

## 2 レベル準地衡流モデルを用いた 傾圧不安定波に関する考察

堀之内龍一

神戸大学 地球惑星科学科  
地球及び惑星大気科学研究室

**2015/03/25**

## 要旨

本論文では, Phillips (1954) を参考に中緯度の大気の流れに見られる傾圧不安定波を研究する. 初めに 非粘性, 断熱を仮定した 2 レベル準地衡流方程式系を導出し, 考える系の境界条件を記述する. 次に導出した方程式系より線形化した摂動方程式を導き, 波動解を仮定して与えられた摂動が不安定となる条件を調べる. その後, 不安定条件を満たす基本場に与える影響を調べる. 最後に, 傾圧不安定波に伴って子午面循環が現れることを示す.

---

# 目次

第1章 序論	3
第2章 基礎方程式系	4
2.1 準地衡流方程式系	4
2.2 2レベルモデル	8
2.3 水平方向の境界条件	10
2.4 エネルギー方程式	12
第3章 線形摂動理論	15
3.1 摂動方程式	15
3.2 不安定の条件	16
第4章 摂動による基本場の変化	24
4.1 摂動の二次のオーダーによる基本場のジオポテンシャルの変化	24
4.2 摂動の二次のオーダーによる基本流速の変化	28
第5章 子午面循環	31
第6章 エネルギー変換	35

---

	2
第 7 章 結論	38
付録	39
謝辞	77
参考文献	78

# 第1章 序論

傾圧不安定波は中緯度の総観規模における大気循環を特徴付ける現象の一つである。傾圧不安定とは「傾圧大気が不安定である」ことを指す。ここで、傾圧大気とは、密度が圧力と温度に依存する大気と言う(小倉 1999)。このような大気では等圧面と等温面が交わり、等圧面上で水平温度傾度が存在する。一方で、不安定とは、静止や釣り合いの状態にある物体に僅かな乱れを与えたとき、元の状態に戻らずに、その乱れが増幅していくことを指す(伊藤ほか 2005)。中緯度の総観規模の大気において、たいていの場合は南北温度傾度が存在しており(つまり、傾圧性が存在する)、条件によって摂動は不安定となる。この不安定が傾圧不安定である。

本論文では、Phillips (1954)に基づき、線形摂動理論を用いて傾圧不安定を研究する。定常状態の安定性を考えるとき、場を基本場と基本場からの摂動に分解し、摂動の時間発展を記述する方程式(摂動方程式)から摂動が時間とともに増幅するか減衰するか調べる。線形摂動理論では、摂動を基本場の値と比べて非常に小さいと仮定し、摂動方程式を線形化して取り扱う。この線形摂動理論における仮定は上述した不安定の定義と合致しており、線形摂動理論を用いて不安定擾乱の発達を研究することは妥当であると言える。

本論文の構成を以下に簡単に述べる。まず、第2章では、基礎方程式系を導出する。具体的には、 $\beta$ 平面上における準地衡流方程式系を導出した後、2レベルモデルに適用する。さらに、考える系の境界条件とエネルギー方程式も記述する。第3章では、前章で導いた基礎方程式系より摂動方程式を導く。また、導いた摂動方程式に波動型の解を仮定し、与えられた摂動が不安定になる条件を求める。第4章では摂動の二次のオーダーが引き起こす基本場の変化を調べる。まず、基本場のジオポテンシャルの変化から、考えている領域での加熱及び冷却を調べる。次に、摂動により基本場の流速が変化することを示す。第5章では、東西平均した運動方程式と連続の式を用いて、傾圧不安定波に伴って子午面循環が現れることを示す。また、子午面循環が基本場の流速を変化させていることを示す。第6章では、不安定波におけるエネルギー変換を調べる。エネルギー方程式から摂動のエネルギーが基本場のポテンシャルエネルギーより生じていることを示す。

## 第2章 基礎方程式系

### 2.1 準地衡流方程式系

この節では、圧力座標系における準地衡流方程式系を導く。

圧力座標系 (東西方向を  $x$ , 南北方向を  $y$ , 鉛直方向を  $p$  とする) における静水圧平衡, 断熱, 非粘性流体を仮定した  $\beta$  平面上の運動方程式, 連続の式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} - f v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} + f u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (4)$$

ここで、時間を  $t$ , 東西方向の流速を  $u$ , 南北方向の流速を  $v$ , 圧力座標系における鉛直方向の流速を  $\omega$ , 密度を  $\rho$ , ジオポテンシャルを  $\varphi$  とした.  $f$  はコリオリパラメータで, 今  $\beta$  平面近似を仮定しているため,  $f = f_0 + \beta y$  である ( $f_0$  と  $\beta$  は, 地球の自転角速度を  $\Omega$ , 緯度を  $\phi$ , 半径を  $a$  とすると,  $f_0 = 2\Omega \sin \phi$ ,  $\beta = (2\Omega \cos \phi)/a$  である.). 中緯度における大気の総観規模の水平運動では, おおよそ地衡流平衡が成り立っている:

$$\begin{aligned} -f_0 v_g &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ f_0 u_g &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned}$$

ここで, 上式の左辺はコリオリの力であり (下付き文字  $g$  は地衡流速を示す), 右辺は圧力傾度力である.

中緯度総観規模の運動において, どの程度地衡流平衡が成り立っているかを確認するために, スケール解析を行って水平方向の運動方程式 (1), (2) の各項の大きさ

を見積もる. 今考えている中緯度における総観規模の特徴的な水平スケールを  $L$ , 鉛直方向の圧力の変動スケールを  $P$ , 水平速度の大きさのスケールを  $U$  として, 以下の様に見積もる:

$$L \sim 10^6[\text{m}], \quad P \sim 10^5[\text{Pa}], \quad U \sim 10[\text{ms}^{-1}]$$

以上の値を用いて運動方程式の偏微分の大きさを見積もると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\sim \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{L} \sim 10^{-6}[\text{m}^{-1}], \\ \frac{\partial}{\partial p} &\sim \frac{1}{P} \sim 10^{-5}[\text{Pa}^{-1}], \\ u \frac{\partial}{\partial x} &\sim v \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{U}{L} \sim 10^{-5}[\text{s}^{-1}], \\ \frac{\partial}{\partial t} &\sim \frac{U}{L} \sim fU \sim 10^{-5}[\text{s}^{-1}]. \end{aligned}$$

また, 連続の式 (4) より  $\omega$  の大きさは

$$\omega \sim \frac{PU}{L} \sim 1[\text{Pas}^{-1}]$$

程度であると見積もれる.

さらに,  $f \sim 10^{-4}$  として, 水平方向の運動方程式の各項の大きさを見積もると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x}, v \frac{\partial v}{\partial y}, \omega \frac{\partial u}{\partial p}, \omega \frac{\partial v}{\partial p} &\sim \frac{U^2}{L} \sim 10^{-4}[\text{ms}^{-2}], \\ fv, fu &\sim 10^{-3}[\text{ms}^{-2}] \end{aligned}$$

となる. したがって, 水平加速度とコリオリ力の項の比を取ると,  $U/fL \sim 0.1$  となる. ここで  $Ro \equiv U/fL$  はロスビー数と呼ばれる無次元数である. したがって, 中緯度の総観規模運動において  $Ro$  は 1 より十分小さいため, 水平加速度の項はコリオリ力の項よりも相対的に小さいことがわかる. また, コリオリ力の項は運動方程式の残りの項である気圧傾度力の項とバランスしなければならない. したがって, ロスビー数が 1 よりも十分小さい中緯度の総観規模運動において, 地衡流平衡は近似的に成り立つと言える. この近似はロスビー数が大きくなるにつれて成り立たなくなっていく. 今ロスビー数は 0.1 程度であるので, 地衡流速は実際の流速と比べて 10 % 程度の誤差を含んでいると言える.

このように, 中緯度の総観規模運動では近似的に地衡流平衡が成り立つ. しかし, 完全に地衡流平衡であれば, 水平非発散となり, 連続の式より鉛直流はゼロになってしまう. また完全に地衡流平衡であれば時間微分の項が無い為, 時間発展を予報

できない. 以上の二点の問題を解決するため, 中緯度の大気の流れを調べるために適切な, 地衡流の仮定を踏まえた方程式系 (準地衡流方程式系) を導く必要がある.

初めに, 風速を地衡流成分 (添字  $g$  で表す) と非地衡流成分 (添字  $a$  で表す) に分け,

$$u = u_g + u_a, \quad v = v_g + v_a$$

と書けるとする. 上述のスケーリングの議論より, 非地衡流成分は地衡流成分に比べて一桁小さい大きさで, ロスビー数と同じオーダーであると考えられる. したがって, ラグランジュ微分の移流項における水平方向の流速は地衡流成分に近似でき, 非地衡流である鉛直方向の流速は無視できる. つまり, ラグランジュ微分は次のように書ける:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + (u_g + u_a) \frac{\partial}{\partial x} + (v_g + v_a) \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \\ &\sim \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \\ &\equiv \frac{D_g}{Dt}. \end{aligned}$$

また,  $\beta y$  と  $f_0$  の大きさの比を取ると.

$$\frac{\beta L}{f_0} \sim \frac{\cos \phi L}{\sin \phi Re} \sim 0.1 \sim O(Re)$$

である. したがって, 微少量を無視すると,  $x$  方向の運動方程式 (1) は

$$\begin{aligned} \frac{D_g}{Dt}(u_g + u_a) &= (f_0 + \beta y)(v_g + v_a) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \iff \frac{D_g u_g}{Dt} &= f_0 v_g + f_0 v_a + \beta y v_g + \beta y v_a - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \iff \frac{D_g u_g}{Dt} &= f_0 v_a + \beta y v_g \end{aligned} \quad (5)$$

となる. 同様に  $y$  方向の運動方程式 (2) は

$$\frac{D_g v_g}{Dt} = -f_0 u_a - \beta y u_g \quad (6)$$

となり, 連続の式 (4) は

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

となる. (5), (6) をベクトル形式で書くと,

$$\frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g.$$

上式の鉛直方向の回転を取り、地衡流の関係式と連続の式を使うと、準地衡流の渦度方程式を導くことができる:

$$\frac{D_g(f + \zeta_g)}{Dt} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (8)$$

ここで  $\zeta_g$  は相対渦度の地衡流成分で  $\zeta_g = \partial v_g / \partial x - \partial u_g / \partial y = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \varphi$  である.

断熱を仮定した熱力学の式は

$$\frac{D_g(\ln \theta)}{Dt} = 0 \quad (9)$$

である. ここで、静水圧平衡からの摂動を考えて、温位、温度、ジオポテンシャルについて

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\Theta}(p) + \theta''(x, y, p, t), \\ T &= \bar{T}(p) + T''(x, y, p, t), \\ \varphi &= \bar{\Phi}(p) + \varphi''(x, y, p, t) \end{aligned}$$

とすると,

$$\omega \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \theta'' + \omega \frac{\partial \theta''}{\partial p} = 0$$

となる. ここで地衡流近似  $|\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p}| \gg |\frac{\partial \theta''}{\partial p}|$  より、上式は

$$\omega \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \theta'' = 0$$

となる. 温位の定義  $\theta = T(p_s/p)^\kappa$  より

$$\bar{T} \omega \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial p} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) T'' = 0. \quad (10)$$

また、静水圧平衡  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$  と、ジオポテンシャルの定義  $\varphi = gz$ , 理想気体の状態方程式  $\alpha = \frac{RT}{p}$  より,

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

であるので, (\*\*\*) は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \frac{\partial \varphi''}{\partial p} + \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} \right) \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial p} \omega = 0 \quad (11)$$

となる. ここで、 $\varphi''$  を  $\varphi$  に、 $\bar{\Phi}$  を  $\Phi$  に、 $\bar{\Theta}$  を  $\Theta$  に書き換えると、

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \frac{\partial \ln \Theta}{\partial p} \omega = 0 \quad (12)$$

となり、断熱を仮定した準地衡流の熱力学の式が導ける. したがって、準地衡流方程式系 (8), (12) を導くことができた.

## 2.2 2 レベルモデル

この節では、前節で導出した準地衡流方程式系を2レベルモデルに適用する。

現実の大気において、圧力や速度などの物理量は鉛直方向に連続的に変化する。しかし、この鉛直方向の連続性を加味した計算は容易ではない。したがって、本論文では簡単の為に図に示すような鉛直方向に離散化された系を考える。この様な系をレベルモデルと云う<sup>\*1</sup>。

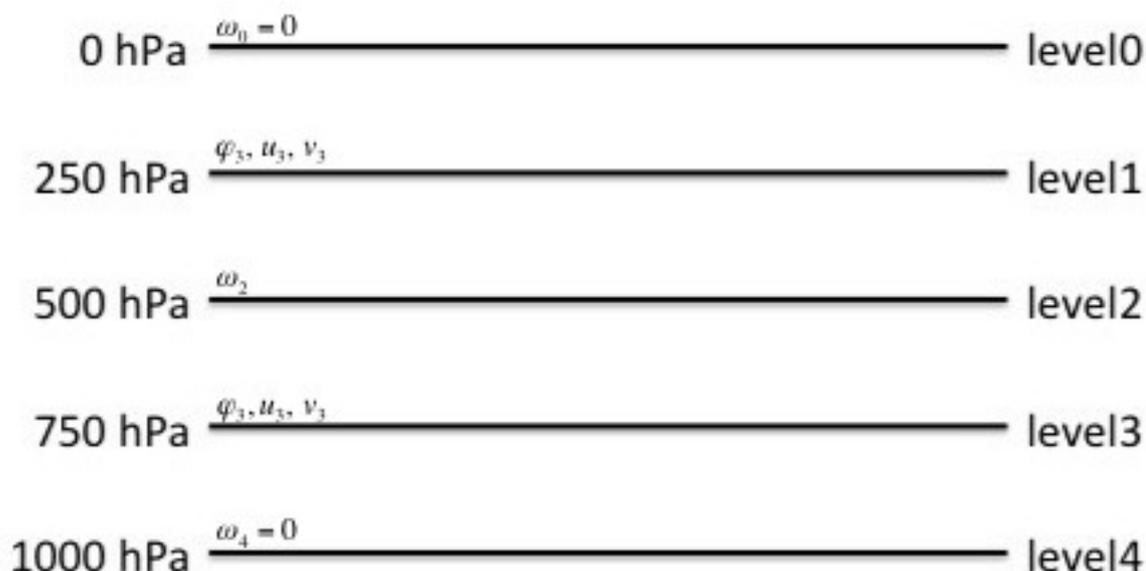


図 1: 2 レベルモデルの模式図

図 1 のように、0 hPa, 250 hPa, 500 hPa, 750 hPa, 1000 hPa の等圧面を level 0, 1, 2, 3, 4 として、level 2 より上層と下層の物理量をそれぞれ level 1 と 3 で測られた物理量で代表させる。今回考える 2 レベルモデルでは、運動方程式は level 1, 3 に適用し、熱力学の方程式は level 2 に適用する。また、level 0, 4 における  $\omega$  はゼロと仮定する:  $\omega_0 = \omega_4 = 0$ 。

<sup>\*1</sup>レベルモデルとは別に、レイヤーモデルと呼ばれるモデルも存在する。例えば 2 レイヤーモデルとは、流体は上層と下層の二層で構成され、それぞれの層は一定の密度を持つ流体から成っていると仮定するモデルである (Pedlosky 1987)。

準地衡流方程式系を 2 レベルモデルに適用すると次のように書ける<sup>\*2\*3</sup>:

$$\frac{D_1(f + \zeta_1)}{Dt} - \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{D_3(f + \zeta_3)}{Dt} + \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{D_2(\varphi_1 - \varphi_3)}{Dt} - \frac{2f_0^2\omega_2}{p_s\lambda^2} = 0. \quad (15)$$

下付き文字 1, 2, 3 はそれぞれ 250, 500, 750hPa の高度で測られた量を表している. 演算子  $D/Dt$  は,  $\nabla$  を等圧面に沿った水平勾配演算子,  $\mathbf{v}_g$  を水平地衡流の速度ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g1} \cdot \nabla, \\ \frac{D_2}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla, \\ \frac{D_3}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g3} \cdot \nabla \end{aligned}$$

<sup>\*2</sup>(13),(14) を導出する. である. (8) を今考えている 2 レベルモデルに適用する. まず, 渦度方程式を level 1 に適用すると,

$$\frac{D_g(\zeta_1 + f)}{Dt} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta p} \quad (*)$$

ここで,  $\Delta p$  は level 2 と level 0 の圧力差, 500hPa で,  $\Delta p = p_s/2$  より, (\*) は結局,

$$\frac{D_1(f + \zeta_1)}{Dt} - \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0 \quad (13)$$

となり, (13) が導けた. (8) を level 3 に適用することで (14) も同様にして導ける.

<sup>\*3</sup>(15) を導出する. (11) を level 2 に適用すると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla \right) \frac{\varphi_3'' - \varphi_1''}{\Delta p} + \frac{(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_1)}{\Delta p} \left( \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial p} \right)_2 \omega_2 = 0$$

この両辺に  $\Delta p$  をかけると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla \right) (\varphi_3'' - \varphi_1'') + \frac{(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_1)}{\Delta p} \left( \frac{\partial \ln \bar{\Theta}}{\partial p} \right)_2 \Delta p \omega_2 = 0$$

である. この左辺二項目について,  $\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} \Delta p = \bar{\Theta}_3 - \bar{\Theta}_1$  と書き換えると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla \right) (\varphi_3'' - \varphi_1'') + \frac{(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_1)}{\Delta p} \frac{1}{\bar{\Theta}_2} (\bar{\Theta}_3 - \bar{\Theta}_1) \omega_2 = 0$$

となり,  $\varphi''$  を  $\varphi$  に,  $\bar{\Phi}$  を  $\Phi$  に,  $\bar{\Theta}$  を  $\Theta$  に書き換え,  $\lambda^2 = \frac{f^2}{\Phi_1 - \Phi_3} \left[ \frac{\Theta_2}{(\Theta_1 - \Theta_3)} \right]$  とラグランジュ微分の定義を導入すると,

$$\frac{D_2(\varphi_1 - \varphi_3)}{Dt} - \frac{2f_0^2\omega_2}{p_s\lambda^2} = 0 \quad (15)$$

が導ける.

