψ の二次元ラプラシアンに等しい. $F(x, y, t)$ は強制関数 (実際には単位質量当たりの外力の回転) であり, ν は動粘性係数である. 境界条件は x 方向にも y 方向にも周期的であることにすると, 運動は正方形の次元に等しい波長で周期的である. 初めに運動場はゼロである. 式 (C.1) と (C.2) の数値積分はそれらをデカルト格子に定められた変数に作用する有限差分方程式に置き換わって実行される. ψ に関する式 (C.2) にある Poisson 方程式の解法は差分方程式の厳密解を求める FFT 法によって実行される.

これらの数値実験の大部分において式 (C.1) の非線形項に対して用いられた数値空間差分法は Arakawa ^{*4} によって開発された二次精度のスキームである. これは非線形項内で運動エネルギーとエンストロフィーを保存する. いくつかの数値実験で Arakawa の四次精度のスキームが比較のために用いられる. 式 (C.1) と (C.2) にあるラプラシアンは中間値と, それに直接隣り合う四点を用いる二次精度の表現によって近似される. 時間積分は二次の Adams-Bashforth 法によって実行される. これはわずかに不安定であると知られている. しかし, 非粘性で強制なしの場合, 時間ステップは, 時間ステップ当たりのエネルギー拡大が 0.1% (いくつかの場合で 0.01%) 以下になるように小さく制限されている. おそらく多くの重大な数値誤差は非線形相互作用における高波数成分のエイリアジングによるものである. Arakawa の差分法においてエイリアジングは不安定性をもたらすことはないが, ある程度, 特に格子間隔の四倍以下の波数において, スペクトルを歪める. 本実験では 64×64 の網状格子が用いられる. それは各方向に波数 32 までフーリエ成分を与える. したがって, おそらく 16 以上の波数をもつ成分はエイリアジング誤差からの重大な変形を受けやすい. これらの数値計算法およびエイリアジング安定性問題に関するさらなる詳細は著者^{*5} による以前の論文中にある.

強制関数の規定は明らかに数値実験の決定的な部分である. Kraichnan は一定のエネルギー源とエンストロフィー源を想定したが, それらは ψ と F , ζ と F の

^{*4}[原文脚注 4] A. Arakawa, J. Comput. Phys. 1, 119 (1966) .

^{*5}[原文脚注 5] D. K. Lilly, Monthly Weather Rev. 93, 11, (1956) .

間に一定の共分散を必要とするためにそれらをシュミレーションすることは容易な問題ではない。 F の振幅は一定にするが、その位相とフーリエ成分の構成が時間とともにランダムに変化させることは簡単なようである^{*6}。 F は以下の時間差分方程式から計算される:

$$F_{n+1} = R_n F_n + (1 - R_n^2)^{1/2} \hat{F}_{n+1} . \quad (\text{C.3})$$

ここで、 F の下付き文字は時間ステップの量を表し、 $R_n (\leq 1)$ は無次元の相関係数^{*7}、 \hat{F}_n は F_n からランダムに選ばれる部分である。式 (C.3) の両辺を自乗し、 F_n と \hat{F}_{n+1} は相関がないことに留意すると、 $\overline{F_n^2} = \overline{\hat{F}_{n+1}^2}$ ^{*8} (バーは空間平均を表す) ならば、 $\overline{F_n^2}$ は時間とともに一定のままであることは明らかである^{*9}。 \hat{F}_n の項はガウス分布からランダムに選ばれることで得られる。これは k_x, k_y 空間内の幅 $2k_\ell$ をもつ正方形の表面にあるすべての波数成分に対する振幅係数である。したがって、 $k_x = k_\ell$ か $k_y = k_\ell$ のいずれかのすべてのフーリエモードは \hat{F}_n に表されるが、これらはランダムで不定の重みが付く。 \hat{F}_n の全振幅は構成している振幅を規格化することで制御されているので、それらの自乗の和は一定である。後に与えられるエネルギースペクトルは、解析的研究においてよく使われるような半径 k の円上というよりはむしろ、辺 $2k$ の正方形上で自乗された振幅係数の和として得られる。

^{*6}強制関数 $F(x, y, t)$ をフーリエ級数展開する:

$$F(x, y, t) = \sum \hat{F}(k_x, k_y, t) e^{i(k_x x + k_y y)} .$$

ここで、 \hat{F} を、

$$\hat{F}(k_x, k_y, t) = A(k_x, k_y) e^{i\theta} ,$$

とすることで波数 k_ℓ で系を強制する。ここで、 $\theta = \theta(k_x, k_y, t)$ の値には k_x, k_y, t 毎に異なる乱数を用意する。

^{*7} R_n と下付き文字があるが、これは時間ステップを意味していないことに注意する。

^{*8}原文中には、

$$\overline{F_1^2} = \overline{\hat{F}_n^2} ,$$

とあったがこれは誤りである。

^{*9}式 (C.3) を自乗し空間平均すると、

$$\begin{aligned} \overline{F_{n+1}^2} &= R_n^2 \overline{F_n^2} + 2R_n(1 - R_n)^{1/2} \overline{F_n \hat{F}_{n+1}} + (1 - R_n) \overline{\hat{F}_{n+1}^2} \\ &= R_n \overline{F_n^2} + (1 - R_n) \overline{\hat{F}_{n+1}^2} , \end{aligned}$$

となる。ここで、仮定 $\overline{F_n^2} = \overline{\hat{F}_{n+1}^2}$ より、

$$\overline{F_{n+1}^2} = \overline{\hat{F}_n^2} ,$$

が得られ、 $\overline{F_n^2}$ が時間によらず一定であることが明らかである。

式 (C.3) を以下の微分方程式に対する近似として書くこともできる:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{F}{\tau} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{F}}{(\tau \Delta t / 2)^{1/2}}. \quad (\text{C.4})$$

ここで,

$$\frac{\tau}{\Delta t} = \frac{1 + R_n}{2 - R_n}, \quad (\text{C.5})$$

であり, Δt は積分時間刻みである. $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると \hat{F} は同じ振幅のままであるが, 時間間隔 Δt に対してのみ自己相関がある. したがって, 極限では $\partial F / \partial t$ は特異となる. それにもかかわらず, 式 (C.4) は形式上以下のように数値積分される:

$$F(t) = \exp(-t/\tau) \left[F(0) + \int_0^t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{F}(t')}{(\tau \Delta t / 2)^{1/2}} \exp(t'/\tau) dt' \right]. \quad (\text{C.6})$$

F の時間微分は特異だが F の項はよく定義される. ゆえに, 数値積分の線形段階において時間の関数として ζ に対する一般的な解析解, より有効に言えば, 運動エネルギーとエンストロフィーを作り出すために式 (C.6) の関数である式 (C.1) の線形化された形に代入できる. 6 節で上の表現を利用しよう.