である。ただし、 $v_{g2}$  は  $v_{g2} = \frac{v_{g1} + v_{g3}}{2}$  で求められる。  $\zeta_1, \zeta_3$  は level 1 と level 3 における相対渦度である。  $\omega_2$  は level 2 における  $Dp/Dt$  の値に等しい。  $\lambda^2$  は定数であると仮定されていて、

$$\lambda^2 = \frac{f_0^2}{\Phi_1 - \Phi_3} \left[ \frac{\Theta_2}{(\Theta_1 - \Theta_3)} \right]$$

の関係式で定義する。  $\Theta$  は温位で、  $\Phi_1 - \Phi_3$  は level 1 と level 3 間のジオポテンシャルの差の典型的な値を表す。  $p_s$  は地表における圧力の値で、  $p_s = 1000$  hPa としている。

## 2.3 水平方向の境界条件

この節では本論文で考える系の水平方向の境界条件を記述する。

中緯度の大気は  $y = \pm w$  において鉛直方向に無限に伸びた固定壁で緯度方向に制限されているものとして表現する。 また、  $x$  方向には周期的な連続性、つまり  $x = L$  での運動は  $x = 0$  と等しいとする。 本論文で採用した水平方向の流れの領域の模式図を図 2 に示した。

(13), (14), (15) の解には  $x = 0, x = L$  での周期的条件に加えて  $y = \pm w$  での境界条件が必要である。 壁での運動学的境界条件は  $y = \pm w$  で  $v = 0$  である。 地衡流的に、これは次のことを示している：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = \pm w. \quad (16)$$

このように、任意の  $t$  の値において、壁での  $\varphi$  は  $x$  に伴って変化してはならない。 しかしながら、この定数  $\varphi$  は時間とともに変化しても良いので、これは (13), (14), (15) の唯一の解を決定するのに十分ではない。 もう一つの条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

を  $x$  に関して積分し、  $v = 0$  を用いることで得られる。  $\frac{\partial u}{\partial t}$  を除く全ての項が消去され、地衡流的に、

$$\int_0^L \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \right) dx = 0, \quad y = \pm w \quad (17)$$

を得る<sup>\*4</sup>。 (16) とともに、これは (13), (14), (15) の解を唯一決定するには十分であ

<sup>\*4</sup>(17) を導出する。 東西方向の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (*)$$

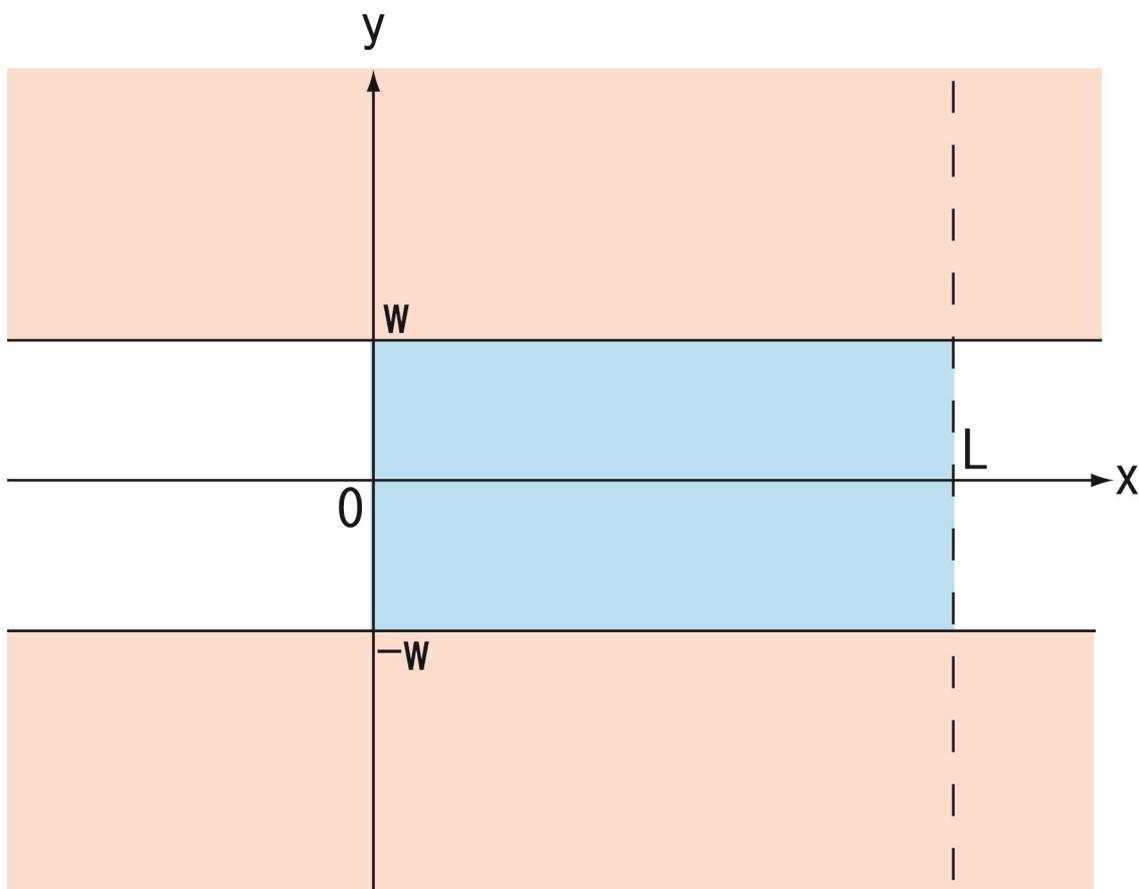


図 2: 水平方向の流れの模式図. 今回考える領域は青色の領域である.  $x$  方向には  $x=0$  と  $x=L$  において周期境界条件が仮定されており,  $y$  方向には  $y=\pm w$  に壁が仮定されている (赤色で表している部分.).

を  $x$  について 0 から  $L$  まで積分することを考える. ある量  $A$  について,

$$\frac{\partial A}{\partial x} \equiv \int_0^L \frac{\partial A}{\partial x} dx = A(L, y, p, t) - A(0, y, p, t) = 0$$

が成り立つ (ただし, 周期境界条件を使った). これを用いると (\*) の左辺第二項 ( $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2} u^2)$ ) に注意すると第四項はゼロである. よって結局 (\*) の積分は,

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx = 0$$

となり, (17) が導ける.

る<sup>\*5</sup>.

## 2.4 エネルギー方程式

この節ではエネルギー方程式を二通りの方法で導出する. 一つ目の方法は水平方向の運動方程式より地衡流近似を用いずにエネルギー方程式を導くもので, 二つ目は地衡流近似を取り入れた準地衡流渦度方程式よりエネルギー方程式を導く方法である. 二通りの方法で導出を行うことで, 準地衡流方程式 (8), (12) と境界条件 (16), (17) が力学的エネルギー方程式と無矛盾であることを示す.

初めに, 地衡流近似を用いない導出を行う.  $x, y, p, t$  系の水平方向の運動方程式に  $u, v$  をかけた 2 式を加えることで

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q + \omega \frac{\partial q}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (18)$$

が得られる. ここで,  $q$  は単位質量当たりの水平運動エネルギー,  $q = (u^2 + v^2)/2$  である. この座標系の連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (19)$$

を用いて, (18) の別の型を導く<sup>\*6</sup>:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q + \varphi) \mathbf{v} + \frac{\partial(\omega q)}{\partial p} + \varphi \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (20)$$

<sup>\*5</sup>ただし, 領域全体に渡って  $\partial(\varphi_1 + \varphi_3)/\partial t$  の平均値により決定された積分の定数を除く. この積分定数はこの論文の残りの部分に現れるだろう結論に全く何の役割も果たさない; したがって, 便利のためにゼロに等しいと置いている.

<sup>\*6</sup>(20) を導出する.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q + \omega \frac{\partial q}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0$$

において, 左辺第二, 三, 四項を変形すると,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot q \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) q + \frac{\partial}{\partial p}(\omega q) - \left( \frac{\partial}{\partial p} \omega \right) q + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \varphi = 0$$

となるが, 左辺第三, 五項は連続の式 (4) を用いると打ち消しあってゼロとなる. また, 連続の式 (4) より左辺第七項を変形して,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q + \varphi) \mathbf{v} + \frac{\partial(\omega q)}{\partial p} + \varphi \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (15)$$

が得られる.

今, (18) を level 1 と level 3 に適用した 2 つの式を足し合わせ, その結果を  $-w \leq y \leq w$ ,  $0 \leq x \leq L$  の範囲で積分すると, 結局

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint (q_1 + q_2) dx dy + \frac{2}{p_s} \iint (\varphi_1 - \varphi_3) \omega_2 dx dy = 0 \quad (21)$$

となる<sup>\*7</sup>. これは 2 レベルモデルにおける運動エネルギー方程式である. 全運動エネルギー  $q_1 + q_2$  は層厚  $(\varphi_1 - \varphi_3)$  と  $\omega_2$  の相関の結果として変わるだろうということを示している.

二つ目の方法は, 地衡流近似を用いた導出である. つまり,  $\omega_2$  と運動エネルギー  $q$  が地衡流的に (13), (14), (15) と境界条件 (16), (17) によって決定されれば, (21) が満たされることを示そう.

(13) と (14) は

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}}{f_0} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla (f + \zeta_1) - \frac{2f_0 \omega_2}{p_s} &= 0, \\ \frac{\nabla^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}}{f_0} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla (f + \zeta_3) + \frac{2f_0 \omega_2}{p_s} &= 0 \end{aligned}$$

<sup>\*7</sup>(21) を導出する. (18) を level 1 と level 3 にそれぞれ適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \nabla \cdot (q_1 + \varphi_1) \mathbf{v}_1 + \frac{\omega_2 q_2 - \omega_0 q_0}{p_2 - p_s} + \varphi_1 \frac{\omega_2 - \omega_0}{p_2 - p_s} &= 0, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} + \nabla \cdot (q_3 + \varphi_3) \mathbf{v}_3 + \frac{\omega_4 q_4 - \omega_2 q_2}{p_s - p_2} + \varphi_3 \frac{\omega_4 - \omega_2}{p_s - p_2} &= 0 \end{aligned}$$

である. 今,  $\omega_0 = \omega_4 = 0$ ,  $p_2 - p_s = p_s - p_2 = p_s/2$  であるので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \nabla \cdot (q_1 + \varphi_1) \mathbf{v}_{g1} + \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} + \frac{2\omega_2 \varphi_1}{p_s} &= 0, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} + \nabla \cdot (q_3 + \varphi_3) \mathbf{v}_{g3} - \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} - \frac{2\omega_2 \varphi_3}{p_s} &= 0 \end{aligned}$$

となる. 二式を  $x$  と  $y$  について積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \int_{-w}^w dy \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \nabla \cdot (q_1 + \varphi_1) \mathbf{v}_{g1} + \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} + \frac{2\omega_2 \varphi_1}{p_s} \right\} &= 0, \\ \int_0^L dx \int_{-w}^w dy \left\{ \frac{\partial q_3}{\partial t} + \nabla \cdot (q_3 + \varphi_3) \mathbf{v}_{g3} - \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} - \frac{2\omega_2 \varphi_3}{p_s} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

である. ここで, 発散項は積分するとゼロであることに気をつけて二式を加えると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L dx \int_{-w}^w dy (q_1 + q_2) + \int_0^L dx \int_{-w}^w dy \frac{2\omega_2}{p_s} (\varphi_1 - \varphi_3) = 0 \quad (21)$$

となり, (21) が導けた.

と書ける\*8. ここで,  $\partial\zeta/\partial t$  に地衡流近似を導入した. これら 2 本の方程式にそれぞれ  $-\varphi_1$  と  $-\varphi_3$  を掛け, 恒等式  $\nabla \cdot \varphi \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varphi \nabla^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t}$  を用い, 加えると,

$$\begin{aligned} & \frac{(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \nabla\varphi_3 \cdot \nabla \frac{\partial\varphi_3}{\partial t})}{f_0} - \frac{\nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \varphi_3 \nabla \frac{\partial\varphi_3}{\partial t})}{f_0} \\ & - [\varphi_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla(f + \zeta_1) + \varphi_3 \mathbf{v}_3 \cdot \nabla(f + \zeta_3)] + \frac{2f(\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2}{p_s} = 0 \end{aligned}$$

を得る. この方程式の  $\mathbf{v}_1$  と  $\mathbf{v}_3$  は地衡流速である. さらに, この方程式を  $-w \leq y \leq w$ ,  $0 \leq x \leq L$  の領域に渡って積分し, 境界条件 (16) と (17) を使えば二項目と三項目が消える (係数としての  $f_0$  が定数であることに留意せよ). そして残るのは

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2f_0} [(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_3)^2] dx dy + \frac{2f_0}{p_s} \iint (\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2 dx dy = 0 \quad (22)$$

である\*9.  $f_0$  で割ると, これは (21) と等しい.

\*8 上式を導出する. 渦度を地衡流近似を用いて書き換えると,

$$\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \varphi$$

である. これと, ラグランジュ微分の定義を (13), (14) に導入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla^2 \varphi_{1t}}{f_0} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta_1) - \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0, \\ & \frac{\nabla^2 \varphi_{3t}}{f_0} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta_3) + \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0 \end{aligned}$$

が導ける.

\*9 (22) を導出する.

$$\begin{aligned} & \frac{(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \nabla\varphi_3 \cdot \nabla \frac{\partial\varphi_3}{\partial t})}{f_0} - \frac{\nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \varphi_3 \nabla \frac{\partial\varphi_3}{\partial t})}{f_0} \\ & - [\varphi_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla(f + \zeta_1) + \varphi_3 \mathbf{v}_3 \cdot \nabla(f + \zeta_3)] + \frac{2f(\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2}{p_s} = 0 \end{aligned}$$

を  $-w \leq y \leq w$ ,  $0 \leq x \leq L$  の領域に渡って積分することを考える. まず, 左辺第二項は境界条件 (16), (17) より積分するとゼロになる. 左辺第三項であるが,

$$\begin{aligned} \varphi \mathbf{v}_g \cdot \nabla(f + \zeta) &= \varphi \nabla \cdot [(f + \zeta) \mathbf{v}_g] - \varphi(f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{v}_g \\ &= \nabla \cdot [(f + \zeta) \varphi \mathbf{v}_g] - (f + \zeta) \mathbf{v}_g \cdot \nabla \varphi \end{aligned}$$

と式変形すると (一段目の最終項は非圧縮の条件よりゼロ, 二段目の最終項は地衡流の関係式  $u = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ,  $v = \frac{1}{f_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}$  よりゼロであることに注意する.), 左辺第二項と同様に積分するとゼロとなることがわかる. したがって, 残った左辺第一, 四項を積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2f_0} [(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_3)^2] dx dy + \frac{2f_0}{p_s} \iint (\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2 dx dy = 0 \quad (22)$$

が導ける.

## 第3章 線形摂動理論

### 3.1 摂動方程式

この節では前節で導出した 2 レベルモデルに適用した準地衡流方程式系から、摂動方程式を導く。

今、基本流は  $x$  について平均すると云う過程により定義する：そのような東西平均の演算はバー-を付けて示し、東西平均した量を大文字で示している。東西平均からのずれはプライム'を付けて示される。この表記を用いて方程式 (13), (14) を加えることで、あるいは (13) から (14) を引き (15) を用いることで、以下の 2 式を導ける：

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla \right] (\zeta_1 + \zeta_3 + 2f) + \mathbf{v}_T \cdot \nabla (\zeta_1 - \zeta_3) = 0 \quad (23a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla \right] \left\{ (\zeta_1 - \zeta_3) - \frac{2\lambda^2}{f_0} (\varphi_1 - \varphi_3) \right\} + \mathbf{v}_T \cdot \nabla (\zeta_1 + \zeta_3 + 2f) = 0 \quad (23b)$$

ここで、 $f_0, \beta, \lambda$  は定数である。  $\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_T$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3), \\ \mathbf{v}_T &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) \end{aligned}$$

と定義し (ただし、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$  はそれぞれ level 1 と level 3 における水平速度ベクトルである)、 $\mathbf{v}_m$  は平均東西流、 $\mathbf{v}_T$  は平均温度風を示す。また (23a) は level 1 と level 3 の平均あるいは共通した擾乱を表し、順圧の渦度方程式である。他方で (23b) は level 1 と level 3 の擾乱の差を表し、傾圧の渦度方程式である。

(23) を  $x$  について平均し、二式を加えることで、あるいは差し引くことで、以下

の平均場の時間変化率の方程式が得られる:

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y y t} - \lambda^2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right) = \frac{\left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [\nabla^2 \varphi'_1 - \lambda^2 (\varphi'_1 - \varphi'_3)]}{f_0}, \quad (24a)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial y y t} + \lambda^2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right) = \frac{\left[ \frac{\partial \varphi'_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [\nabla^2 \varphi'_3 + \lambda^2 (\varphi'_1 - \varphi'_3)]}{f_0}. \quad (24b)$$

このように、 $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$  や  $\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}$  で書かれる基本場の時間変化率は、基本流からのずれの非線形の相関から生じる応力項により影響を受ける。摂動論では基本場からのずれ  $\varphi'_1$  と  $\varphi'_3$  は一次のオーダーの小さい量であると考えるので、(24) より  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}$  と  $\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}$  はせいぜい摂動の二次のオーダーのということがわかる。

今、 $\Phi_1$  と  $\Phi_3$  は  $y$  についての線形の関数であると云う追加の仮定を行うことで、(23) における一次の項を取り出す: つまり、基本流速  $U_1 = -f_0^{-1} \Phi_{1y}$  と  $U_3 = -f_0^{-1} \Phi_{3y}$  は初めは  $y$  と独立であると云うことを仮定する (しかしながら、この制限を二次の量  $\frac{\partial U_1}{\partial t}$  と  $\frac{\partial U_3}{\partial t}$  には適用しないことに気をつけよ)。この仮定により、線形化された順圧の渦度方程式、傾圧の渦度方程式:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \right] (\nabla^2 \varphi'_1 + \nabla^2 \varphi'_3) \\ & + \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi'_3}{\partial x} \right) \beta + U_T \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \varphi'_1 - \nabla^2 \varphi'_3) = 0, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_m \frac{\partial}{\partial x} \right] \{ \nabla^2 \varphi'_1 - \nabla^2 \varphi'_3 - 2\lambda^2 (\varphi'_1 - \varphi'_3) \} \\ & + \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_3}{\partial x} \right) \beta + U_T \frac{\partial}{\partial x} \{ \nabla^2 \varphi'_1 + \nabla^2 \varphi'_3 + 2\lambda^2 (\varphi'_1 + \varphi'_3) \} = 0 \end{aligned} \quad (25b)$$

が導ける。さらに、上の二つの式を加えることで、あるいは差し引くことで、level 1 と level 3 に関する線形化された摂動方程式が得られる:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \varphi'_1 - \lambda^2 (\varphi'_1 - \varphi'_3)] + [\beta + \lambda^2 (U_1 - U_3)] \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} = 0, \quad (26a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_3 \frac{\partial}{\partial x} \right] [\nabla^2 \varphi'_3 + \lambda^2 (\varphi'_1 - \varphi'_3)] + [\beta - \lambda^2 (U_1 - U_3)] \frac{\partial \varphi'_3}{\partial x} = 0. \quad (26b)$$

## 3.2 不安定の条件

この節では、前節で導いた線形化された摂動方程式に波動解を与え、擾乱が不安定になる条件を考察する。

簡便のために、以下を定義する:

$$\begin{aligned}
 V &\equiv \frac{1}{2}(U_1 - U_3), \\
 B &\equiv \frac{\beta}{\lambda^2}, \\
 \mu &\equiv \frac{\pi}{2w}, \\
 k &\equiv \frac{2\pi}{L}, \\
 \alpha &\equiv \frac{(k^2 + \mu^2)}{\lambda^2}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

ここで、各変数の物理的意味を確認しておく。  $V$  は  $\mathbf{v}_T$  の基本場の  $x$  成分で、鉛直方向の東西速度シアである。これは温度風の関係式より南北方向の温度差と結びつき、大気の傾圧性を表す。  $B$  は  $\beta$  を速度の次元を持つようにしたものである。  $\mu$  は南北波数、  $k$  は東西波数をそれぞれ表し、  $\alpha$  は無次元化された全波数を表す。 (25) は波型の解  $\varphi' \sim \cos \mu y \exp ik(x - ct)$  を持つだろう。  $\cos \mu y$  の項は境界条件 (16) を満

たすために存在している<sup>\*10</sup>. 位相速度  $c$  は以下の方程式を満たさねばならない<sup>\*11</sup>:

$$c = \frac{1}{2}(U_1 + U_3) + \frac{-(1 + \alpha)B \pm \sqrt{B^2 - \alpha^2(4 - \alpha^2)V^2}}{\alpha(2 + \alpha)}. \quad (28)$$

$\alpha$  の与えられた値に対して  $c$  は 2 つの値を取り得ることがわかる. また,  $\alpha < 2$  のとき,  $c$  は複素数となり得ることがわかる. 複素数  $c$  に対する正確な条件は

$$V^2\alpha^2(4 - \alpha^2) > B^2 \quad (29)$$

である.  $c$  が虚部を持つと云うことは, 摂動が時間に従って増幅するか減衰するかと云うことを意味する. 本研究では, 実際の中緯度大気における擾乱の代表的なものを見なしている増幅の型に興味がある. これらは (29) が満たされるときに, (28) の正符号を取ることで得られる. この場合, 擾乱  $\varphi'_1$  や  $\varphi'_3$  は以下の式によって与え

<sup>\*10</sup>波型の解  $\varphi' \sim \cos \mu y \exp ik(x - ct)$  が境界条件を満たすことを示す. まず南北方向の境界条件 (16) から考える.  $y = \pm w$  のとき,  $w = \pi/2\mu$  より  $\cos \mu y = 0$  となるので,  $\varphi'(\pm w) = 0$  であり, (16) を満たす. 続いて東西の周期境界条件を考える.  $x = 0$  と  $x = L$  での値が等しくならなければならないので  $e^{ikx} = e^{ik(x+L)} = e^{ikx}e^{ikL}$ . ここで,  $e^{ikL} = 1$  となるには  $kL = 2\pi$  でないといけない. よって  $k = 2\pi/L$  とおかななくてはならない.

<sup>\*11</sup>(28) を導出する. (25a) のに波型の解  $\varphi'_m = X_m \cos \mu y \exp[ik(x - ct)]$  を代入すると,

$$\{[c - U_m](k^2 + \mu^2) + \beta\}X_m - U_T(k^2 + \mu^2)X_T = 0. \quad (*)$$

同様にして (25b) に波動解  $\varphi'_T = X_T \cos \mu y \exp[ik(x - ct)]$  を代入すると,

$$\{[c - U_m](k^2 + \mu^2 + 2\lambda^2) + \beta\}X_T - U_T(k^2 + \mu^2 - 2\lambda^2)X_m = 0. \quad (**)$$

(\*), (\*\*) をまとめると,

$$\begin{pmatrix} [c - U_m](k^2 + \mu^2) + \beta & -U_T(k^2 + \mu^2) \\ -U_T(k^2 + \mu^2 - 2\lambda^2) & [c - U_m](k^2 + \mu^2 + 2\lambda^2) + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_m \\ X_T \end{pmatrix} = 0.$$

(27) の定義を用いて上式を書き直すと,

$$\begin{pmatrix} [c - U_m]\alpha + B & -V\alpha \\ -V(\alpha + 2) & [c - U_m](\alpha + 2) + B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_m \\ X_T \end{pmatrix} = 0.$$

ここで,  $X_m, X_T$  が存在するためには,

$$\{[c - U_m]\alpha + B\}\{[c - U_m](\alpha + 2) + B\} - V^2\alpha(\alpha + 2) = 0$$

を満たさなければならない.  $c - U_m$  についての二次式となるよう整理すると,

$$[\alpha(\alpha + 2)][c - U_m]^2 + 2[(\alpha + 1)B][c - U_m] - V^2\alpha(\alpha - 2) + B^2 = 0.$$

したがって二次方程式の解の公式を用いて, 項を整理すると,

$$c = \frac{1}{2}U_m + \frac{-(1 + \alpha)B \pm \sqrt{B^2 - \alpha^2(4 - \alpha^2)V^2}}{\alpha(2 + \alpha)}. \quad (28)$$

となり, (28) が導ける.

られることを示せる:

$$\varphi'_1 = \sigma D e^{\nu_i t} \cos \mu y \cos[k(x - c_r t) + \psi], \quad (30a)$$

$$\varphi'_3 = D e^{\nu_i t} \cos \mu y \cos k(x - c_r t). \quad (30b)$$

擾乱の絶対的振幅を決定する定数  $D$  は, (26) の線形性のために完全に任意で, 決定できない. しかしながら, 相対的振幅  $\sigma$  は決定され, 位相角  $\psi$  も同様に決定され

る<sup>\*12</sup>:

$$\sigma = \left[ \frac{(2\alpha V + B)}{(2\alpha V - B)} \right]^{1/2}, \quad (31)$$

$$\tan \psi = (2 + \alpha) \frac{\nu_i}{k\alpha V}.$$

ここで,  $\nu_i = kc_i$  は擾乱が指数関数的に成長する際の時定数であり, 擾乱の成長率

<sup>\*12</sup>(30), (31) を導出する. まず, (26a) に波型の解  $\varphi'_1 = X_1 \cos \mu y \exp[ik(x - ct)]$  を代入すると,

$$[-ikc + U_1 ik][ -k^2 X_1 - \mu^2 X_1 - \lambda^2 (X_1 - X_3) ] + [\beta + \lambda^2 (U_1 - U_3)] ik X_1 = 0.$$

両辺  $ik\lambda^2$  で割ると,

$$[U_1 - c] \left[ - \left( \frac{k^2 + \mu^2}{\lambda^2} + 1 \right) X_1 + X_3 \right] + \left[ \frac{\beta}{\lambda^2} + (U_1 - U_3) \right] X_1 = 0$$

(27) より各変数の定義を導入すると,

$$[-(U_1 - c)(\alpha + 1) + (B + 2V)]X_1 + [U_1 - c]X_3 = 0.$$

同様にして, (26b) に波動解  $\varphi'_3 = X_1 \cos \mu y \exp[ik(x - ct)]$  を代入すると,

$$[-(U_3 - c)(\alpha + 1) + (B - 2V)]X_3 + [U_3 - c]X_1 = 0.$$

上の二式をまとめると,

$$\begin{pmatrix} -(U_1 - c)(\alpha + 1) + (B + 2V) & U_1 - c \\ U_3 - c & -(U_3 - c)(\alpha + 1) + (B - 2V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0.$$

$X_3 = D$  とおき, 整理すると,

$$X_1 = \alpha + 1 - \frac{B - 2V}{U_3 - c} D$$

となる. ここで,  $c$  を複素数として  $c = c_r + ic_i$  と置き, 実部と虚部にまとめ直すと,

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{Re}[X_1]D + \text{Im}[X_1]D \\ &= \frac{(\alpha + 1)\{(U_3 - c_r)^2 + c_i^2\} - (B - 2V)(U_3 - c_r)}{(U_3 - c_r)^2 + c_i^2} D - i \frac{(B - 2V)c_i}{(U_3 - c_r)^2 + c_i^2} D \end{aligned}$$

である. 一般に複素数  $z$  に対して, 実部を  $x$ , 虚部を  $y$  とすると,

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left[ i \tan^{-1} \frac{y}{x} \right]$$

が成り立つので,  $\sigma = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\tan \psi = y/x$  として計算すると,

$$\sigma = \left[ \frac{(2\alpha V + B)}{(2\alpha V - B)} \right]^{1/2}, \quad (31)$$

$$\tan \psi = (2 + \alpha) \frac{\nu_i}{k\alpha V}$$

となり (31) が導ける. また,  $X_1 = \sigma D e^{i\psi}$ ,  $X_3 = D$  を  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_3$  に代入すると (30) が導ける.

と考えられる. 成長率  $\nu_i$  は次のように与えられる:

$$\nu_i = k \frac{[\alpha^2(4 - \alpha^2)V^2 - B^2]^{1/2}}{[\alpha(2 + \alpha)]}. \quad (32)$$

このように, 増幅波 ( $\nu_i > 0$ ) における  $\varphi'_1$  の波は振幅が  $\varphi'_3$  より大きくなり, さらに  $\nu_i > 0$  では  $\varphi'_1$  は  $\varphi'_3$  より位相が遅れる<sup>\*13</sup>. 実の位相速度  $c_r$  は以下によって与えられる:

$$c_r = \frac{1}{2}(U_1 + U_3) - \frac{(1 + \alpha)B}{[\alpha(2 + \alpha)]}.$$

与えられた擾乱が二倍の大きさになるために必要な時間  $\tau = \nu_i^{-1} \ln 2$ <sup>\*14</sup> は, 東西風の鉛直シア  $dU/dz$  と波長  $L$  の関数として図 3 に示されている. 使用される他のパラメタの数値は以下の通りである<sup>\*15</sup>:

$$\begin{aligned} \{\Phi_1 - \Phi_3\} &= 9.81 \times 8.16 \times 10^3 \text{m}^2 \text{sec}^{-2}, \\ \frac{\Theta_2}{(\Theta_1 - \Theta_3)} &= \frac{316}{36} \sim 8.8, \\ \mu &= \frac{3}{R_e}, \\ \frac{dU}{dz} &= \frac{2gV}{\Phi_1 - \Phi_3}. \end{aligned} \quad (33)$$

$R_e$  は地球の半径で, 距離  $2w$  は緯度幅 60 度に対応している. 定数  $f_0, \beta$  は緯度 45 度で見積もった. 図より,  $\tau = \infty$  の曲線より上側で擾乱が不安定となることがわかり, 波長が約 4000 km より短い不安定擾乱は存在しないことが読み取れる.

Phillips (1954) によると, Hess (1948) の観測では冬半球の子午面断面における東西風の鉛直シアの平均値は約  $2.3 \text{m sec}^{-1} \text{km}^{-1}$  で, 最大値は約  $4.3 \text{m sec}^{-1} \text{km}^{-1}$  である. これらの値を図 3 における  $dU/dz$  と比べると, 擾乱が二倍の大きさになるために 1 ~ 3 日の時間を必要としていると云うことに対応していると読み取れる. これは高層天気図などに実際に現れる高気圧や低気圧の成長の時間スケールとおおよそ合っている.

また, 図 3 より, 最大の不安定の波長は約 6000 km である. これは北緯 45 度に

<sup>\*13</sup>  $\nu_i > 0$  のとき,  $\psi > 0$  となり (30) より  $\varphi'_1$  の方が  $\varphi'_3$  よりも遅れていることがわかる.

<sup>\*14</sup> 擾乱が二倍の大きさになる時間  $\tau$  を求める. 擾乱  $\varphi'$  の振幅が二倍になるためには,

$$De^{\nu_i(t+\tau)} = 2De^{\nu_i t}$$

を  $\tau$  について解けば良い. したがって  $\tau = \nu_i^{-1} \ln 2$  となる.

<sup>\*15</sup> 付録 B にて詳しく導出あるいは見積もる.

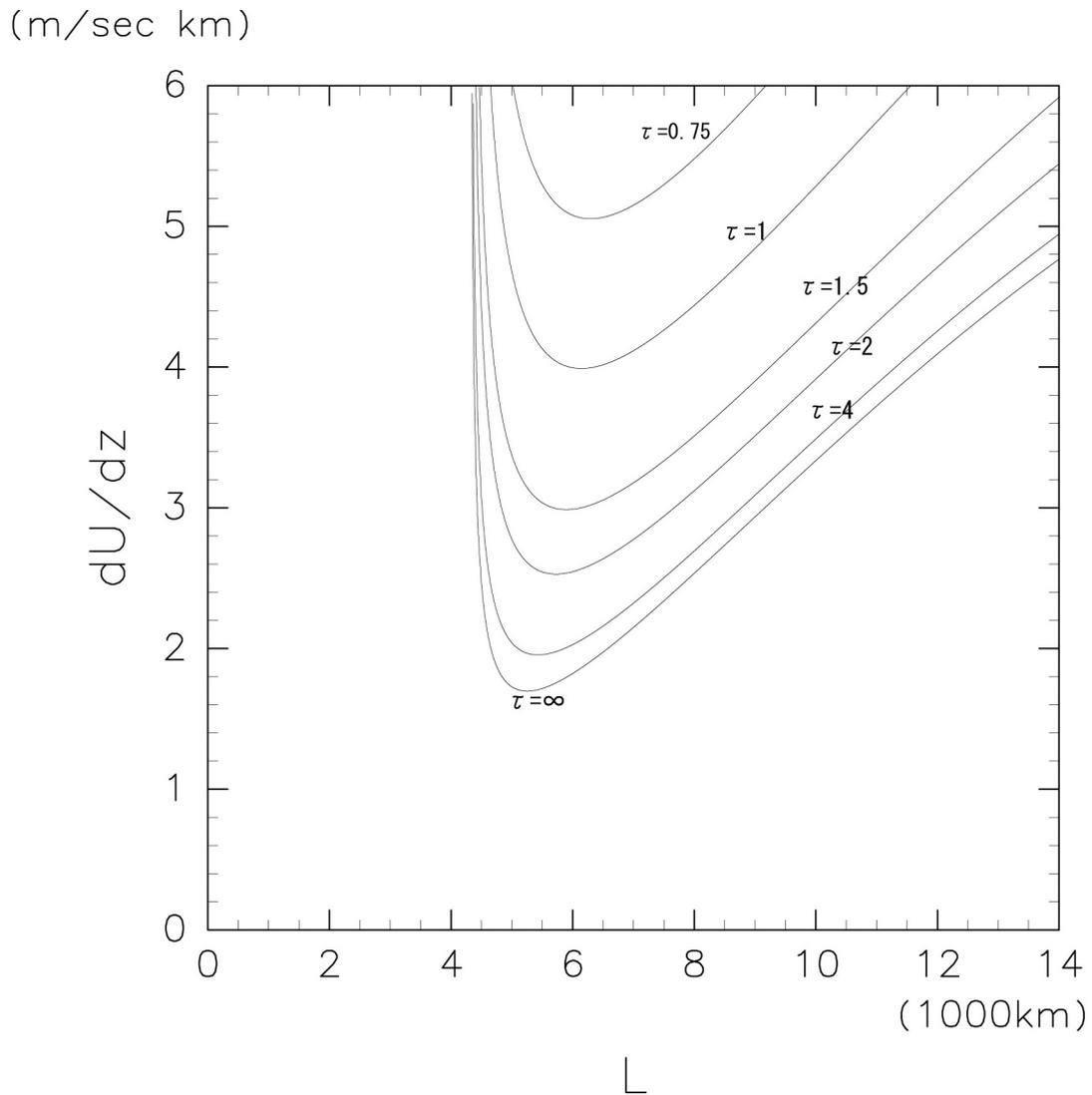


図 3: 不安定曲線. 横軸は擾乱の東西波長  $L$ , 縦軸は基本場の東西風の鉛直シア  $dU/dz$  で, ラベリングされた  $\tau$  は擾乱が二倍になるまでの時間 (単位は day) を表している. 点線は曲線の極値を結んだものである.

おける波数, 約 5 に対応している<sup>\*16</sup>. この値も実際の天気図に現れる高気圧や低

<sup>\*16</sup>最大の不安定の波長 6000km が北緯 45 度における波長, 約 5 に対応しているかどうかを示す.

$$\frac{2\pi \frac{R_e}{\sqrt{2}}}{k} = 6000$$

気圧の空間スケールと合致していると言えるだろう.

---

を  $k$  について解くと (ただし,  $\frac{6000}{R_e} \sim 0.94$  とした),  $k \sim 4.7$  となる.

## 第4章 摂動による基本場の変化

擾乱の具体的な形が与えられると, 方程式 (24) と境界条件 (17) より, 基本流の時間発展を調べることができる. 摂動理論は一次のオーダーに対して正しい摂動  $\varphi'_1$  と  $\varphi'_3$  の表現を与えてきた. したがって, 我々は, 摂動の二次のオーダーに対して正しい基本場の変化の見積もりを行う.