式 (C.5) を通じて R_n は F の減衰時間 τ の関数である. 式 (C.1) の数値解において計算安定性を維持するために時間ステップを減らす必要がある. しかし, 任意の数値実験に対して τ を一定であるように選ぶならば, 時間の切断誤差を除いて, 結果は Δt の関数にならないであろう. したがって, 式 (C.5) について解き,

$$R_n = \frac{1 - (\Delta t / 2\tau)}{1 + (\Delta t / 2\tau)}, \quad (\text{C.7})$$

強制関数を決めるために式 (C.3) に加えてこの表現を用いる. このとき, 結果は F の大きさ, 波数 k_ℓ , 粘性係数 ν そして利用可能なモデル解像度だけでなく τ の関数でもある.

適切なスケールリングによって, 二つのパラメータを消去する. すべて $|F|^{1/2}$ によって縮尺された ζ , t^{-1} , そして τ^{-1} , $2\pi k_\ell^{-1}$ によって縮尺された長さ, さらに $2\pi k_\ell^{-1} |F|^{1/2}$ によって縮尺された速度を用いると式 (2) とそれ以下の式は同じ形式のままである. ここで, ν は $4\pi^2 |F|^{1/2} / k_\ell^2$ によって縮尺されている. 新しい無次元形では, $|F| = 1$, $k_\ell = 2\pi$ となる. ここで, 解は, ν , τ , $2\pi k_\ell^{-1}$ によって縮尺された格子間隔, そして格子点の数の関数となる. 無次元の粘性係数はレイノルズ数の逆数と考えられるが, その概念は, 関係はあるが異なる比に割り当てられている.

5 数値実験結果

二つの無次元の ν , ($\tau = \infty$ という定常的な強制関数の場合を含む) 三つの τ , そして二つの縮尺された格子間隔に対して数値積分を実行した. 数値スキームの時間ステップと精度に関していくつかの実験がなされた. 一つのケースでは, 全く同じパラメータを用いて, 但し, ランダムな数列の異なる部分から発生される強制関数を用いて数値積分が繰り返された. これは, 一つの数値実験の重要な統計量がアンサンブル平均にとって良い近似であると考えられるかどうかを決めるためになされている. (明らかに一つの設定においてありうる.)

図 C.2 は数値実験のうち一つに対する初期段階の強制関数^{*10} の数値解析された場である. 詳細な構造は絶えず変化するが, すべての後の時刻における F の様子の典型例である. 強制関数は, 各方向に 7 つもしくは 8 つの周期をもっているが, ある方向において同じ波数, 他方向ではわずかに異なる波数のモードを叩くことで明らかに大きなスケールが変調された準周期的なものである^{*11}. このケースでは格子間隔は $1/8$ であり^{*12} 格子点の数は各方向に 64 点である. よって, F の成分はすべて少なくとも一つの方向に正方形にわたる 8 つの波をもつ. 慣例的に $k_\ell = 2\pi$ であるが, この強制関数を波数 8 のうちの一つであるとする.

数値計算の初期段階では, その時間発展はわずかな粘性減衰を伴ってほとんど単色場の基本的な線形成長であるから, 渦度も流れ関数も図 C.2 とよく似ている. 100 ステップ目以降では, 非線形項が波数空間において支配的になり, パラメータに幾分依存するが高速なエネルギー分散となる. 図 C.3 (a) および (b) は波数 8 の実験に対する 160 ステップ目での流れ関数と渦度を示している. ここで, $\tau = 0.5$, $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$ である (以降, 本論文ではこれを基本的な数値実験と呼ぶことにする). 渦度場と流れ関数場の間には負の相関があることが確認されうるが, 渦度場は流れ関数場と比べて明らかに小さい構造を示している. 図 (C.4) (a) と (b) からわかるように, 後の時刻では高波数の渦度が, 次第に低波数の流れ場のシア領域とともに発展する. 流れ関数場は最終的に一つの支配的な最大・最小のセル対

^{*10}本文中には, 「初期の強制関数」とあるが, 図 2 に示されているように変調された場が形成されるためには時間がかかるために, ここでは「初期段階の強制関数」と訳した.

^{*11}近い波数 (もしくは波長) が重ね合わさることで以下のように振幅の変調が起こる:

$$\begin{aligned} \sin kx + \sin(kx + \Delta kx) &= \sin kx + \sin kx \cos \Delta kx + \cos kx \sin \Delta kx \\ &= (1 + \cos \Delta kx) \sin kx + \sin \Delta kx \cos kx . \end{aligned}$$

^{*12}すでに 3 節に述べられていたように, ここでは長さを $2\pi k_\ell^{-1}$ でスケールしている. 領域 $2\pi \times 2\pi$ を上のようにスケールした場合 (ここで, $k_\ell = 8$ である) 領域は 8×8 となり, 格子点数を 64×64 とすれば各方向の格子間隔は $1/8$ であろう.

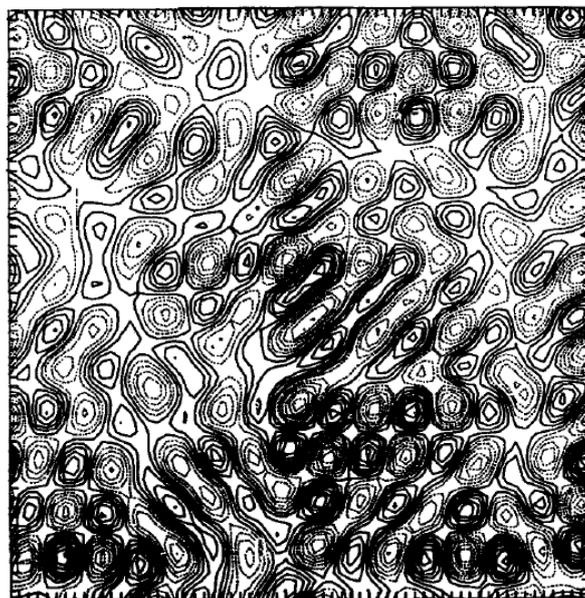
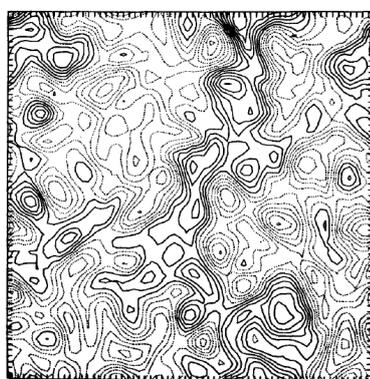
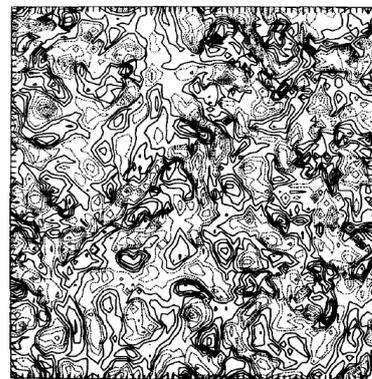


図 C.2: 基本実験における強制関数 F の典型例. 強制関数 F は (境界線に沿ってハッチマークに表示された) 格子線の交差点に置いてのみ定義されるが, 簡単に解釈するために連続場のように機械的に解析されてプロットされたものである.



(a)



(b)

図 C.3: $\nu = 2.5 \times 10^{-4}$, $\tau = 0.5$ の設定での波数 8 の実験における 160 ステップ目, $t = 10.87$ での流れ関数 (a) と渦度 (b). ここで, これらの値はすべて無次元の単位である.

となる. 平均速度や循環が生成されないために, 特定のセルの向きが任意でおそらくランダムであるけれど^{*13}, これは系において可能な最小波数のモードである.

^{*13}ここで, 平均速度が生成されないということは, つまり流れ場の向きがランダムであることとして循環が生成されないということは, つまり渦度場の向きがランダムであることの二点を確認しておこう.

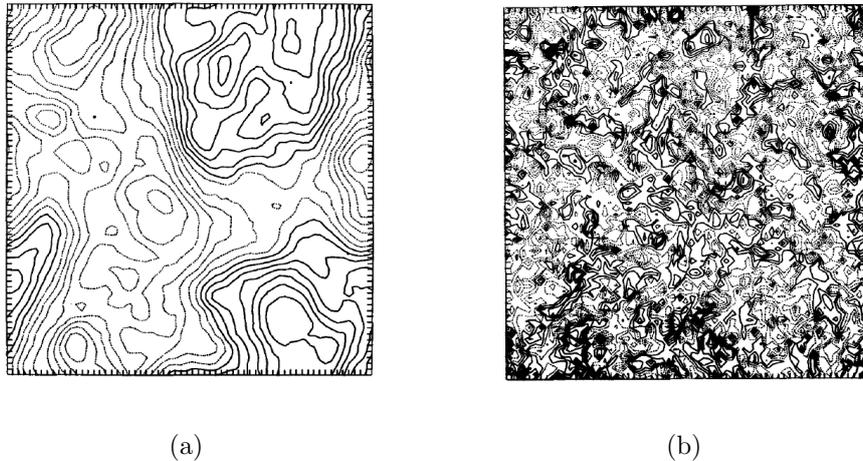


図 C.4: 2360 ステップ目, $t = 75.45$ における流れ関数 (a) と渦度 (b). その他の設定は図 C.3 と同様.

図 C.5 には基本実験におけるエネルギースペクトルの時間発展を表しており、これは波数空間内の正方形周りの寄与を足し上げることで得られる。適切な冪乗則の線^{*14} (破線部) が重ねられている。 $k^{-5/3}$ の低波数スペクトルの予測された発展は明らかによく確かめられる。2200 ステップ目まで $k < k_\ell$ の領域全体は飽和しており、波数 1 においてエネルギーがゆっくり集積している。一方で、高波数スペクトルは Kraichnan の予測をあまり満足しない検証である。 $-\frac{5}{3}$ と -3 の間に明らかに勾配がある。もしくは、さらに可能性が高い場合には、 -3 の領域が一オクターブかそのくらいに存在しているが、(高波数スペクトルにおいて) 切断誤差とエイリアジング誤差によって歪められている。 ν を 4 倍ほど大きくした実験では粘性による切断の特徴が現れたが、基本実験ではその跡がない。波数 32 における急落を除いて同所的な不規則性は大抵瞬間的なものである。波数 32 における急落はこの波数成分がその他の波数成分のように足しあげられたもののちょうど半分 (sin の項が消える) から成ることが原因である。適切な比較のためにスペクトルの最終点はその縦座標を二倍しておくべきだった。

明らかな高波数の不一致を起こす数値誤差の原因があるかどうかを判断するために三つの数値実験が実行された。一つ目には、基本実験の 1800 ステップ目から再び開始して、半分に切った時間ステップを用いて、追加で 1200 ステップ分計算した。この手順により効率的に時間切断誤差と、それに伴う 8 倍の高波数の増幅を減らした。次の実験では、同じ手順を適用したが、二次精度の Arakawa 空間差分法を四次精度法に変更した。空間切断誤差は、主に物理量のパターンの輸送における

^{*14}原文中には、“curves” という単語が記述されていたが、ここでは単に「線」と訳した。

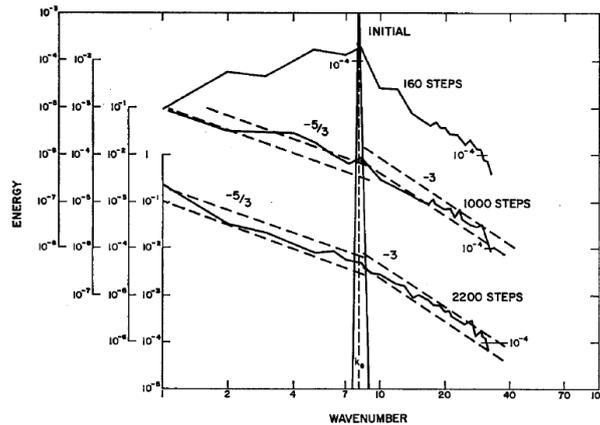


図 C.5: 対数でプロットされた 1, 160, 1000, 2200 ステップ目におけるエネルギースペクトル $E(k)$. 比較のために $-5/3$ および -3 の勾配にある破線が重ねられている.