### 4.1 摂動の二次のオーダーによる基本場のジオポテンシャルの変化

(24) の右辺を見積もるために, (30) を使うことで  $\nabla^2 \varphi'$  を含む項が落ちることがわかる. つまり, 摂動の渦度の摂動による移流はゼロと云うことである. これは  $U_1$  と  $U_3$  が (初めは)  $y$  に独立であると云う仮定の結果である. 摂動の速度による摂動の厚さの移流を表している他の項は落ちない. (24) は次のように書かれることが

わかる<sup>\*17</sup>:

$$\Phi_{1\xi t} - \gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) = -\frac{1}{2}A \sin 2\xi, \quad (34a)$$

$$\Phi_{3\xi t} + \gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) = \frac{1}{2}A \sin 2\xi. \quad (34b)$$

<sup>\*17</sup>(34), (35) を導出する. まず, 本文中にあるように (24) の右辺の内,  $\nabla^2 \varphi'$  の項が落ちることを確認する. (24a) より  $\nabla^2 \varphi'$  に比例する項のみ取り出すと (定数  $f_0$  は省略している),

$$\overline{\left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [\nabla^2 \varphi']}$$

である. これに (30) を代入すると,

$$\overline{\left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [-(k^2 + \mu^2)\varphi'_1]} = -(k^2 + \mu^2) \left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \right] = 0$$

となり, 確かにゼロとなる. したがって, (24a) の右辺は

$$\lambda^2 \overline{\left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [\varphi'_1 - \varphi'_3]} = \lambda^2 \overline{\frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi'_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi'_3}{\partial y}} \quad (*)$$

となる ( $f_0$  は省略した). これに (30) を代入して整理すると,

$$(*) = -\lambda^2 \sigma D^2 e^{\nu_i t} \frac{k\mu}{2} \sin 2\mu y \sin \psi$$

となるので, (24a) は結局,

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y t} - \lambda^2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \right) = -\frac{1}{f_0} \lambda^2 \sigma D^2 e^{2\nu_i t} \frac{k\mu}{2} \sin 2\mu y \sin \psi.$$

ここで,  $\xi = \mu y$ ,  $\gamma = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$  を導入すると,

$$\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi \xi t} - \gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) = -\frac{\lambda^2}{f_0 \mu^2} \sigma D^2 e^{2\nu_i t} k\mu \sin \psi \frac{1}{2} \sin 2\xi. \quad (*)$$

ここで, 上式の右辺の一部を取り出して計算すると,

$$\frac{\lambda^2}{f_0 \mu^2} \sigma D^2 e^{2\nu_i t} k\mu \sin \psi = \frac{\lambda^2 D^2 e^{2\nu_i t}}{f_0 \mu} \left[ \frac{2\alpha V + B}{2\alpha V - B} \right]^{1/2} k \frac{2 + \alpha}{\nu_i} k\alpha V \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{(2+\alpha)\nu_i}{k\alpha V} \right)^2}} \quad (**)$$

である (ただし,  $\tan \psi = T$  とおくと,  $\sin \psi = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$  と表せることを用いた). (\*\*) をさらに計算して整理すると,

$$(**) = \frac{\lambda^2 D^2 e^{2\nu_i t}}{k\mu} \frac{\alpha(2 + \alpha)\nu_i}{2\alpha V - B}$$

となり, これを  $A$  とおくと (35a) が導ける. また (35) を (\*) に導入すると (34a) が導ける. 同様に (24b) から (34b) が導ける.

ここで,

$$A = \frac{\lambda^2 D^2 (\exp 2\nu_i t) \alpha (2 + \alpha) \nu_i}{f_0 \mu (2\alpha V - B)}, \quad (35a)$$

$$\gamma = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \quad (35b)$$

であり, 次の新しい無次元変数を導入した:

$$\xi = \mu y = \frac{\pi y}{2w}.$$

$\xi = \pm\pi/2$  における側方の境界条件 (17) を満たす (34) の解は

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi_3}{\partial t} = \frac{A}{2(2+\gamma)} \left[ \frac{\sinh \sqrt{2\gamma}\xi}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right] \quad (36)$$

である\*<sup>18</sup>.

\*<sup>18</sup>(36) を導出する. (34) の一式目と二式目の和と差を取ると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial^3\xi\xi t} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial^3\xi\xi t} &= 0, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial^3\xi\xi t} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial^3\xi\xi t} - 2\gamma \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial t} \right) &= -A \sin 2\xi. \end{aligned} \quad (*)$$

ここで,  $X = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}$ ,  $Y = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi \xi} &= 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi \xi} - 2\gamma Y &= -A \sin 2\xi. \end{aligned}$$

この二式の一般解はそれぞれ,  $X = c_1\xi + c_2$ ,  $Y = c_3 \cosh \sqrt{2\gamma}\xi + c_4 \sinh \sqrt{2\gamma}\xi + \frac{A}{2(2+\gamma)\sin 2\xi}$  である ( $c_1, c_2, c_3, c_4$  は任意定数). 次に境界条件 (17) をこれらに適用することを考える.  $y$  についての境界条件 (17) を  $\xi$  について書き換えると,

$$\int_0^L \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi t} dx = 0 \quad \text{at } \xi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$\varphi = \Phi(y) + \varphi'(x, y, t)$  であり,  $\Phi$  は  $x$  に依存しないので, 上述の  $\xi$  についての境界条件より  $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$  において  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi t} = 0$  である. これを  $X, Y$  の一般解に適用すると,  $c_1 = c_3 = 0$ ,  $c_4 = -\frac{A}{2+\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}}$  が求められるので, 任意定数  $c_2$  をゼロにとると,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial t} = 0, \\ Y &= \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial t} = -\frac{A}{2+\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} \sinh \sqrt{2\gamma}\xi + \frac{A \sin 2\xi}{2(2+\gamma)}. \end{aligned}$$

したがって, この二式より

$$\Phi_{1t} = -\Phi_{3t} = \frac{A}{2(2+\gamma)} \left[ \frac{\sinh \sqrt{2\gamma}\xi}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right] \quad (36)$$

図 4 は  $A = 1/30.8$  として  $\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}$  と  $\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}$  の緯度分布を描いたものである. 図から読み取れるように, 北半分の領域において,  $\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}$  は正である, 一方で南半分の領域では負である. これは, 層厚と温度の関係より, 北半分の領域が暖まっていることと南半分の領域が冷えていることに対応している. したがって, 不安定波の一つの効果は, 非断熱的な原因による加熱と冷却の緯度的な変動を中和することであると考えられる.

この中和の効果が有効な大きさを持つために必要な擾乱の大きさを見積もる. 静水圧の式, ジオポテンシャルの定義, 理想気体の状態方程式より得られる式  $T = -(p/R)(\partial\Phi/\partial p)$  を 2 レベルモデルに適用すると,  $\partial\bar{T}_2/\partial t = R^{-1}(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial t})$  が得られる. ここで  $\bar{T}_2$  は 500hPa での温度で,  $R$  は乾燥気体の気体定数である. 擾乱による北半分の領域の暖まりの平均値を  $T_t^* \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{T}_{2t} d\xi$  と定義すると,

$$T_t^* = \frac{A(1 + \gamma - \operatorname{sech}\sqrt{2\gamma\pi}/2)}{\pi R\gamma(2 + \gamma)}$$

を得る. Phillips (1954) によると, Bjerknes (1933) より参照した北半球の北半分に渡って年平均した冷却の見積もりは, 1 日に約 0.5 度である. したがって,  $T_t^*$  の加熱はこの 0.5 度の冷却とバランスしているとして擾乱の大きさを見積もるとする.  $\mu = 3/R_e$  と  $\lambda^2 = 1.17 \times 10^{-12} \text{m}^{-2}$  を用いると,  $\gamma \sim 5.3$  と

$$T_t^*(\text{deg day}^{-1}) \sim 15.4\{A(\text{m}^2\text{sec}^{-3})\} \quad (37)$$

が得られる.  $v$  の 750 hPa 等圧面での最大値を  $v_0$  と定義すると, 次のように書ける:

$$v_0 = \left[ \frac{\varphi'_{3x}}{f_0} \right]_{\max} = \frac{kDe^{\nu_i t}}{f_0}.$$

これを (35) に導入すると, 次式を得る:

$$v_0^2 = \frac{Ak^2\mu(2\alpha V - B)}{f_0\lambda^2\alpha(2 + \alpha)\nu_i}.$$

(37) において  $T_t^* \sim 0.5^\circ\text{C}/\text{day}$  とすると  $A \sim 1/30.8 \text{m}^2\text{sec}^{-3}$  であるので,

$$k = \frac{2\pi}{6 \times 10^6} \text{m}^{-1},$$

$$V \sim B \sim 14 \text{m sec}^{-1},$$

$$\nu_i = \frac{\ln 2}{1.245} \text{days}^{-1}$$

以上の値を (33) に追加して考えると,  $v_0$  は約  $10 \text{m sec}^{-1}$  と見積もれる. 言い換えると,  $v_0$  が  $10 \text{m sec}^{-1}$  であるような大きさの擾乱は, 加熱と冷却の平均緯度変化とバランスするように, 基本場に二次のオーダーの効果を引き起こす.

が導ける.

( $\times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}^2\text{day}$ )

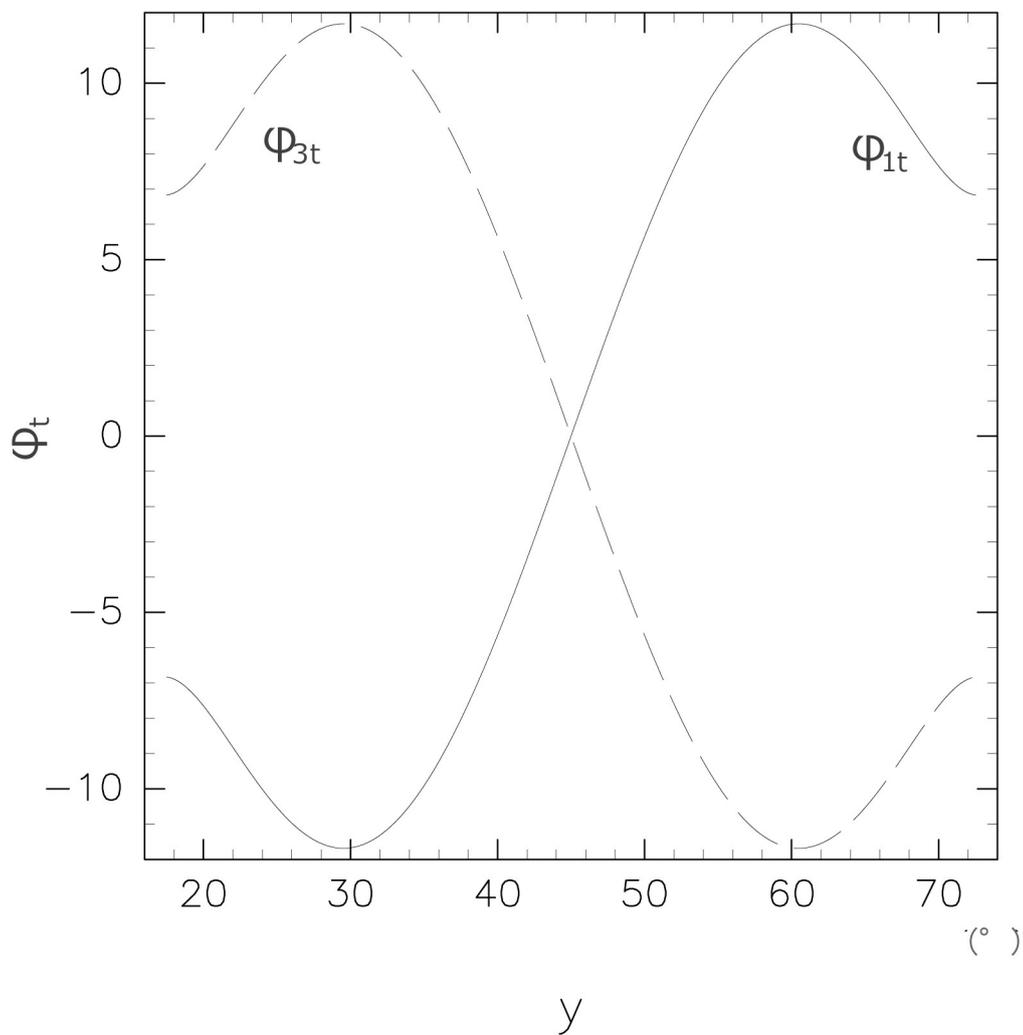


図 4: 摂動の二次のオーダーによるジオポテンシャルの時間変化率. 横軸は緯度, 縦軸はジオポテンシャルの時間変化率 (単位は  $10^{-4}\text{m}^2\text{sec}^{-2}\text{day}^{-1}$ )

## 4.2 摂動の二次のオーダーによる基本流速の変化

(36) により与えられる  $\Phi_1$  と  $\Phi_3$  の二次のオーダーの変化は, 傾圧波は平均の東西方向の運動量の分布を変化させていると云うことを示す. (36) を  $y$  について微

分することで、基本流速の変化は以下の様に見える:

$$\frac{\partial U_3}{\partial t} = -\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{A\mu}{2f_0(2+\gamma)} \left[ \frac{\cosh \sqrt{2\gamma}\xi}{\cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \cos 2\xi \right]. \quad (38)$$

$A$  を  $1/30.8 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-3}$  と見なすとき ( $T_t^* = 0.5^\circ \text{C day}^{-1}$  に対応している) の  $\frac{\partial U_3}{\partial t}$  の分布は図 5 に示している. 図の点線は 1946 年 1 月の観測から計算された東西風の加速度を表しており<sup>\*19</sup>, ここで計算された摂動の二次のオーダーによる基本流速の時間変化とおおよそ合っている.

$\frac{\partial U_3}{\partial t} = -\frac{\partial U_1}{\partial t}$  より, 任意の  $\xi$  の値に対して, 平均速度  $(U_1 + U_3)/2$  の変化はない. したがって, 我々の考える擾乱は, 緯度円を横切る正味の運動量の輸送に関するいかなる機構も含まない. つまり, 全層で平均すると運動量の南北方向の輸送はないのである.

また, この章で計算された摂動による基本流速の変化は, 傾圧不安定波に伴って現れる子午面循環によって説明される. これについては後の章で示す.

<sup>\*19</sup>Widger (1949) の観測と東西風加速の計算についての詳細は, 付録 A の 8 節を参照されたい.

(m/sec day)

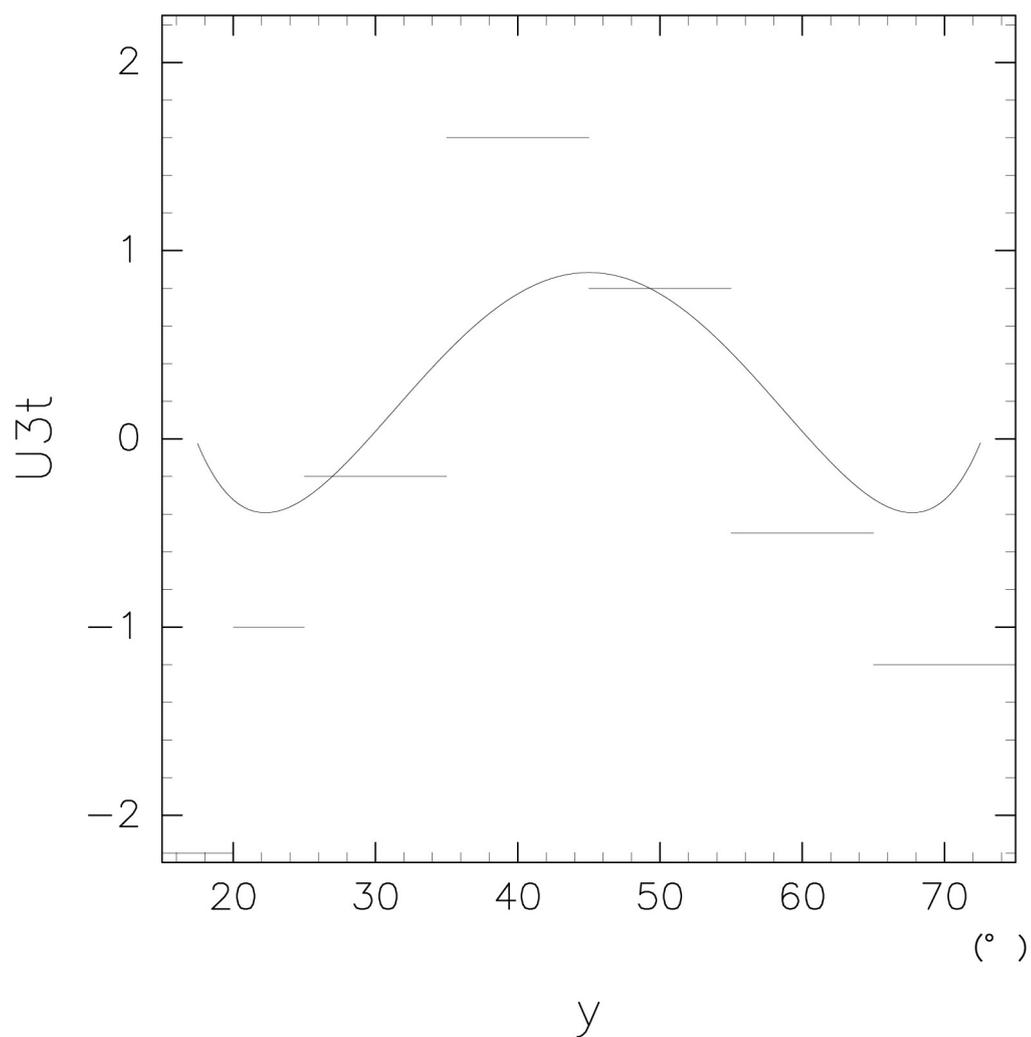


図 5: 摂動の二次のオーダーによる 750 hPa 面の基本流速の時間変化率. 横軸は緯度, 縦軸は 750 hPa 面の東西流速の時間変化率 (単位は  $\text{m sec}^{-1}\text{day}^{-1}$ ). 図中の太線は Widger (1949) の観測から得られた東西流の時間変化.

## 第5章 子午面循環

この章では、傾圧波の存在は小さな子午面循環の存在を示唆していることを示す。(13)を東西平均すると、次式を得る:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{p_s \Phi_{1yyt}}{2f_0^2} = \frac{p_s \mu^2 \Phi_{1\xi\xi t}}{2f_0^2}.$$

ここで、(36)を使うと、 $\bar{\omega}_2$ に関する次の公式を得る:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{p_s \mu^2 A}{4f_0^2(2+\gamma)} \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \sinh \sqrt{2\gamma} \xi}{\cosh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}} - 2 \sin 2\xi \right]. \quad (39)$$

今、連続の式(7)を $x$ について積分し、以下を定義する:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &\equiv \frac{2}{p_s} \int_0^{p_s/2} \bar{v}_a dp, \\ \bar{v}_3 &\equiv \frac{2}{p_s} \int_{p_s/2}^{p_s} \bar{v}_a dp. \end{aligned}$$

すでに(13)、(14)を導いたように、 $p=0$ と $p=p_s$ で $\omega$ は消えることを仮定する。 $\bar{v}_1$ と $\bar{v}_3$ は $\bar{\omega}_2$ と以下の公式で関係づけられる:

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \xi} = -\frac{2\bar{\omega}_2}{\mu p_0}.$$

今、 $\xi = -\pi/2$ において $\bar{v}_1$ と $\bar{v}_3$ は両方ゼロに等しいと云う境界条件を用いて、 $\xi$ について $\xi = -\pi/2$ から $\xi = \xi$ まで積分されるだろう:

$$-\bar{v}_1 = \bar{v}_3 = \frac{\mu A}{2f_0^2(2+\gamma)} \left[ \frac{\cosh \sqrt{2\gamma} \xi}{\cosh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}} + \cos 2\xi \right]. \quad (40)$$

( $\xi = \pi/2$ において $\bar{v}_1$ と $\bar{v}_3$ もまた消えると云う境界条件は自動的に満たされることに気をつけよう.)