位相誤差であると思われ, それによって急激に減った. 三つ目の追加実験では, 時間ステップの基準を半分にしながらかつ強制関数を波数 4 に適用させて, 積分全体を繰り返した. この実験では, エンストロフィー慣性領域をエイリアジングによって大きく作用されたものよりも大きなスケールに拡張することで, エイリアジング誤差の効果を試験するつもりであった. 基本実験と三つの追加実験に対するエネルギースペクトルを時間を一致させて図 C.6 に示してある.

図 C.6 にある曲線を比較すると, 時間切断誤差を減らしてもエネルギースペクトルに重大な変化がないことがわかる. しかし, 実際は四次精度の方式を利用することで空間切断誤差を減らすと, 数値計算されたスペクトルと予測されている k^{-3} の形式の間に不一致が増えた. この結果は, このように差分法の精度を改善することでエイリアジング誤差の幅が増えることがわかることから, 波数のエイリアジングが主な要因であるという推定と一致する. 三つ目の追加実験の結果を示すスペクトルの曲線はこの推定をよく示している. 他の実例で示されている一オクターブの近似的な領域と比較すると, 約 4 から 16 の波数から二オクターブの k^{-3} 領域を表している.

図 C.7 はエネルギースペクトルにおける三つの成分に対する時間依存性の図であり, これは基本実験における波数 4, 8 そして 12 に一致する. 波数 8 に対する強制要素では, 初期の線形段階が大きなオーバーシュートを伴って終了し, ゆっくり減衰する準平衡状態に明らかに近づくような, ゆっくりとした一連の減衰振動が続くことがわかる. より低波数のモードは似た特徴を示すが, より後の時刻でより小さな極値をもつ. そして, 平衡状態に落ち着く前にオーバーシュートする. より高波数のモードは幾分か早く近似的な平衡状態へ向かうが, 他のモードとの非線形相互作用によって平衡状態の周りで連続的に振動している.

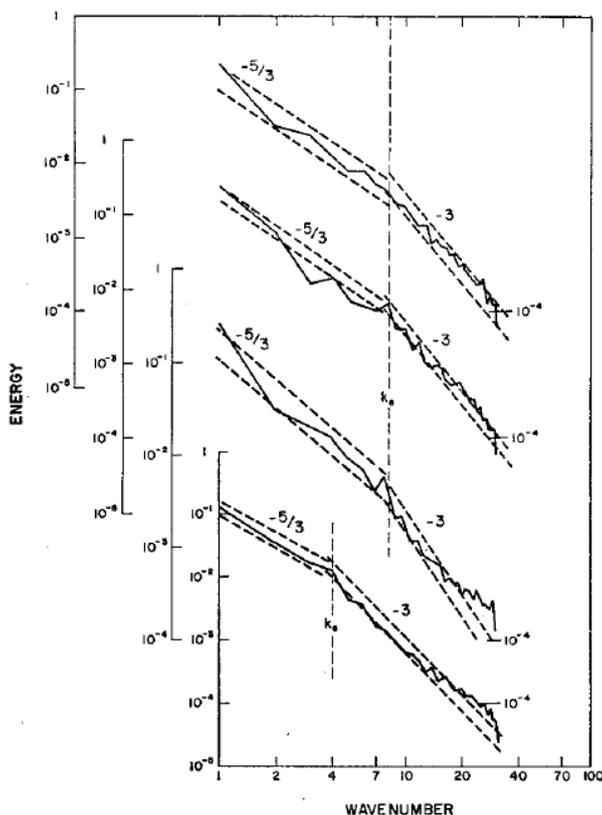


図 C.6: 一段目: 図 5 の最後の曲線の繰り返し. 二段目: 1800 ステップ目より後で半分にした時間ステップを用いて 3000 ステップ目での $E(k)$ 三段目: 上と同様だが, 非線形項の計算に四次精度の差分法を用いている. 四段目: 2320 ステップ目の $E(k)$ だが, 波数 4 の要素から組まれた強制関数を用いている.

図 C.8 には, 基本実験に対する時間の関数として全エネルギー, 全エンストロフィーそしてエネルギー生成率 $-\overline{\psi F}$ が示されている. 統計的解析のために 40 ステップ毎の結果のみが保存されているために, 生成率は, 示されているものより幾分大きな振動数をもつ大きな時間振動がある. これらの振動は主に, 強制関数と流れ関数の波数 8 成分間の相関が大きく変化することによるものである. 時間振動は, 大規模な大気の大循環やその実験的かつ数値的な類似物において観測される振動現象^{*15} と非線形振動に似ているようである. $-\psi$ と F 間の相関が増加する期間に強制モードのエネルギーはまた急速に減少する. その増加は, モードからエネルギーを取り除き $-\psi$ と F を切り離そうとする非線形相互作用の増強により確認される. このタイプの周期的なふるまいは Lorenz^{*16} によってよりきれいな形式で

^{*15}Hide (1953) は回転水槽実験において, 角速度 Ω と水平温度 ΔT の組み合わせにより水槽内を移流しながら周期的に形を変える波を見つけ, これを “vacillation” と名付けた. この単語は, “variable oscillation (変化しやすい振動)” を意味する造語である.

^{*16}[原文脚注 6] E. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20, 448 (1963) .

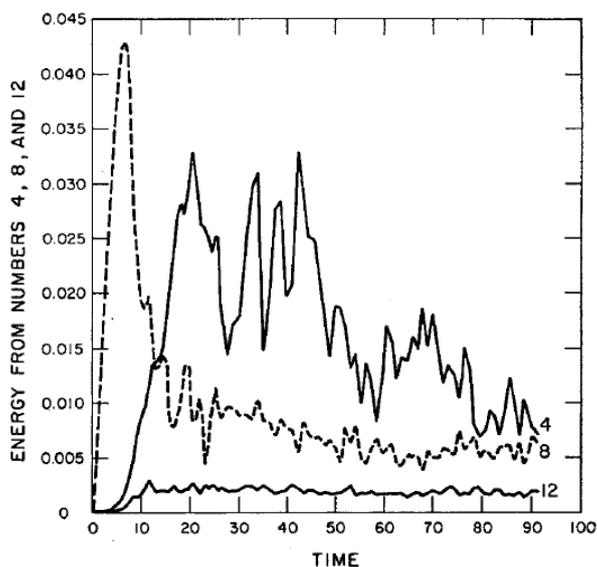


図 C.7: 波数 4 (実線上部), 8 (破線) そして 12 (実線下部) から全運動エネルギーへの寄与. (図 3-5 に示されている) 基本実験に対する時間を背景にプロットされている.

研究されており, 二次元流体もしくは準二次元流体で明らかに共通の (もしかすると限定的) である.

6 普遍定数と流れパラメータの計算

上の結果は Kraichnan の予測を検証するために十分であると考えられるということ仮定して, 式 (1) 中の定数 α と β を見積もる立場にいる. 始めに, わずかなエネルギー散逸と一定のエンストロフィーのもとでエネルギーとエンストロフィーの変化に対する方程式は以下のように書けることに注意する:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\bar{\psi F}, \quad (\text{C.8})$$

$$0 = \bar{\zeta F} - \eta. \quad (\text{C.9})$$

$k = k_\ell$ における式 (1) のスペクトルに対する連続性を仮定する時に, 上の表現は以下の式を満たす必要がある:

$$\beta/\alpha = (-\bar{\psi F}/\bar{\zeta F})^{2/3} k_\ell^{4/3}. \quad (\text{C.10})$$

本当に強制関数が単色で切断誤差がなければ $k = k_\ell$ をもつ成分のみが上の割合となり β は α と等しいだろう. これらの仮定がどちらも成り立たないために以下の

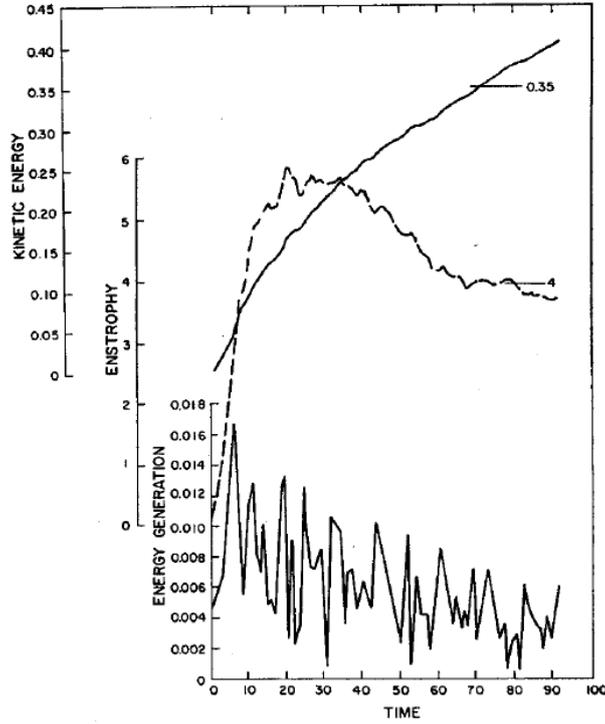


図 C.8: 基本実験における全エネルギー、全エンストロフィーそして全エネルギー生成率.

有効強制波数 k_{eff} を定義することが便利となる:

$$-\overline{\zeta F} / \overline{\psi F} = k_{eff}^2 . \tag{C.11}$$

基本実験に対する割合の項を比較すると, $k_{eff}^2/k_\ell^2 \sim 1.27$ とわかる. これは理論的に予測することもできる. 式 (1) における係数として α_{eff} と β_{eff} を定義すると, これらは k_ℓ の位置に k_{eff} を代入することで得られ, このとき式 (9) と (10) を導く条件下で $\alpha_{eff} = \beta_{eff}$ と両式は Kraichnan のモデルをより理想化した設定に相当すべきであろう. $E(k_\ell)$, $d\overline{E}/dt$ そして η の値から計算された α_{eff} と β_{eff} がわかる. 図 C.5 中の下線に対応する時刻および波数 4 実験の $t = 20$ で以下の値が得られる:

$$\begin{aligned} \alpha_{eff} &\sim 6.2, & \beta_{eff} &\sim 4.8, & \text{波数 } 8; \\ \alpha_{eff} &\sim 4.32, & \beta_{eff} &\sim 4.05, & \text{波数 } 4. \end{aligned}$$

波数 k_ℓ は厳しい切断誤差とエイリアジング誤差^{*17} の領域からそれ以上に除かれているために後者の両値はおそらくより正確なものである.

^{*17}[原文脚注 7] 後で理論的な減衰スペクトルのより正確な計算では β の値は 2.0 付近を示すだろう. この不一致はまだ説明されていないままである.