(39)と(40)より与えられる子午面循環は図6に示される。ここで、 $A$ は $T_t^* = 0.5^\circ\text{C day}^{-1}$ と対応した値を使った。この子午面循環は3つの「セル」から成る、つ

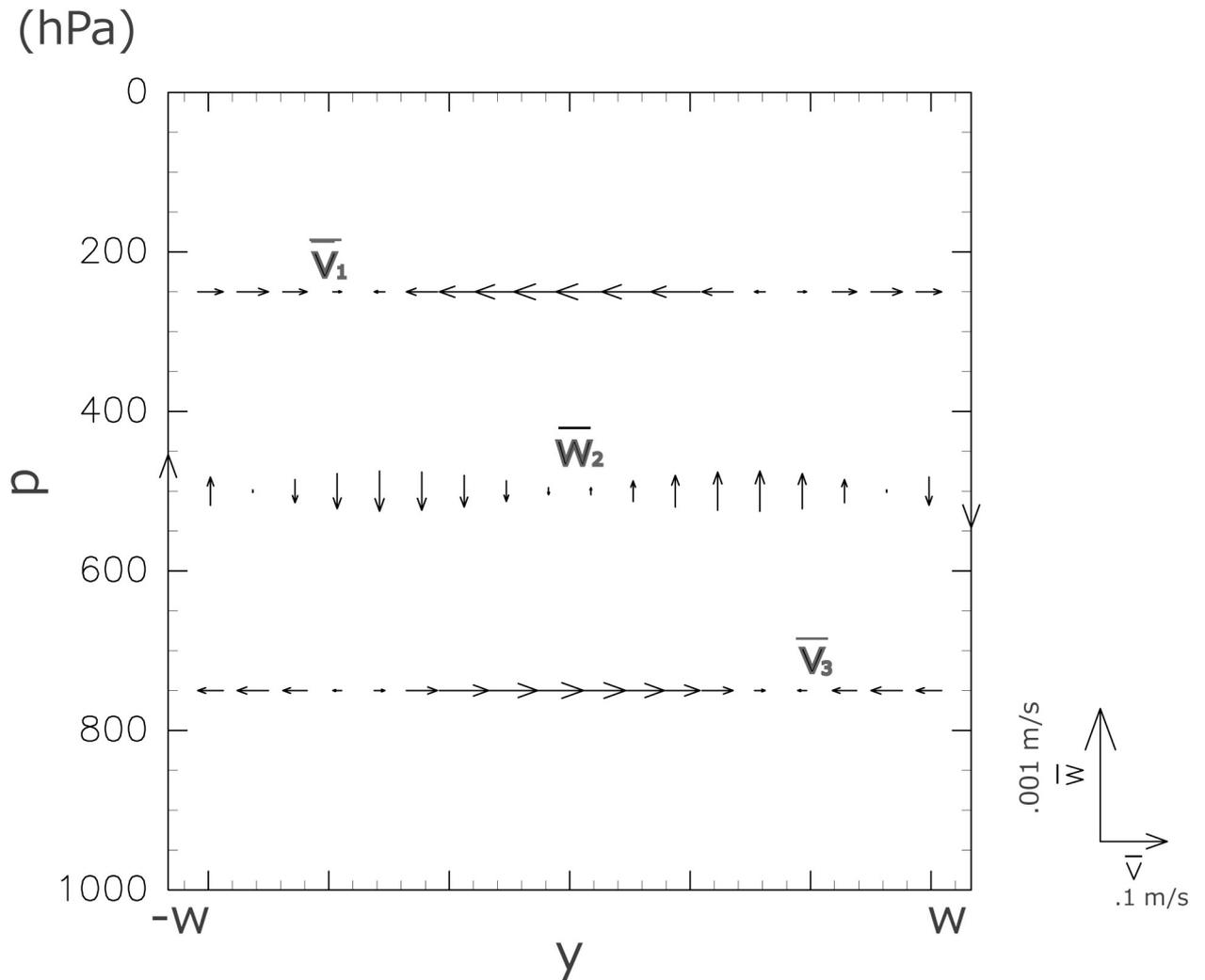


図 6: 傾圧波に伴って現れる子午面循環. 鉛直速度  $\bar{w}_2$  は (39) より得られる圧力座標系における鉛直速度  $\bar{\omega}_2$  を高度座標系における鉛直速度  $\bar{w}_2$  に変換して描いている.

まり, 北と南の端の「直接的な」セルと, 領域の中央部にあるより大きな「間接的な」セルである. これら 3 つのセルは非常に弱く, 1950 年代の観測網では見つけることが困難であったようだ (Phillips 1954).

(40) を (38) と比較すると,

$$U_{1t} - f_0 \bar{v}_1 = 0, \quad \text{and} \quad U_{3t} - f_0 \bar{v}_3 = 0 \quad (41)$$

がわかる. したがって, 基本流における速度変化 (38) は子午面循環 (39), (40) の存在により説明される. つまり, 今考えている系では, 子午面循環を表す  $\bar{v}$  によって生じるコリオリ力が東西方向の運動量を再分布させており,  $\overline{u'v'}$  の相関で表現される渦輸送は, 運動量の輸送になんの寄与もしない.

一方で,  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}$  の分布に反映されるような緯度方向のエネルギー輸送は, 水平方向の渦輸送と子午面循環 (39), (40) の両方によってもたらされると示されるだろう\*20:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 - \Phi_3) = \frac{2f_0^2}{p_s \lambda^2} \bar{\omega}_2 - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_{g2}(\varphi'_1 - \varphi'_3)} \quad (42)$$

ここで, (42) の右辺一項目は子午面循環, 右辺二項目は渦によるエネルギー輸送を表している. さらに (42) は脚注 18 の (\*) の両辺を  $2\gamma$  で割ったものであるので,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 - \Phi_3) = \frac{A}{2\gamma(2 + \gamma)} \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \sinh \sqrt{2\gamma} \xi}{\cosh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}} - 2 \sin 2\xi \right] - \frac{A \sin 2\xi}{2\gamma} \quad (43)$$

とわかる. これを示したのが図 7 である. 図の破線は子午面循環, 実線は渦によるエネルギー輸送をそれぞれ表している. 子午面循環によるエネルギー輸送は北と南の領域において極方向の輸送を生み出し, 中央部において赤道方向の輸送を生み出す. 他方で渦輸送は常に極向きで, 子午面循環からの寄与より大きい.

\*20(42) を導出する. level 2 に適用した熱力学の式 (15) より

$$\frac{D_2}{Dt}(\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{2\bar{\omega}_2 f_0^2}{p_s \lambda^2}.$$

ジオポテンシャルと流速を基本場と摂動に分け, 東西平均を取ると,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 - \Phi_3) = \frac{2\bar{\omega}_2 f_0^2}{p_s \lambda^2} - \left[ (U_{g2} + u'_{g2}) \frac{\partial}{\partial x} + v'_{g2} \frac{\partial}{\partial y} \right] (\Phi_1 - \Phi_3 + \varphi'_1 - \varphi'_3).$$

右辺二項目を整理すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 - \Phi_3) = \frac{2f_0^2}{p_s \lambda^2} \bar{\omega}_2 - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_{g2}(\varphi'_1 - \varphi'_3)} \quad (42)$$

となり, (42) が導ける.

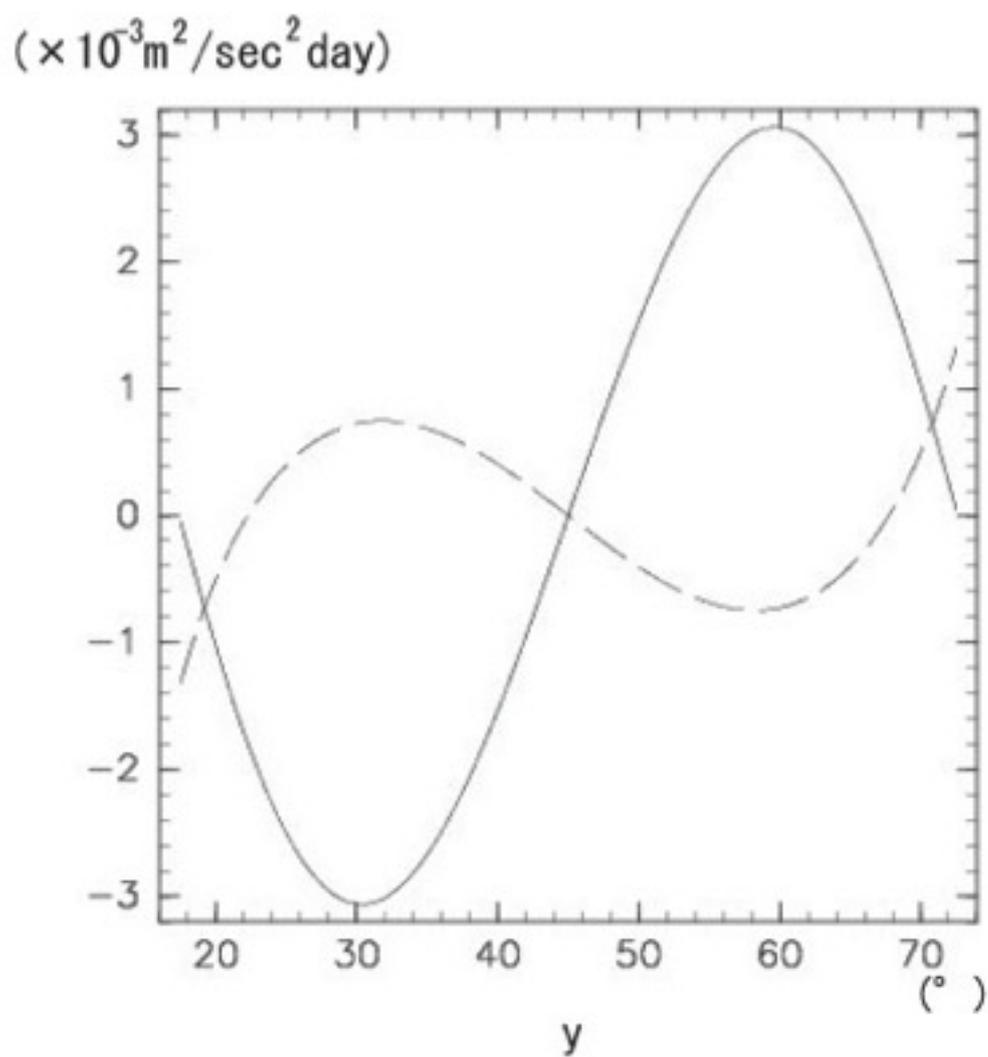


図 7: 緯度方向のエネルギー輸送. 破線は子午面循環, 実線は渦によるエネルギー輸送をそれぞれ表している.

## 第6章 エネルギー変換

第2章では、準地衡流方程式(13), (14)と境界条件(16), (17)が力学的エネルギー方程式と無矛盾であることを見た。この章では、傾圧の摂動においてエネルギー保存が成り立っていることを確認し、基本場と摂動の運動及びポテンシャルエネルギーのエネルギー変換について考察する。

(21)に熱力学方程式(15)を導入することで、エネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-w}^w \int_0^L \left[ q_1 + q_3 + \frac{\lambda^2}{2f^2} (\varphi_1 - \varphi_3)^2 \right] dx dy = 0 \quad (44)$$

と書き直せる。ここで、積分は  $-w \leq y \leq w$ ,  $0 \leq x \leq L$  に渡って行った。また、 $\mathbf{v}$  が地衡流であるとき、この領域で  $\mathbf{v} \cdot \nabla h$  ( $h$  は任意の関数) を積分するとゼロになると云う事実を使った。  $1/2 f_0^{-2} \lambda^2 (\varphi_1 - \varphi_3)^2$  の項は系のポテンシャルエネルギーを示している。運動エネルギー  $q_1 + q_3$  とポテンシャルエネルギー  $1/2 f_0^{-2} \lambda^2 (\varphi_1 - \varphi_3)^2$  は、基本流のエネルギーを示す部分と摂動のエネルギーを示す部分にそれぞれ分割されるだろう。したがって、(44)は

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[ U_1^2 + U_3^2 + \frac{\lambda^2 (\Phi_1 - \Phi_3)^2}{f_0^2} \right] + \left[ \frac{u_1'^2 + v_1'^2 + u_3'^2 + v_3'^2}{f_0^2} + \frac{\lambda^2 (\varphi_1' - \varphi_3')^2}{f_0^2} \right] \right\} d\xi = 0 \quad (45)$$

となる。

基本流のエネルギーの変化率は(36)と(38)より計算される:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (U_1^2 + U_3^2) d\xi = -X \frac{2(2+\alpha) \tanh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}}{\pi \sqrt{2\gamma} (2+\gamma)}, \quad (46)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda^2}{f_0^2} (\Phi_1 - \Phi_3)^2 d\xi = -X(2+\alpha) \left[ \frac{1}{2} - \frac{2 \tanh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}}{\pi \sqrt{2\gamma} (2+\gamma)} \right]. \quad (47)$$

である。ここで、

$$X = \frac{AV\mu}{f_0(2+\alpha)}$$

である。摂動の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの時間変化率は直ちに (30) より計算される:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\bar{u}_1'^2 + \bar{v}_1'^2 + \bar{u}_3'^2 + \bar{v}_3'^2) d\xi = X\alpha, \quad (48)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda^2}{f_0^2} (\varphi_1' - \varphi_3')^2 d\xi = \frac{X(2 + \alpha)}{2} - X\alpha. \quad (49)$$

(46) から (49) を全て足すと、全エネルギーは確かにゼロとなり、エネルギー保存を満たすことを簡単に確認することができる。

(46) より、 $X(2 + \alpha)$  にかけている因子の項は約 0.026 の値を持つ。基本流からの運動エネルギーの散逸を表すこの項は、確かに (47) の最後の項とバランスしているので、摂動の全エネルギーの増加量と基本流のポテンシャルエネルギーとの比は 100:95 であり、東西方向の運動の運動エネルギーとの比は 100:5 である ( $\gamma = \lambda^2 \mu^{-2}$  は 4 章と同様に 5.3 と見積もっている.)。より小さな  $\gamma$ , たとえばより小さな  $w$  あるいは  $f_0$  の値において、基本流の運動エネルギーから生じる摂動のエネルギーの割合は増加する。

(46), (47), (48), (49) より関係づけられる摂動と基本場の運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーの変換を図 6 に示す。

(48) の値の 1/2 で与えられる、単位面積当たりの運動エネルギーの生成率は、 $A$  が  $1/30.8 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-3}$  のとき、約  $0.375 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ sec}^{-3}$  の値を持つ。これに 10 トン (およそ 1 平方メートルあたりの大気質量) をかけると、摂動の運動エネルギーの生成率として約  $3.75 \text{ J sec}^{-1} \text{ m}^{-2}$  の値を得る。これは、Phillips (1954) によると、Brunt (1939) が見積もった大気における運動エネルギーの平均の散逸率、およそ  $5 \text{ J sec}^{-1} \text{ m}^{-2}$  と比較しておおよそ合っている。

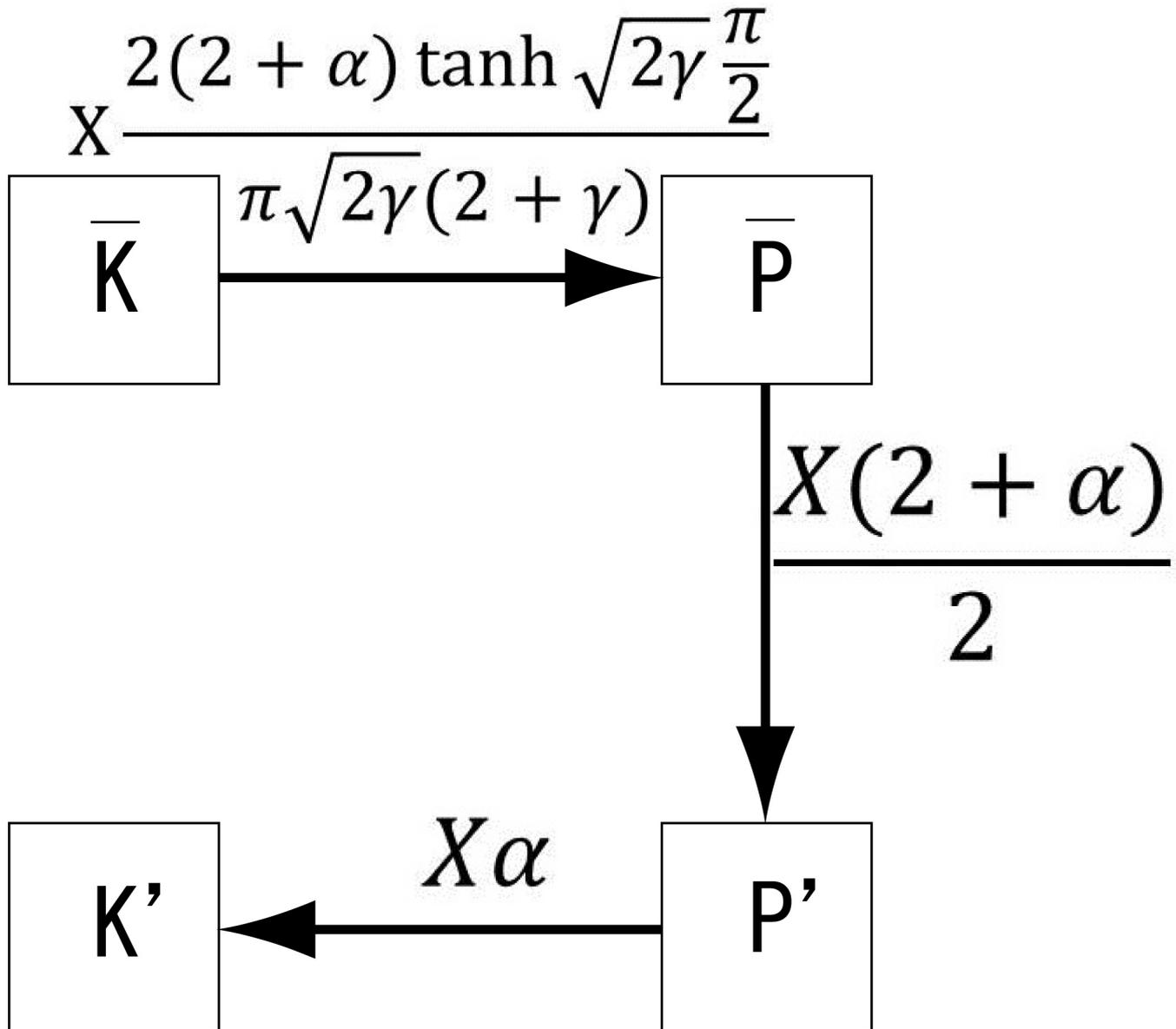


図 8: 傾圧波におけるエネルギーダイアグラム.  $\bar{K}$ ,  $\bar{P}$  はそれぞれ基本場の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを表し,  $K'$ ,  $P'$  はそれぞれ摂動の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを表す. 矢印は各エネルギー間の単位時間当たりの変換を表し, 各数式は (46) から (49) によって計算される変換量を示している.

## 第7章 結論

本論文では, Phillips (1954) に基づき, 線形摂動理論を用いて傾圧不安定について考察した.

まず, 摂動方程式を線形化し, 与えられた波動解が不安定になる条件を求めた. 擾乱の大きさが二倍になるまでの時間スケールは地球の中緯度の条件で 1 ~ 3 日で, 最も不安定となる擾乱の波長は約 6000 km であった. これらは現実の高層天気図などで見られる高低気圧の時間及び空間スケールとおおよそ一致していた.

次に, 摂動の二次のオーダーが基本場に与える影響を調べた. 基本場のジオポテンシャルの変化より, 北半分の領域では加熱, 南半分の領域では冷却が起きていることがわかり, 傾圧不安定によって南北方向の熱の輸送が起きていることがわかった. この熱の輸送が観測より見積もった北半分の領域の冷却とバランスするには, 750 hPa 等圧面において約 10 m/s の南北速度を持つ擾乱が必要であることがわかった. また, 基本場の東西流速の変化を計算し, 観測で見積もられた値とおおよそ合っていることを示した.

さらに, 傾圧不安定に伴って子午面循環が現れることを示した. また, 子午面循環が基本場の流速の変化を引き起こしていることを示し, 子午面循環と渦により緯度方向のエネルギー輸送が生じていることがわかった.

最後に, 傾圧波において基本場と摂動の運動及びポテンシャルエネルギーの保存を示し, エネルギー変換を示した. また, 各エネルギーを見積もり, 摂動の全エネルギーの増加量と基本場のポテンシャルエネルギーとの比は, 100:95 であり, 基本場の運動エネルギーとの比は 100:5 であることがわかった.

# 付録

## 付録 A Phillips (1954) 全訳

本論文を書くに当たって参考にした Phillips (1954) の全訳 (に修正と解説を加えたもの) を付しておく.

### 要旨

摩擦無し「2.5次元の」準地衡流渦度方程式によって予言された地衡流の運動エネルギーの変化は、力学的エネルギー方程式と無矛盾であることがわかる。非常に単純な傾圧不安定波の存在による、東西流への二次のオーダーの効果は、摩擦や熱源のない無限の側面の幅の2レベルモデルを使って解析する。これらの波による極域への顕熱の輸送と運動エネルギーの生成に加えて、このモデルの中で弱い子午面循環が同時に現れることがわかる。この循環は北と南に直接的なセルを伴う中緯度の間接的なセルを含む。東西方向の相対的な運動量の生成源と消滅源が適切に与えられた(また、従って地表の東西風の緯度分布を規定する)この機構のあり得る重要性は Widger の1946年1月の渦による水平方向の運動量の変換の観測の助けを借りて示される。最後に、このタイプの不安定波の約95パーセントの擾乱のエネルギーは基本流の「ポテンシャルエネルギー」から生じ、残りのわずかな部分は基本流の運動エネルギーから生じることがわかる。

### 1. 序章

中緯度の大規模な擾乱は、これらの緯度帯の「大循環」の維持という重要な役割を果たすことが、今では一般的に認識されている。極域への顕熱の輸送を引き起こすものとしてのこれらの役割は何年か前に Defant(1921)によって指摘された。数年後に、Jeffreys(1926)はこれらはまた角運動量の緯度方向の輸送においても重要であると示した。近年、これらの最初の考察は天気図や気象データを使った角運動

量や潜熱の輸送の実際的な測定 (Widger(1949), White(1951)) により正当化されてきている。

これらの擾乱の要素の動力学的及び運動学的な性質の理論的な研究もまた、線形摂動論の技術を用いて近年実行されてきている。ここで、擾乱は東西方向の基本流に重ねられた小さい擾乱と考える。これらの理論的研究は二つの原理の型から分割されるだろう。一つは、形容詞「傾圧の」\*<sup>1</sup>と取り扱うもので、基本流は高さの関数のみであり、この基本流の緯度方向の変化は無視して考えられてきたものである (Charney(1947))。二つ目の型は、「順圧の」と呼ぶもので、東西方向の流れの鉛直方向の増加を無視するが、代わりにこの量の緯度方向の変化の効果は考えてきた (Kuo(1949))。

両方の解析において、波の不安定 (増幅) と安定 (減衰) の型は数学的にあり得る。しかしながら、これらの理論的な運動の運動学では、実際の天気図で現れる擾乱は傾圧波の増幅と順圧波の減衰の組み合わせとしてよく書かれるようだ。純粋な増幅する傾圧波はエネルギーを北向きに輸送し、運動エネルギーを生成する (Kuo(1952))\*<sup>2</sup>。純粋な減衰する順圧波は全運動エネルギーを変えないが、代わりに波の運動エネルギーは基本場の東西方向の運動の運動エネルギーにまとめられる\*<sup>3</sup>。この最後の過程において Jeffreys が記述した緯度方向の運動量の輸送も同時に生じる (Starr(1948) も見ると良い)。

摂動論による解析において順圧と傾圧の効果の組み合わせは、まだ完遂されていない。さらに、非断熱の熱の変化と摩擦の効果はまだこれらの理論に含められていない。数学的な難しさは瑣末ではなく、大規模擾乱が果たす役割の解析は以下の方法で高速の計算機の助けを借りて最も良く完遂されるだろう。摩擦 (表面の摩擦がおそらく最も重要) やいくらかの単純な非断熱の効果 (おそらく緯度と高さの単純な関数として) を含んだ、大規模運動にとって適切な予報方程式を使って、まずいくつかの単純な初期条件を与えることで、計算機は時間に従う流れのパターンの発達を予報することができる。次に、どの型の擾乱が現れたか、またどんな型の東西風の分布が生成されるかということを見るために、いくらか後の時間の予報を研究する。

この論文はそのような実験 (筆者と同僚 Jule Charney 博士はこの実験を高等研究所で実行することを望む) のためのプレリユードの一部として書かれている。そしてまた、この論文は中緯度の循環にとっての単純な傾圧不安定波の重要性を特

\*<sup>1</sup>南北温度傾度により、温度風の関係式より、流れは高度依存性を持つことになる。

\*<sup>2</sup>基本流は無限のエネルギーを持っているとしているので、増幅する擾乱は基本流からエネルギーを取ってくる。

\*<sup>3</sup>減衰する擾乱では、基本流にエネルギーを与える。ただし、基本流のエネルギーは無限なので変わらない。

---

別に言及しながら、傾圧不安定波のいくつかの興味深い性質を記述するためにも書かれている。

## 2. 準地衡流方程式と境界条件

大循環における傾圧擾乱の役割を調べるに当たって、簡単のために、これらの運動は「2.5次元」の準地衡流方程式 (Charney and Phillips, 1952) によって適切に記述されると仮定する。いくつかの追加の単純化を施すと、これらは次の様

る<sup>\*4\*5</sup>:

$$\frac{D_1(f + \zeta_1)}{Dt} - \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{D_3(f + \zeta_3)}{Dt} + \frac{2f_0\omega_2}{p_s} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{2\omega_2}{p_s} - \frac{\lambda^2}{f_0^2} \frac{D_{1,3}(\varphi_1 - \varphi_3)}{Dt} = 0. \quad (3)$$

<sup>\*4</sup>(1),(2) を導出する. 準地衡流の運動方程式の水平成分をベクトル形式で書くと,

$$\frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt} = -f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a - \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g$$

である. これより, 鉛直渦度を取り, 地衡流の関係式を使うと, 渦度方程式が導かれる:

$$\frac{D_g \zeta_g}{Dt} = -f_0 \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) - \beta v_g$$

また, 等圧座標系の連続の式は

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

である. これらの式を今考えている 2 レベルモデルに適用する. まず, 渦度方程式を level1 に適用すると,

$$\frac{D_g(\zeta_1 + f)}{Dt} = -f_0 \left( \frac{\partial u_{a1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{a1}}{\partial y} \right) \quad (*)$$

ただし,  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$  であることを用いた. 次に連続の式を level1 に適用すると,

$$\frac{\partial u_{a1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{a1}}{\partial y} = -\frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta p}$$

であるので, (\*) の右辺は  $\frac{f_0\omega_2}{\Delta p}$  となる ( $\Delta p$  は level2 と level0 の圧力差, 500hPa). ここで,  $\Delta p = p_s/2$  より, (\*) は結局,

$$\frac{D_1(f + \zeta_1)}{Dt} - \frac{2f_0\omega_2}{p_0} = 0 \quad (1)$$

となり, (1) が導けた. (2) も同様にして導ける.

<sup>\*5</sup>(3) を導出する. 断熱を仮定した熱力学の式は

$$\frac{D \ln \theta}{Dt} = 0$$

である. ここで, 静水圧平衡からの摂動を考えると,

$$\theta = \bar{\theta}(p) + \theta'(x, y, p, t)$$

とすると,

$$\omega \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \theta' + \omega \frac{\partial \theta'}{\partial p} = 0$$

となる. ここで地衡流近似  $|\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p}| \gg |\frac{\partial \theta'}{\partial p}|$ ,  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_g$  より, 上式は

$$\omega \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \theta' = 0$$

となる. ここで温位の定義  $\theta = T(p_s/p)^\kappa$  より

$$\bar{T} \omega \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) T' = 0 \quad (**)$$

下付き文字 1, 2, 3 はそれぞれ 250, 500, 750mb の高度で測られた量を表している。演算子  $D/Dt$  は,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

で定義され, ここで  $\nabla$  は等圧面に沿った水平勾配演算子で,  $\mathbf{v}$  は水平 (地衡流) 速度ベクトルである。  $\omega_2$  は 500mb 高度での  $dp/dt$  の値に等しい\*6。  $\varphi$  はジオポテンシャルで,  $\lambda^2$  は定数であると仮定されていて,

$$\lambda^2 = \frac{f_0^2}{\Phi_1 - \Phi_3} \left[ \frac{\Theta_2}{(\Theta_1 - \Theta_3)} \right]$$

の公式で与えられる。ここで,  $\Theta$  は温位で,  $\{\Phi_1 - \Phi_3\}$  は高度 1 と高度 3 間のジオポテンシャルの差の典型的な値を表す。  $p_0$  は, 1000mb に設定しており, 地表における圧力の (一定の) 近似値である。運動をデカルト座標系 ( $x$  は東向き,  $y$  は北向き) で記述するので, 相対渦度  $\zeta$  は  $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$  で与えられる。コリオリパラメータ  $f$  は  $Df/Dt$  の項を除いてどこでも一定と考え,  $Df/Dt$  の項では  $\partial f/\partial y = \beta = \text{constant}$  と仮定する (Rossby, (1939))。

温帯の大気は  $y = \pm w$  において鉛直方向の固定された壁で「緯度方向に」制限

また, 静水圧平衡  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$  と, ジオポテンシャルの定義  $\Phi = gz$ , 理想気体の状態方程式  $\alpha = \frac{RT}{p}$  より,

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

であるので, (\*\*) は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \right) \frac{\partial \Phi'}{\partial p} + \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial p} \right) \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} \omega = 0$$

となる。この式を level2 に適用すると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla \right) \frac{\Phi'_3 - \Phi'_1}{\Delta p} + \frac{(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_1)}{\Delta p} \left( \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} \right)_2 \omega_2 = 0$$

この両辺に  $\Delta p$  をかけると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla \right) (\Phi'_3 - \Phi'_1) + \frac{(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_1)}{\Delta p} \left( \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} \right)_2 \Delta p \omega_2 = 0$$

である。この左辺二項目について,  $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} \Delta p = \Theta_3 - \Theta_1$  と書き換えると,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \nabla \right) (\Phi'_3 - \Phi'_1) + \frac{(\bar{\Phi}_3 - \bar{\Phi}_1)}{\Delta p} \frac{1}{\Theta_2} (\Theta_3 - \Theta_1) \Delta p \omega_2 = 0$$

となり,  $\Phi'$  を  $\varphi$  に,  $\bar{\Phi}$  を  $\Phi$  に書き換え,  $\lambda^2 = \frac{f^2}{\Phi_1 - \Phi_3} \left[ \frac{\Theta_2}{(\Theta_1 - \Theta_3)} \right]$  とラグランジュ微分の定義を導入すると,

$$\frac{2\omega_2}{p_s} - \frac{\lambda^2 D_{1,3}(\phi_1 - \phi_3)}{f_0^2 Dt} = 0 \quad (3)$$

が導ける。ただし,  $\mathbf{v}_{g2}$  は  $\mathbf{v}_{g2} = \frac{\mathbf{v}_{g1} + \mathbf{v}_{g3}}{2}$  で求められる。

\*6鉛直  $p$  速度  $\omega$  は上向きが負であることを気をつける。

されているものとして表現しよう.  $x$  方向には周期的な連続性, つまり  $x = L$  での運動は  $x = 0$  と等しいとする.

(1), (2), (3) の解には  $x = 0, x = L$  での周期的条件に加えて  $y = \pm w$  での境界条件が必要である. 壁での運動学的境界条件は  $y = \pm w$  で  $v = 0$  である. 地衡流的に\*7, これは次のことを示唆する\*8:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{at } y = \pm w. \quad (4)$$

このように, 任意の  $t$  の値において, 壁での  $\varphi$  は  $x$  に伴って変化してはならない. しかしながら, この定数  $\varphi$  は時間とともに変化しても良いので, これは (1), (2), (3) の唯一の解を決定するのに十分ではない. もう一つの条件は,

$$u_t + uu_x + vu_y - fv + \varphi_x = 0$$

の型をした第一の運動方程式を  $x$  に関して積分し,  $V = 0$  を用いることで得られる (下付き文字はここでは微分を示す).  $u_t$  を除く全ての項が消去され, 地衡流的に,

$$\int_0^L \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \right) dx = 0, \quad y = \pm w \quad (5)$$

を得る\*9. (4) とともに, これは (1), (2), (3) の解を唯一決定するには十分である\*10.

\*7等圧座標での地衡流近似 ( $x$  成分) は

$$-f_0 v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

より,  $v = \frac{1}{f_0 \rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  である.

\*8補足だが, 流れ関数も同じ形式を取る:

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

\*9(5) を導出する.

$$u_t + uu_x + vu_y - fv + \varphi_x = 0 \quad (*)$$

を  $x$  について 0 から  $L$  まで積分することを考える. ある量  $A$  について,

$$\bar{A}_x \equiv \int_0^L \frac{\partial A}{\partial x} dx = A(L, y, p, t) - A(0, y, p, t) = 0$$

が成り立つ (ただし, 周期境界条件を使った). これを用いると (\*) の左辺第二項 ( $uu_x = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{2}u^2)$ ) に注意する), 第四項はゼロである. よって結局 (\*) の積分は,

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx = 0$$

となり, 導ける.

\*10[原文脚注] 領域全体に渡って  $\partial(\phi_1 + \phi_3)/\partial t$  の平均値により決定された積分の定数を除く. この積分定数はこの論文の残りの部分に現れるだろう結論に全く何の役割も果たさない; したがって, 便利のためにゼロに等しいと置いている.

### 3. 地衡流運動の力学的エネルギー方程式

簡単化された準地衡流方程式系 (1), (2), (3) は, 運動方程式によると, 地衡流平衡はゼロの加速度と対応すると云う事実にも関わらず, 発生する運動の加速度を許す. この今ではよくある逆説は, 地衡流近似が運動方程式に直接導入される訳ではなく, むしろ水平発散 (地衡流的には測定できない) を消去してしまった後で, 渦度方程式に代わりに導入されると云う点で, もちろん説明できる (Charney, 1948).

水平運動の運動エネルギーの任意の変化は水平加速度と同時に現れないといけない<sup>\*11</sup>ので, 準地衡流方程式によって予報される運動 (とその加速度) がエネルギー方程式をどの程度満たすのかと云う理にかなった疑問<sup>\*12</sup>が生じるだろう. 今 (1), (2), (3) がある意味で力学的エネルギー方程式を満足することを示そう.

まず, Starr(1951 b) により導入されたいくつかの手法に従い, このモデルに適する力学的エネルギー方程式の型を導く. 初めに,  $x, y, p, t$  系の水平方向の運動方程式に  $u, v$  をかけることで

$$q_t + \mathbf{v} \cdot \nabla q + \omega q_p + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0$$

が得られる<sup>\*13</sup>. ここで,  $q$  は単位質量当たりの水平運動エネルギー,  $1/2(u^2 + v^2)$  である. 最後の項が消えてしまうので<sup>\*14</sup>, 地衡流近似をここで導入するのは無意味なのが明らかだろう. したがって, この段階は延期し, この座標系の連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (6)$$

<sup>\*11</sup>渦度方程式において, 渦度の時間変化があることは 運動エネルギーの変化があるということである.

<sup>\*12</sup>考える運動方程式では地衡流平衡のため時間微分項はない. 対して渦度方程式では時間変化の項があるので, エネルギー保存を満たしていないと, 運動方程式に施した簡単化 (地衡流平衡) が物理的におかしいことになる.

<sup>\*13</sup>上式を導出する.  $x$  方向の運動方程式に  $u$  を,  $y$  方向の運動方程式に  $v$  をかけると,

$$\begin{aligned} u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} - f v \right) &= - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} + f u \right) &= - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

である. この二式を足し合わせると,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q + \omega \frac{\partial q}{\partial p} = - \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$$

ここで,  $q = 1/2(u^2 + v^2)$  であり, 右辺を左辺に移項すると上式が得られる.

<sup>\*14</sup>むしろ地衡流近似においては  $\omega$  の項が消えるべきである.

を用いて, 上式の別の型を導く<sup>\*15</sup>:

$$q_t + \nabla \cdot (q + \varphi)\mathbf{v} + (\omega q)_p + \varphi\omega_p = 0. \quad (7)$$

今(7)はを1と3の高度で見積もり, さらに

$$\begin{aligned} \omega_{p1} = -\omega_{p3} &= \frac{2\omega_2}{p_s}, \quad \text{and} \\ (\omega q)_{p1} &= -(\omega q)_{p3} \end{aligned} \quad (8)$$

と云う近似を導入すること (Charney and Phillips, 1952) で<sup>\*16</sup>我々のモデルに特化する. 2つの式を足し合わせ, その結果を  $-w \leq y \leq w, 0 \leq x \leq L$  の範囲で積分すると, 結局

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint (q_1 + q_2) dx dy + \frac{2}{p_s} \iint (\varphi_1 - \varphi_3) \omega_2 dx dy = 0 \quad (9)$$

である<sup>\*17</sup>. これは 2.5 次元モデルに当てはまる運動エネルギー方程式の型である.