式 (1) では高波数スペクトルが $k = k_d$ での切断が仮定されている. この意味づけを明らかにするためにコルモゴロフのマイクロスケールと類似するような名ばかりのエンストロフィー散逸スケール λ_d を以下のように定義できる:

$$\lambda_d = (\nu^3/\eta)^{1/6}. \quad (\text{C.12})$$

全エンストロフィー散逸は積分,

$$\int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk,$$

を計算し, それを $\eta/2\nu$ と同等とすることで切断スケールと関係づけられる. この結果は, $(k_e/k_\ell)^{10/3} \ll 1$ と仮定した後では,

$$\eta^{1/3}/\nu = \beta \left(k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 \right),$$

もしくは, 式 (13) を代わりに用いると,

$$k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 = 1/(\beta \lambda_d^2), \quad (\text{C.13})$$

となる^{*18}. 数値計算では左辺第二項はほとんど無視できる, 例えば基本実験だと $k_\ell \lambda_d \sim 1/7$ であり, $k_d \lambda_d \approx \beta^{-1/2} \sim 0.45$ である. したがって基本実験では $k_d/k_\ell \sim 3$ である. この結果から計算されたスペクトルにおいて粘性切断を確認す

^{*18}式 (14) を導出する. 全エンストロフィー散逸は,

$$\int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk = \int_{k_\ell}^{k_d} k^4 E(k) dk + \int_{k_e}^{k_\ell} k^4 E(k) dk,$$

のように分けられる. まず, 強制より小さなスケールのエンストロフィー散逸は, 本文中の式 (1) を用いて,

$$\int_{k_\ell}^{k_d} k^4 E(k) dk = \int_{k_\ell}^{k_d} k^4 (\beta \eta^{2/3} k^{-3}) dk = \frac{1}{2} \beta \eta^{2/3} (k_d^2 - k_\ell^2), \quad (1)$$

となる. 次に強制より大きなスケールのエンストロフィー散逸は, 本文中の式 (1) の連続性を仮定することで,

$$\begin{aligned} \int_{k_e}^{k_\ell} k^4 E(k) dk &= \int_{k_e}^{k_\ell} k^4 (\alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}) dk = \frac{3}{10} \alpha \epsilon^{2/3} k_\ell^{10/3} \left\{ 1 - \left(\frac{k_e}{k_\ell} \right)^{10/3} \right\} \\ &\sim \frac{3}{10} \alpha \epsilon^{2/3} k_\ell^{10/3} \\ &= \frac{3}{10} \beta \eta^{2/3} k_\ell^2, \end{aligned} \quad (2)$$

と計算できる. 上の (1) と (2) を足し上げることで, 全エンストロフィー散逸は,

$$\int_{k_e}^{k_d} k^4 E(k) dk = \beta \eta^{2/3} \left(\frac{1}{2} k_d^2 - \frac{1}{5} k_\ell^2 \right), \quad (3)$$

ることが期待できる。その欠如は非線形項中のエイリアジング誤差と有限差分ラプラシアン中の切断誤差の組み合わせにあるとする。そのエイリアジング誤差は高波数側でエネルギーを集積し、その切断誤差は高波数側で粘性減衰を減らす。

運動の最大スケール k_e と全平均自乗速度、もしくは強制スケール k_ℓ とその特徴的な速度 v_ℓ のどちらか一方の項を用いて、レイノルズ数を表すことができる。後者はより適切であり、ほとんど時間とともに一定である^{*19}。したがって、強制レイノルズ数を、

$$R_F = v_\ell / \nu k_\ell, \quad (\text{C.14})$$

と定義する。ここで、

$$\frac{v_\ell^2}{2} = \int_{k_\ell}^{k_d} E(k) dk,$$

は、強制スケールよりも小さいすべてのスケールと関係のあるエネルギーである。式 (1) の二番目の部分から、 R_F を以下のようにエンストロフィー散逸率と関係づける：

$$\eta = k_\ell^6 \nu^3 \left(\frac{R_F^3}{\beta^{3/4}} \right).$$

これを、式 (13) と (14) に代入することで、

$$\frac{k_d}{k_\ell} \approx \frac{1}{\beta^{1/2} \lambda_d k_\ell} = \frac{R_F^{1/2}}{\beta^{3/4}}, \quad (\text{C.15})$$

を得る。これは、強制レイノルズ数と散逸スケールの直接的な関係を示している。基本的な波数 8 の実験では $R_F \sim 100$ である。一方で、波数 4 の場合は $R_F \sim 260$ である。

と表せる。これが $\eta/2\nu$ と同等とすると上の (3) より

$$\eta^{1/3} / \nu = \beta \left(k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 \right),$$

を得る。これと本文中の式 (13) から下の関係式が導ける：

$$k_d^2 - \frac{2}{5} k_\ell^2 = 1 / (\beta \lambda_d^2).$$

よって本文中の式 (14) が導出できた。

^{*19}最大波数 k_e は時間とともに低波数側へ発展するのに対して、強制波数 k_ℓ は時間によらず一定であることを意味している。

7 生成率中の不安定性

エネルギー積分とエンストロフィー積分の時間発展においてあまり予測できないふるまいが見られた。エネルギー生成率とエンストロフィー生成率の項、つまり $-\overline{\psi F}$ と $\overline{\zeta F}$ は強制関数の増幅と強制波数に関連する平均自乗速度の共分散に比例すると考えられる。つまり、

$$\begin{aligned}\overline{\psi F} &= -r|F|v_F/k_{eff}, \\ \overline{\zeta F} &= r|F|v_F k_{eff}.\end{aligned}\tag{C.16}$$

である。ここで、 $v_F^2/2 = E(k_\ell)\Delta k$ であり、エネルギーは強制波数帯 Δk にあり、 r は無次元の相関係数である。初期の線形段階と非線形レジームへの調節時間の後に r は一定値へ近づくと仮定される。その場合、低波数へ続く拡大を除くエネルギースペクトル全体のように、エンストロフィーとエネルギー生成率そして $d\overline{E}/dt$ はすべて一定となることが示されるはずである。図 C.8 はこの仮定が検証されていないことと、一定になると予測されていた量すべてがゆっくりとそしてやや不規則に減ることを示している。図 C.8 の値から実行された計算は相関係数 r が無次元時間 $t = 30$ でのおよそ 0.45 から $t = 90$ でのおよそ 0.35 減ることがわかる。

強制スケールにある運動と強制関数の無相関の原因は明らかに大規模な流れの発展にある。強制関数は適当な場所に固定され、その自己相関時間 τ の間に任意の点で同じ符号の渦度を発生させようとする。もし局所的な大きさ \overline{U} のような大規模な速度が存在するならば、その速度はオーダー $(k_\ell \overline{U})^{-1}$ の時間中に新しく生じた渦度を取り除き、もしこの時間が τ よりも非常に短いならば、有効エネルギー生成率と有効エンストロフィー生成率は消えるだろう。この過程のより定量的な描写は式 (2) の線形化された形を考えることで導かれる。その式には強制スケールと関係のある渦度は大規模流れ中の揺らぎ ζ' であると仮定する。

粘性を無視すると線形化された方程式は、

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\overline{U} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + F,\tag{C.17}$$

である。ここで、 \overline{U} は平均速度もしくは大規模な速度の成分である。 $\zeta' \propto \exp(ik_\ell x)$ と仮定すると、初期条件を無視して、式 (18) は、

$$\zeta' = \exp[ik_\ell(x - \overline{U}t)] \int_0^t \exp(ik_\ell \overline{U}s) F(s) ds,\tag{C.18}$$

によって与えられる解をもった常微分方程式となる。平均エンストロフィー生成はこのとき以下の積分の実部である：

$$\overline{\zeta' F} = \exp(-ik_\ell \overline{U}t) \int_0^t \exp(ik_\ell \overline{U}s) \overline{F(s)F(t)} ds.\tag{C.19}$$

積分内のバーつきの項は式 (7) を $F(s)$ と $F(t)$ に代入し, 必要な積分を実行することで計算できる. $|t' - t''| \leq \Delta t$ (それ以外ではゼロ) のとき $\overline{\hat{F}(t')\hat{F}(t'')} = \overline{\hat{F}^2}$ とわかる^{*20}. 結果は,

$$\overline{F(s)F(t)} = \overline{\hat{F}^2} \exp[(s-t)/\tau], \quad s \leq t, \quad (\text{C.20})$$

である. これを式 (20) に用いて, 再び積分すると, エンストロフィー生成積分の実部は以下のように計算される:

$$\text{Re}(\overline{\zeta'F}) = \frac{\overline{\hat{F}^2}/\tau}{\tau^{-2} + (k_\ell \bar{U})^2}. \quad (\text{C.21})$$

この結果は $(k_\ell \bar{U})^{-1}$ が τ よりも非常に短いときに $(k_\ell \bar{U})^{-1}$ は有効結合時間である. ここで, \bar{U} が大きき $(2\bar{E})^{1/2}$ であると見積もるならば, 積分領域の大部分でエネルギー生成と渦度生成が非常に減ったことが明らかになる^{*21}. 図 C.4 の時刻では $(k_\ell^2 \bar{E})^{-1} \sim 30$ であったが, 一方で $\tau^{-2} = 4$ であった. しかしながら, 全エンストロフィー生成はほとんど全く減らなかった. なぜなら, 低速度の狭い領域, 例えば大きなセルの中心付近, では \bar{U} は小さいからである. このとき, これらの領域は式 (22) の空間積分を支配する. 効果全体は式 (5) の右辺もしくはこの式の有限差分をとったものに移流項 $-V \cdot \nabla F$ を加えることで明らかに取り除かれるだろう. その場合, 強制関数はもはや単色ではないだろうが, おそらく実際の準二次元流体における典型的なエネルギーを生成する乱流により正確に一致するだろう.

8 いくつかの地球物理学的解釈とその他の解釈

例えば, 強い回転や成層を伴うような一定の状況下の実験室では準二次元流れを作り出すことができる. それは, 地球の大気海洋といくつかの惑星大気およびおそらく太陽の上層大気における大規模な構造のもつ標準的な特徴である. 今回の結果に示される主な定性効果の一つである, 小さなスケールからより大きなスケールへのエネルギー輸送はすでに観測されており, 長年にわたってある程度理解されてきた^{*22}. エンストロフィー慣性領域が当然存在することを支持する証拠も蓄えられている. Ogura^{*23}, Kao そして al-Gain^{*24} と Wiin-Nielsen^{*25} は経度方向の波

^{*20}強制関数の定義により, \hat{F} は Δt 間でのみ相関があることから明らかである.

^{*21}式 (22) より \bar{U} が大きければ, エネルギー生成やエンストロフィー生成が小さくなる (k_ℓ, τ は固定). これは, 渦度場や流れ関数場が \bar{U} によって移流されるため, \bar{U} が大きければこれらの相関が無くなるという考えと一致する.

^{*22}[原文脚注 8] R. Fjörtoft, Tellus **5**, 225 (1953).

^{*23}[原文脚注 9] Y. Ougra, J. Meteorol. **15**, 375 (1958).

^{*24}[原文脚注 10] S. K. Kao と A. A. al-Gain, J. Atmos. Sci. **25**, 214 (1968).

^{*25}[原文脚注 11] A. Wiin-Nielsen, Tellus **19**, 540 (1967).

数 n がおよそ 8 から少なくとも 15 の間の大気中にはおよそ n^{-3} のエネルギー Spektrum が明らかに存在していることを示した。これらの波数は、大規模な運動エネルギーの大部分が生じるような強い傾圧不安定をもつ波数 (4 から 8) と、大気はもはや準二次元的とは考えられない波数 (> 50) の間の領域にある。

Wiin-Nielsen (1967) にある図の一つがここで図 C.9 として再現されている。理論的予測と我々の実験結果が異なるので、図の低波数領域はとても面白い。大気において大規模なエネルギーが地面との直接的な摩擦によって散逸される。これは対流圏界面付近での強い鉛直シア領域においても明らかに見られる^{*26}。この点において大気は二次元流体と異なる。しかしながら、第一近似では、Hooke の法則を過度方程式に加えることで現在の問題設定の範囲内で摩擦効果がシュミレーションされるかもしれない。したがって式 (1) は以下のように書き換わる^{*27}：

$$\frac{d\zeta}{dt} = F + \nu \nabla^2 \zeta - K\zeta. \quad (\text{C.22})$$

表面摩擦係数 K が大気上層と下層における摩擦抵抗の大きさと一致するように適切にスケールされるならば摩擦係数の主な効果は、Spektrum 中の多くのエネルギー部分、つまり大規模流れからエネルギーを取り除くことが期待できる。

最近の研究では太陽大気も運動の大規模なスケールにおいて準二次元的であることが示唆されている^{*28 *29}。太陽大気の大規模なスケールの駆動機構は明らかではないが現在の研究では、小規模な熱対流「粒状斑」において解放されるエネルギーによってSpektrum全体が生成および維持されているかもしれないということが示唆されている。抵抗力が小さい場合にのみこれは起こる。流体中の小規模な三次元の流体運動とより大きな準二次元流れとが結合するといった一般的な問題は、地球物理学のいくつかの分野において興味深く重要な問題である。しかしその問題はこの研究の範囲を超えたところにある。