<sup>\*15</sup>(7) を導出する.

$$q_t + \mathbf{v} \cdot \nabla q + \omega q_p + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0$$

において, 左辺第二, 三, 四項を変形すると,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot q\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})q + \frac{\partial}{\partial p}(\omega q) - \left( \frac{\partial}{\partial p} \omega \right) q + \nabla \cdot (\varphi\mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v})\varphi = 0$$

となるが, 左辺第三, 五項は連続の式(6)を用いると打ち消しあってゼロとなる. また, 連続の式(6)より左辺第七項を変形して,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q + \varphi)\mathbf{v} + \frac{\partial(\omega q)}{\partial p} + \varphi \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

が得られる.

<sup>\*16</sup>(8)の近似は(9)の導出に使わなかった.

<sup>\*17</sup>(9)を導出する. (7)を level1 と level3 にそれぞれ適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \nabla \cdot (q_1 + \varphi_1)\mathbf{v}_1 + \frac{\omega_2 q_2 - \omega_0 q_0}{p_2 - p_s} + \varphi_1 \frac{\omega_2 - \omega_0}{p_2 - p_s} &= 0, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} + \nabla \cdot (q_3 + \varphi_3)\mathbf{v}_3 + \frac{\omega_4 q_4 - \omega_2 q_2}{p_4 - p_2} + \varphi_3 \frac{\omega_4 - \omega_2}{p_4 - p_2} &= 0 \end{aligned}$$

である. 今,  $\omega_0 = \omega_4 = 0, p_2 - p_s = p_4 - p_2 = p_s/2$  であるので,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \nabla \cdot (q_1 + \varphi_1)\mathbf{v}_1 + \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} + \frac{2\omega_2 \varphi_1}{p_s} &= 0, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} + \nabla \cdot (q_3 + \varphi_3)\mathbf{v}_3 - \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} - \frac{2\omega_4 \varphi_3}{p_s} &= 0 \end{aligned}$$

となる. 二式を  $x$  と  $y$  について積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \int_{-w}^w dy \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \nabla \cdot (q_1 + \varphi_1)\mathbf{v}_1 + \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} + \frac{2\omega_2 \varphi_1}{p_s} \right\} &= 0, \\ \int_0^L dx \int_{-w}^w dy \left\{ \frac{\partial q_3}{\partial t} + \nabla \cdot (q_3 + \varphi_3)\mathbf{v}_3 - \frac{2\omega_2 q_2}{p_s} - \frac{2\omega_4 \varphi_3}{p_s} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

全運動エネルギー  $q_1 + q_2$  は層厚  $(\varphi_1 - \varphi_3)$  と  $\omega_2$  の正味の相関の結果として変わるだろうということを示している。

地衡流の仮定は (9) を導くのに使われてこなかった。今もし  $\omega_2$  と運動エネルギー  $q$  が地衡流的に (1), (2), (3) と境界条件 (4), (5) によって決定され評価されれば, (9) が満たされることを示そう。

(1) と (2) は

$$\begin{aligned}\frac{\nabla^2 \varphi_{1t}}{f_0} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta_1) - \frac{2f_0 \omega_2}{p_s} &= 0, \\ \frac{\nabla^2 \varphi_{3t}}{f_0} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta_3) + \frac{2f_0 \omega_2}{p_s} &= 0\end{aligned}$$

と書ける<sup>\*18</sup>。ここで,  $\partial \zeta / \partial t$  に地衡流近似を導入した。これら 2 本の方程式にそれぞれ  $-\varphi_1$  と  $-\varphi_3$  を掛け, 恒等式  $\nabla \cdot \varphi \nabla \varphi_t = \varphi \nabla \varphi_t + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi_t$  を用い, 加えると,

$$\begin{aligned}\frac{(\nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_{1t} + \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_{3t})}{f_0} - \frac{\nabla \cdot (\varphi_1 \nabla \varphi_{1t} + \varphi_3 \nabla \varphi_{3t})}{f_0} \\ - [\varphi_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla(f + \zeta_1) + \varphi_3 \mathbf{v}_3 \cdot \nabla(f + \zeta_3)] + \frac{2f(\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2}{p_s} = 0\end{aligned}$$

を得る。この方程式の  $\mathbf{v}_1$  と  $\mathbf{v}_3$  はもちろん地衡流速である。さらに, この方程式を  $-w \leq y \leq w, 0 \leq x \leq L$  の領域に渡って積分すると, 境界条件 (4) と (5) を使えば二項目と三項目が消える (係数としての  $f_0$  が定数であることに留意せよ) ということを示すのは簡単である。そして残るのは

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2f_0} [(\nabla \varphi_1)^2 + (\nabla \varphi_3)^2] dx dy + \frac{2f_0}{p_s} \iint (\varphi_1 - \varphi_3) \omega_2 dx dy = 0 \quad (10)$$

である。ここで, 左辺第二, 三項は積分するとゼロであることに気をつけて二式を加えると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L dx \int_{-w}^w dy (q_1 + q_2) + \int_0^L dx \int_{-w}^w dy \frac{2\omega_2}{p_s} (\varphi_1 - \varphi_3) = 0$$

となり, (9) が導けた。

<sup>\*18</sup> 上式を導出する。渦度を地衡流近似を用いて書き換えると,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \varphi$$

である。これと, ラグランジュ微分の定義を (1), (2) に導入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\nabla^2 \varphi_{1t}}{f_0} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta_1) - \frac{2f_0 \omega_2}{p_s} &= 0, \\ \frac{\nabla^2 \varphi_{3t}}{f_0} + \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta_3) + \frac{2f_0 \omega_2}{p_s} &= 0\end{aligned}$$

が導ける。

である\*19.  $f_0$  で割ると, これは地衡流的に (9) と等しい.

(10) に地衡流の運動エネルギーのみ現れ, 全水平運動エネルギーは現れないことはさして驚くことではない. 実際, エネルギー方程式が鉛直運動の運動エネルギーを含まない静水圧運動の場合と非常に似ている. 結局, (10) は (3) 無しで導かれたので, (9) の準地衡流方程式と力学的エネルギー方程式の互換性を示すことと断熱運動の仮定と無関係ではないと云うことを述べるができる.

#### 4. 擾動方程式

現在までの中緯度での非定常擾乱の理論的な取り扱い, 運動は断熱的で摩擦が無いと云う両方を満たす仮定の元でなされてきた. 線形化された擾動論は時間とともに指数関数的に成長する不安定波の可能性を示す. これらの不安定波, 特にこれらの中で最も不安定なもの (Eady 1949) は, 実際に我々が高層天気図で見ている擾乱とおそらく同一視されるだろう. これについての良い証拠は, 多くの実際の発達する擾乱における圧力, 温度, 鉛直運動場が理論的な擾乱におけるこれらとかなり似ているという事実からわかる (Kuo 1952).

この論文の残りの部分において, 傾圧不安定波の運動学的特徴を (非常に簡単な形式ではあるが) 研究するつもりである. また, 基本東西流におけるこれらの運動の効果を計算するためにこれらの結果を使うつもりである. これは東西に平均さ

\*19(10) を導出する.

$$\frac{(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_{1t} + \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_{3t})}{f_0} - \frac{\nabla \cdot (\varphi_1 \nabla\varphi_{1t} + \varphi_3 \nabla\varphi_{3t})}{f_0} - [\varphi_1 \mathbf{v}_1 \cdot \nabla(f + \zeta_1) + \varphi_3 \mathbf{v}_3 \cdot \nabla(f + \zeta_3)] + \frac{2f_0(\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2}{p_s} = 0$$

を  $-w \leq y \leq w, 0 \leq x \leq L$  の領域に渡って積分することを考える. まず, 左辺第三項は境界条件 (4)(5) より積分するとゼロになる. 左辺第二項であるが,

$$\begin{aligned} \varphi \mathbf{v} \cdot \nabla(f + \zeta) &= \varphi \nabla \cdot [(f + \zeta)\mathbf{v}] - \varphi(f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \nabla \cdot [(f + \zeta)\varphi\mathbf{v}] - (f + \zeta)\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi \end{aligned}$$

と式変形すると (一段目の最終項は非圧縮の条件よりゼロ, 二段目の最終項は地衡流の関係式  $u = \frac{-1}{f_0} \frac{\partial\varphi}{\partial y}, v = \frac{1}{f_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}$  よりゼロであることに注意する.), 左辺第二項と同様に積分するとゼロとなることがわかる. したがって, 残った左辺第一, 四項を積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2f_0} [(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_3)^2] dx dy + \frac{2f_0}{p_s} \iint (\varphi_1 - \varphi_3)\omega_2 dx dy = 0 \quad (10)$$

が導ける.

れた平均流に関する変化率の方程式に現れる非線形の「応力」項<sup>\*20</sup>を評価するために、摂動解を使うことでなされる。続いてこの様にして誘発された効果は平均運動における(地表面の)摩擦と非断熱の過程の無視された効果を妨害すること<sup>\*21</sup>であると云うことを示してみよう。したがって、推論は擾乱の全体的な運動学は無視された物理的過程と摂動論により導入された数学的簡単化によってあまり影響しないと云う暗黙の仮定を具体化する<sup>\*22</sup>。

現在までに傾圧不安定波の運動学の最も詳細な解析は、Kuo(1952)によってなされてきた。彼は、波が潜熱を北向きに輸送し、運動エネルギーを生成し、東西流の運動量の鉛直輸送において重要であると云うことを示してきた。しかしながら、Kuoの解析では、計算が摂動は完全に  $y$  座標と独立であると云う仮定に基づいていると云う制限がある。実際の擾乱の緯度的な範囲はこの理論の最も不安定な波の  $x$  方向の波長と同じオーダーであるので、運動における  $y$  方向の制限による追加の運動学的効果はさして重要でないと云うことは理にかなっているようである。

したがって、 $y = \pm w$ <sup>\*23</sup>における固定された壁に制限された東西流に重ねられた小さい擾乱の性質を研究すると云うことに辿り着く。簡単のために、Charney and Kuo(1952)で用いられたより現実的な方程式への荒い近似として、再度「2.5次元」

<sup>\*20</sup>いわゆるレイノルズ応力のことである。例として二次元の簡単化された運動方程式を考えよう。その  $x$  成分

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

において、摂動を考えて(ここで大文字は  $x$  方向に積分した平均値を意味する),

$$\begin{aligned} u(x, y, p, t) &= U(y, p, t) + u'(x, y, p, t), \\ v(x, y, p, t) &= v'(x, y, p, t), \\ \varphi(x, y, p, t) &= \Phi(y, p, t) + \varphi'(x, y, p, t) \end{aligned}$$

ここで、 $v$ の基本場がゼロなのは、地衡流平衡  $v = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  より、 $v$ を  $x$  方向に積分すると、ゼロになるからである。これらを運動方程式に代入し、積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \frac{\partial}{\partial x}(U + u') \cdot (U + u') + \frac{\partial}{\partial y}v'(U + u') = -\frac{\partial}{\partial x}(\Phi + \Phi')$$

となる(ただし、移流項において、速度ベクトルを微分の中に入れ込んでいる。生じたお釣りの項は打ち消し合ってなくなっている)。ここで、左辺第二項と右辺はゼロとなるので、結局、

$$\frac{\partial}{\partial t}U = -\frac{\partial}{\partial y}u'v'$$

となる。この式の右辺の非線形項をレイノルズ項と呼ぶ。

<sup>\*21</sup>摩擦や加熱の効果はないが、波と平均流の相互作用により、平均流が変化する。ここで、波と平均流とは摂動法そのものの考え方を表す。

<sup>\*22</sup>これから展開する推論は仮定した数学的簡単化や物理的過程の無視の影響をあまり受けない、と云うことを意味する。

<sup>\*23</sup> $x$  方向の波長のオーダーに対してやや小さく取っておく。

---

の方程式 (1), (2), (3) を用いよう.

基本流は  $x$  について平均すると云う過程により定義する: そのような平均した量はバー $-$ を付けて, あるいは大文字で示している. 東西平均からのずれはプライム $'$ を付けて示される. この表記を用いて, 今方程式 (1), (2), (3) を以下の 2 式に

結合する<sup>\*24\*25</sup>:

$$\begin{aligned}
& \left[ f_0 \frac{\partial}{\partial t} - (\Phi_{1y} + \varphi'_{1y}) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
& [f_0 \beta y + \Phi_{1yy} + (\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \lambda^2 (\Phi_1 - \Phi_3 + \varphi'_1 - \varphi'_3)] = 0, \\
& \left[ f_0 \frac{\partial}{\partial t} - (\Phi_{3y} + \varphi'_{3y}) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi'_{3x} \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
& [f_0 \beta y + \Phi_{3yy} + (\varphi'_{3xx} + \varphi'_{3yy}) - \lambda^2 (\Phi_1 - \Phi_3 + \varphi'_1 - \varphi'_3)] = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

<sup>\*24</sup>渦位方程式 (11) を導出する. (3) より

$$\frac{2\omega_2}{p_s} = \frac{\lambda^2 D_{1,3}(\varphi_1 - \varphi_3)}{f_0^2 Dt}$$

を (1) に代入すると

$$\frac{D_1}{Dt}(f + \zeta_1) - \frac{\lambda^2 D_{1,3}(\varphi_1 - \varphi_3)}{f_0 Dt} = 0$$

である. この両辺に  $f_0$  をかけて,

$$f_0 \frac{D_1}{Dt}(f + \zeta_1) - \lambda^2 \frac{D_{1,3}(\varphi_1 - \varphi_3)}{Dt} = 0.$$

ここで, 渦度は地衡流の関係式を用いると,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \varphi$$

であるので, これを用いると上式は,

$$f_0 \frac{D_1}{Dt} \left( f + \frac{1}{f_0} \nabla^2 \varphi_1 \right) - \lambda^2 \frac{D_{1,3}(\varphi_1 - \varphi_3)}{Dt} = 0$$

となる. ここで,  $\frac{D_{1,3}}{Dt} = \frac{D_1}{Dt}$  と云う近似を用いると,

$$\frac{D_1}{Dt} [(f_0 f + \nabla^2 \varphi_1) - \lambda^2 (\varphi_1 - \varphi_3)] = 0$$

となる. 上式にラグランジュ微分の定義, 地衡流の関係式, コリオリパラメータの定義を代入し, ジオポテンシャルを  $\varphi = \Phi + \varphi'$  として基本場と摂動に分けて代入すると,

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( -\frac{1}{f_0} \Phi_{1y} - \frac{1}{f_0} \varphi'_{1y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{f_0} \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
& [(f_0(f_0 + \beta y) + \Phi_{1yy} + \varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \lambda^2 \{(\Phi_1 + \varphi'_1) - (\Phi_3 + \varphi'_3)\}] = 0
\end{aligned}$$

となり, さらに  $f_0$  を両辺にかけると

$$\begin{aligned}
& \left[ f_0 \frac{\partial}{\partial t} + (-\Phi_{1y} - \varphi'_{1y}) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
& [(f_0 \beta y + \Phi_{1yy} + \varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \lambda^2 \{(\Phi_1 + \varphi'_1) - (\Phi_3 + \varphi'_3)\}] = 0
\end{aligned}$$

となり, これは (11) の一式目と同値である. 同様の方法で, (2) と (3) から (11) の二式目も導ける. また, 一式目の  $(\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \lambda^2 (\Phi_1 - \Phi_3 + \varphi'_1 - \varphi'_3)$  と二式目の  $(\varphi'_{3xx} + \varphi'_{3yy}) - \lambda^2 (\Phi_1 - \Phi_3 + \varphi'_1 - \varphi'_3)$  はこの系における渦位  $\Pi$  である.

<sup>\*25</sup>(10) の導出において  $\frac{D_{1,3}}{Dt} = \frac{D_1}{Dt}$  あるいは  $\frac{D_{1,3}}{Dt} = \frac{D_3}{Dt}$  とする近似を使っているが, 物理的意味はよくわからない. 正しくは傾圧あるいは順圧モードに分けて摂動方程式を導くのが妥当であろう.

ここで,  $f_0, \beta, \lambda$  は定数である.  $x$  についてこれらを平均することで, 平均運動の変化率の方程式が得られる<sup>\*26\*27</sup>:

$$\begin{aligned}\Phi_{1yyt} - \lambda^2(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) &= \frac{\left[ \varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [(\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)]}{f_0}, \\ \Phi_{3yyt} - \lambda^2(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) &= \frac{\left[ \varphi'_{3y} \frac{\partial}{\partial x} - \varphi'_{3x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [(\varphi'_{3xx} + \varphi'_{3yy}) - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)]}{f_0}.\end{aligned}\quad (12)$$

このように,  $\Phi_{1t}$  や  $\Phi_{3t}$  で書かれる基本場の時間変化率は, 東西流からのずれの非線形の相互作用から生じる「応力」項により影響を受ける. 摂動論では, ずれ  $\varphi'_1$  と  $\varphi'_3$  は一次のオーダーの小さい量であると考え. そして, (5) と (4) の組み合わせにおいて, (12) は  $\Phi_{1t}$  と  $\Phi_{3t}$  はせいぜい二次のオーダーのということを示している<sup>\*28\*29</sup>.

今,  $\Phi_1$  と  $\Phi_3$  は  $y$  についての線形の関数であると云う追加の仮定を行うことで, (11) における一次の項を取り出す: つまり, 基本流速  $U_1 = -f_0^{-1}\Phi_{1y}$  と  $U_3 = -f_0^{-1}\Phi_{3y}$  は初めは  $y$  と独立であると云うことを仮定する (しかしながら, この制限を二次の

<sup>\*26</sup>  $x$  方向に平均化された渦位方程式 (12) を導出する.  $\frac{1}{L} \int_0^L A dx \equiv \bar{A}$  と云う表記を導入し, (11) の一式目を積分すると

$$\begin{aligned}f_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{1yy} + \varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \frac{\partial}{\partial x} [(\Phi_{1y} + \varphi'_{1y})(\Phi_{1yy} + \varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy})] + \frac{\partial}{\partial y} [\varphi'_{1x}(f_0\beta y + \Phi_{1yy} + \varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy})] \\ - \lambda^2 f_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1 - \Phi_3) - \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} [(\Phi_{1y} + \varphi'_{1y})(\varphi'_1 - \varphi'_3)] - \lambda^2 \frac{\partial}{\partial y} [\varphi'_{1x}(\varphi'_1 - \varphi'_3)] = 0.\end{aligned}$$

ここで,  $\Phi$  は代表的なジオポテンシャルの値なので  $x$  微分がゼロであることと,  $\varphi$  は摂動であるので時間微分するとゼロとなることに注意すると,

$$\Phi_{1yyt} - \lambda^2(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) = \frac{\left[ \varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [(\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}) - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)]}{f_0}$$

となり, (12) の一式目が導ける. 同様にして (11) の二式目を用いることで (12) の二式目も導ける. <sup>\*27</sup>ここで, 「平均流速  $U$  が  $y$  と独立である」と云う仮定を渦位方程式 (12) に使わないのは, 適用すると一項目がゼロになってしまうためである. 運動方程式ならばこの仮定の元でも議論が成り立つ.