今の結果を適用するもう一つの分野は三次元の流体運動における二次元のシュミレーションに対する正しい解釈を確実なものにするところにある。計算速度とストレージの制限によりたとえいくつかの場合で関係のある物理現象が三次元乱流を示していると知っていても流れ問題の数値解の多くは今まで二次元に制限されている。今明らかなことは、二次元の数値計算の正確な応用は準二次元流れに対するもの、何らかの方法で十分に発達した乱流になることを抑えた三次元流れに対するもののどちらか一方である。数値計算の設備が急速に拡大しているにもかかわらず完全な三次元流れの数値計算は難しく、場合によっては高価なままであろう。

^{*26}[原文脚注 12] E. C. Kung, Monthly Rev. **95**, 593 (1967) .

^{*27}ここで、式 (C.22) の右辺第三項は Ekman 摩擦を表している。

^{*28}[原文脚注 13] F. Ward, Pure Appl. Geophys. **58**, 157 (1964) .

^{*29}[原文脚注 14] F. Ward, Astrophys. J. **141**, 534 (1965) .

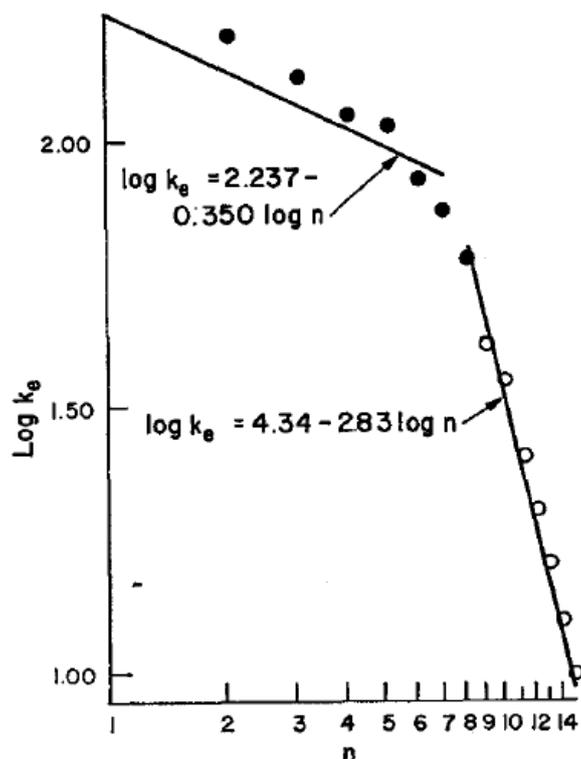


図 C.9: 波数の空間における全大気の大渦の運動エネルギー (Wiin-Nielsen より抜粋) .

したがって、乱流を考察する限りにおいて、三次元性のもつ重要な効果を二次元もしくは「2.5」次元の枠組みに組み入れることのできる運動の方程式系の数学的定式化に対する需要がある。

9 まとめ

Kraichnan によって提唱された発達した二次元乱流の仮想的モデルは、単色だがランダムな強制をもつ非圧縮粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式系を直接的に数値積分することで試験された。モデルで予測される重要な特徴が数値結果中に支持された。特に結果は、より大きなスケールに増えるエネルギーと飽和するまでその方向に拡大するスペクトルを伴って、強制波数よりも小さな波数における $k^{-5/3}$ エネルギースペクトルの予測と一致した。エイリアジング波数に明らかに関連する数値問題によって、より高い波数において予測される k^{-3} 領域はあまり明らかに検証されなかった。時間切断誤差と空間切断誤差を減らすことでこの問題を解消するための試みは効果的ではなかった。しかし高波数領域を 4 格子間隔の波長よ

りも非常に大きなスケールに拡大させることは改善につながった。それにもかかわらずエンストロフィー慣性小領域と、その粘性小領域への転移はまだうまく立証されていない。

数値計算に使われた強制関数はエネルギー注入とエンストロフィー注入の一定性を完全には満足していない。部分的な解析からこの不一致が強制関数の方程式中の移流項の欠落に関係があったことを示唆した。その欠落は、強制スケールの流れ場をより大きなスケールに発達した流れ場から幾分切り離そうとする。Kraichnanの予測の検証においてその問題はあまり重要ではなかった。

計算結果は地球大気の特徴と関係があるようである。特にその特徴は、大循環に関する最近の研究において得られた k^{-3} パワースペクトルを説明するかもしれない。太陽循環との考えられる関係も提唱される。最後に結果は二次元の数値計算の枠組みの範囲内での三次元乱流を数値計算する試験の妥当性への疑念を投げかける。

10 謝辞

国立大気研究センター (NCAR) の Control Data 6600 コンピュータによって数値計算が実行された。J. Olinger 氏と D. Fulker 氏によって、勤勉さ、洞察力そして創造性とともにコンピュータプログラミングが取り扱われた。著者は、R. Kraichnan 博士と C. E. Leith 博士とともに直接議論と連絡を行うことで知見を得た。本研究はアメリカ国立科学財団によって支援された。

謝辞

本研究を行うにあたり, 岩山隆寛准教授には論文読解から数値実験の解析に至るまで数々の指導をしていただきました. 林祥介教授には基礎理論講義を通じて乱流理論を教えていただきました. 高橋芳幸准教授には数値計算に関する知識を教えていただきました. 河合佑太氏にはスペクトル解析について解説していただきました. 皆さまに深く感謝申し上げます.

本研究で扱ったスペクトル解析には地球電脳倶楽部 `smodel` 開発グループによる階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL) を使用した.

参考文献

- [1] Douglas, K. Lilly, 1969: Numerical Simulation of Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, **12**, II -240.
- [2] Geoffrey, K. Vallis, 2006, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- [3] 岩山 隆寛, 2013: 2次元乱流の基礎理論,
URL:http://www2.kobe-u.ac.jp/~iwayama/teach/gfd/lecture_0924-26_rev.pdf
- [4] 九州大学大学院総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻 編, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 158-194 pp.