<sup>\*28</sup> (12) において (平均流変化) =  $\varphi'^2$  となっていることを指す.

<sup>\*29</sup> [memo] 今, 境界値問題を解いているため, このような文言であるが, あえて述べる必要もない.

量  $U_{1t}$  と  $U_{3t}$  には適用しないことに気をつけよ)<sup>\*30</sup>:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] [\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy} - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)] + [\beta + \lambda^2(U_1 - U_3)]\varphi'_{1x} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_3 \frac{\partial}{\partial x} \right] [\varphi'_{3xx} + \varphi'_{3yy} - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)] + [\beta + \lambda^2(U_1 - U_3)]\varphi'_{3x} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>\*30</sup>線形化された擾乱に関する渦位方程式 (13) を導出する. (11) の一式目は次のように書ける:

$$\begin{aligned} \left[ -\varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} + \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [f_0\beta y + \Phi_{1yy} - \lambda^2(\Phi_1 - \Phi_3)] \\ \left[ f_0 \frac{\partial}{\partial t} - \Phi_{1y} \frac{\partial}{\partial x} \right] [\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy} - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)] = 0 \end{aligned}$$

ここで,  $\Phi_{1y} = -f_0U_1$  を代入すると,

$$\begin{aligned} \left[ -\varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} + \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [f_0\beta y - f_0U_{1y} - \lambda^2(\Phi_1 - \Phi_3)] \\ \left[ f_0 \frac{\partial}{\partial t} + f_0U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] [\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy} - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)] = 0 \end{aligned}$$

となる. 渦位  $\Pi_1 = \varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy} - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)$  を導入すると,

$$\varphi'_{1x}(f_0\beta - f_0U_{1yy} - \lambda^2(\Phi_{1y} - \Phi_{3y})) + f_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Pi_1 = 0$$

さらにもう一度  $\Phi_{1y} = -f_0U_1$  を代入すると,

$$\varphi'_{1x}(f_0\beta - f_0U_{1yy} - \lambda^2 f_0(U_1 - U_3)) + f_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Pi_1 = 0.$$

この両辺に  $f_0$  をかけ,  $U$  が  $y$  と独立であると云うことに注意すると,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right] [\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy} - \lambda^2(\varphi'_1 - \varphi'_3)] + [\beta + \lambda^2(U_1 - U_3)]\varphi'_{1x} = 0$$

となり, (13) の一式目が導ける. 同様に (11) の二式目を用いることで, (13) の二式目が導ける.

## 5. 不安定擾乱の運動学

簡便のために、以下を定義する<sup>\*31</sup>:

$$\begin{aligned}
 V &\equiv \frac{1}{2}(U_1 - U_3), \\
 B &\equiv \frac{\beta}{\lambda^2}, \\
 \mu &\equiv \frac{\pi}{2w}, \\
 k &\equiv \frac{2\pi}{L}, \\
 \alpha &\equiv \frac{(k^2 + \mu^2)}{\lambda^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

(13) は波型の解  $\varphi' \sim \cos \mu y \exp ik(x - ct)$  により満足されるだろう. [ $\cos \mu y$  の項は境界条件 (4) を満たすために存在している<sup>\*32</sup>.] 位相速度  $c$  は以下の方程式を満た

<sup>\*31</sup>ここで、各変数の物理的意味を確認しておく.  $V$  は鉛直方向の東西速度シアーを表し (温度風の関係式より南北方向の温度差を表す), 傾圧不安定が生じる元になっている.  $B$  は無次元化された  $\beta$  である.  $\mu$  は南北波数,  $k$  は東西波数をそれぞれ表し,  $\alpha$  は無次元化された全波数を表す.

<sup>\*32</sup>波型の解  $\varphi' \sim \cos \mu y \exp ik(x - ct)$  が境界条件を満たすことを示す. まず南北方向の境界条件 (4) から考える.  $y = \pm w$  のとき,  $w = \pi/2\mu$  より  $\cos \mu y = 0$  となるので,  $\varphi'(\pm w) = 0$  であり, (4) を満たす. 続いて東西の周期境界条件を考える.  $x = 0$  と  $x = L$  での値が等しくならなければならないので  $e^{ikx} = e^{ik(x+L)} = e^{ikx} e^{ikL}$ . ここで,  $e^{ikL} = 1$  となるには  $kL = 2\pi$  でないといけない. よって  $k = 2\pi/L$  とおかななくてはならない.

さねばならない<sup>\*33</sup>:

$$c = \frac{1}{2}(U_1 + U_3) + [\alpha(2 + \alpha)]^{-1}[-(1 + \alpha)B \pm \sqrt{B^2 - \alpha^2(4 - \alpha^2)V^2}]. \quad (15)$$

$\alpha$  の与えられた値に対して  $c$  は 2 つの値を取り得ることがわかる. また,  $\alpha < 2$  のとき,  $c$  は複素数となり得るだろうことがわかる. 複素数  $c$  に対する正確な条件は

$$V^2\alpha^2(4 - \alpha^2) > B^2 \quad (16)$$

である<sup>\*34</sup>.  $c$  の複素数の値は, 摂動が時間に従って増幅するか減衰するかということの意味する. 我々は, 実際の中緯度大気における擾乱の代表的なものを見なしている増幅の型に興味がある. これらは (16) が満たされるときに, (15) の正符号を取

<sup>\*33</sup>(15) を導出する. (13) の一式目に波型の解  $\varphi'_1 = X_1 \cos \mu y \exp[ik(x - ct)]$ ,  $\varphi'_3 = X_3 \cos \mu y \exp[ik(x - ct)]$  を代入すると,

$$[-ikc + U_1 ik][-k^2 X_1 - \mu^2 X_1 - \lambda^2(X_1 - X_3)] + [\beta + \lambda^2(U_1 - U_3)]ikX_1 = 0.$$

両辺  $ik\lambda^2$  で割ると,

$$[U_1 - c] \left[ - \left( \frac{k^2 + \mu^2}{\lambda^2} + 1 \right) X_1 + X_3 \right] + \left[ \frac{\beta}{\lambda^2} + (U_1 - U_3) \right] X_1 = 0$$

(14) より各変数の定義を導入すると,

$$[-(U_1 - c)(\alpha + 1) + (B + 2V)]X_1 + [U_1 - c]X_3 = 0.$$

同様にして (13) の二式目を用いると,

$$[-(U_3 - c)(\alpha + 1) + (B - 2V)]X_3 + [U_3 - c]X_1 = 0.$$

上の二式をまとめると,

$$\begin{pmatrix} -(U_1 - c)(\alpha + 1) + (B + 2V) & U_1 - c \\ U_3 - c & -(U_3 - c)(\alpha + 1) + (B - 2V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

. ここで,  $X_1, X_3$  が存在するためには,

$$[-(U_1 - c)(\alpha + 1)][-(U_3 - c)(\alpha + 1) + (B - 2V)] - (U_1 - c)(U_3 - c) = 0$$

を満たさなければならない.  $c$  についての二次式となるよう整理すると,

$$\begin{aligned} & [(\alpha + 1)^2 - 1]c^2 - [(U_1 + U_3)\{(\alpha + 1)^2 - 1\} - 2(\alpha + 1)B]c \\ & + [U_1 U_3\{(\alpha + 1)^2 - 1\} - (\alpha + 1)\{(B + 2V)U_3 + (B + 2V)U_1\} + (B^2 - 4V^2)] = 0. \end{aligned}$$

したがって二次方程式の解の公式を用いて, 項を整理すると,

$$c = \frac{1}{2}(U_1 + U_3) + [\alpha(2 + \alpha)]^{-1}[-(1 + \alpha)B \pm \sqrt{B^2 - \alpha^2(4 - \alpha^2)V^2}]. \quad (15)$$

となり, (15) が導ける.

<sup>\*34</sup>図 1 における  $\tau = \infty$  の曲線より上側を指している.

ることで得られる。この場合、擾乱  $\varphi'_1$  や  $\varphi'_3$  は以下の公式によって与えられることを簡単に示せる:

$$\begin{aligned}\varphi'_3 &= De^{\nu_i t} \cos \mu y \cos k(x - c_r t), \\ \varphi'_1 &= \sigma De^{\nu_i t} \cos \mu y \cos [k(x - c_r t) + \psi].\end{aligned}\quad (17)$$

擾乱の絶対的振幅を決定する定数  $D$  は、(13) の線形性のために完全に任意である<sup>\*35</sup>。しかしながら、相対的振幅  $\sigma$  は決定され、位相角  $\psi$  も同様に決定される<sup>\*36</sup>:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left[ \frac{(2\alpha V + B)}{(2\alpha V - B)} \right]^{1/2}, \\ \tan \psi &= (2 + \alpha) \frac{\nu_i}{k\alpha V}.\end{aligned}\quad (18)$$

ここで、 $\nu_i = kc_i$  は「飛躍の振動数」<sup>\*37</sup>であり、次のように与えられる:

$$\nu_i = k \frac{[\alpha^2(4 - \alpha^2)V^2 - B^2]^{1/2}}{[\alpha(2 + \alpha)]}.\quad (19)$$

このように、増幅波 ( $\nu_i > 0$ ) における  $\varphi'_1$  の波は振幅が  $\varphi'_3$  より大きくなり、それよりも位相が遅れる ( $\nu_i > 0$  において)<sup>\*38</sup>。実の位相速度は  $c_r$  によって与えられる:

$$c_r = \frac{1}{2}(U_1 + U_3) - \frac{(1 + \alpha)B}{[\alpha(2 + \alpha)]}.$$

<sup>\*35</sup>つまり  $D$  は決定できない。

<sup>\*36</sup>(17), (18) を導出する。前脚注の (\*) 式において、 $X_3 = D$  とおき、整理すると、

$$X_1 = \alpha + 1 - \frac{B - 2V}{U_3 - c} D$$

となる。ここで、 $c$  を複素数として  $c = c_r + ic_i$  と置き、実部と虚部にまとめ直すと、

$$\begin{aligned}X_1 &= \text{Re}[X_1]D + \text{Im}[X_1]D \\ &= \frac{(\alpha + 1)\{(U_3 - c_r)^2 + c_i^2\} - (B - 2V)(U_3 - c_r)}{(U_3 - c_r)^2 + c_i^2} D - i \frac{(B - 2V)c_i}{(U_3 - c_r)^2 + c_i^2} D\end{aligned}$$

である。一般に複素数  $z$  に対して、実部を  $x$ 、虚部を  $y$  とすると、

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left[ i \tan^{-1} \frac{y}{x} \right]$$

が成り立つので、 $\sigma = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\tan \psi = y/x$  として計算すると、

$$\begin{aligned}\sigma &= \left[ \frac{(2\alpha V + B)}{(2\alpha V - B)} \right]^{1/2}, \\ \tan \psi &= (2 + \alpha) \frac{\nu_i}{k\alpha V}\end{aligned}\quad (18)$$

となり (18) が導ける。また、 $X_1 = \sigma De^{i\psi}$ 、 $X_3 = D$  を  $\varphi'_1$ 、 $\varphi'_3$  に代入すると (17) が導ける。

<sup>\*37</sup>これは「擾乱の増幅率」を指していると考えられる。

<sup>\*38</sup> $\nu_i > 0$  のとき (18)  $\psi > 0$  となり、(17) より  $\varphi'_1$  の方が  $\varphi'_3$  よりも遅れていることがわかる。

この不安定性の大きさの考えを得るために、与えられた擾乱が二倍の大きさになるために必要な時間  $\tau = \nu_i^{-1} \ln 2$ <sup>\*39</sup> は、風のシアーと波長  $L$  の関数として図 1 に示

---

<sup>\*39</sup> 擾乱が二倍の大きさになる時間  $\tau$  を求める。擾乱  $\varphi'$  の振幅が二倍になるためには、

$$De^{\nu_i(t+\tau)} = 2De^{\nu_i t}$$

を  $\tau$  について解けば良い。したがって  $\tau = \nu_i^{-1} \ln 2$  となる。

されている. 使用される他のパラメタの数値は以下のものである<sup>\*40</sup>:

$$\begin{aligned} \{\Phi_1 - \Phi_3\} &= 9.81 \times 8.16 \times 10^3 \text{m}^2 \text{sec}^{-2}, \\ \frac{\Theta_2}{(\Theta_1 - \Theta_3)} &= \frac{316}{36} \sim 8.8, \\ \mu &= \frac{3}{R_e}, \\ \frac{dU}{dz} &= \frac{2gV}{\Phi_1 - \Phi_3}. \end{aligned} \quad (20)$$

<sup>\*40</sup>(20) の見積もり, あるいは導出をする. まず, 一式目について考える.  $\Phi_1 - \Phi_3$  の値を見積もるために, level1, 3 の高度差  $Z_1 - Z_3$  を見積もる. 米国標準大気の数値 (Holton 2012, Appendix E) を線形内挿して見積もると,  $Z_1 - Z_3 = 7.89 \times 10^3 \text{[m]}$  であり, これは原文の見積もりとおおよそ合っている. あるいは別の方法で一式目を見積もろう.  $\frac{d\Phi}{dp}$  を level2 に適用すると,

$$\left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{p_1 - p_3}$$

である. 一方で静水圧の式より,  $\left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_2 = -\frac{T_2 R}{p_2}$  であるので,

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{p_1 - p_3} = -\frac{T_2 R}{p_2}$$

両辺の分母は 500hPa であるので, 気温減率を  $\Gamma = 6.5 \text{[K/km]}$ , 地表と level2 の間の高度を  $z = 5.5 \text{[km]}$  とすると,

$$\Phi_1 - \Phi_3 = R(T_4 - \Gamma z) = \frac{2000}{7}(288 - (6.5 \times 5.5)) \sim 7.21 \times 10^4$$

と見積もれる (ただし, 地表面の温度  $T_4$  を 288[K] とした). これは原文の見積もりとおおよそ合っている. また,  $\Phi_1 - \Phi_3 = RT_2 = H_2 g$  より, 原文で与えられた重力加速度とスケールハイトの値を用いて逆に  $T_2$  を見積もると,

$$T_2 = \frac{gH_2}{R} = \frac{9.81 \times 8.16 \times 10^3}{\frac{2000}{7}} \sim 2.8 \times 10^2 \text{[K]}$$

となる. したがって, 280[K] の等温大気を仮定していることがわかる. 次に, 二式目について考える.  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  の値を見積もるために,  $T_1, T_2, T_3$  の値を見積もる. 米国標準大気の数値 (Holton 2013, Appendix E 参照) を線形内挿して見積もると, それぞれ  $T_1 \sim 221 \text{[K]}$ ,  $T_2 \sim 251 \text{[K]}$ ,  $T_3 \sim 272 \text{[K]}$  である (この  $T_2$  の見積もりから, 先ほどの等温大気の仮定は少々高いことがわかる.).  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  の値を見積もると,  $\Theta_1 \sim 1225 \text{[K]}$ ,  $\Theta_2 \sim 1140 \text{[K]}$ ,  $\Theta_3 \sim 1096 \text{[K]}$  である. したがって,  $\frac{\Theta_2}{\Theta_1 - \Theta_3} \sim 8.8$  であるので, おおよそ原文の値と合っている. 続いて, 三式目について考える.  $2w$  は緯度 60 度の距離と対応していることより,

$$2w = R_e \frac{\pi}{3}$$

これと (14) の三式目より (20) の三式目が導ける. あるいは,  $y = \pm w$  における境界条件を考えて,

$$\cos \mu y = \cos \left\{ \pm \mu \frac{\pi}{6} R_e \right\} = 0$$

これを満たすためには,  $\pm \mu \frac{\pi}{6} R_e = \frac{\pi}{2}$  となれば良いので, (20) の三式目が導かれる. 最後に四式目について考える.

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)_2 = \left(\frac{dU}{dp} \frac{dp}{dz}\right)_2 = \left(\frac{dU}{dp} (-\rho g)\right)_2 = \left(-\frac{pg}{RT} \frac{dU}{dp}\right)_2 \quad (*)$$

ここで, level2 のスケールハイト  $H_2 = \frac{RT_2}{g}$  を導入すると,

$$(*) = -\frac{p_2}{H_2} \frac{U_1 - U_3}{p_1 - p_3} = \frac{2V}{H_2} = \frac{2gV}{\Phi_1 - \Phi_3}$$

となり, (20) の四式目が導ける.

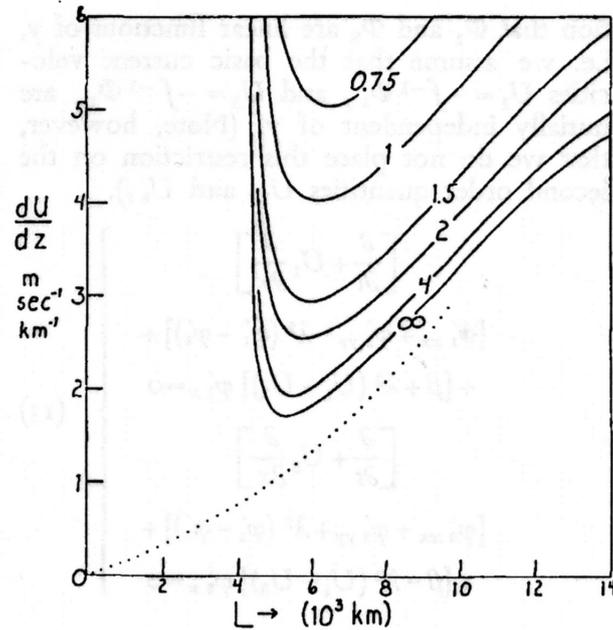


図 1: 基本流の鉛直シアーと波長の関数として与えられた, 2 レベルモデルにおいて不安定波が二倍になるまでの時間 (単位は [日]). 破線は Charney と Kuo の摂動解析における  $\nu_i = 0$  の曲線を示す.

$R_e$  は地球の半径で, 距離  $2w$  は緯度 60 度と対応している. 定数  $f_0, \beta$  は緯度 45 度で見積もられた.

参照のために, Hess(1948) と Palmen and Newton(1948) によって出版された, 冬半球の子午面断面における  $dU/dz$  の平均値は約  $2.3 \text{ m sec}^{-1} \text{ km}^{-1}$  で, 北緯 35 度における約  $4.3 \text{ m sec}^{-1} \text{ km}^{-1}$  は Hess の断面において  $dU/dz$  の最大値であると言うことに気をつけることは興味深いだろう. これは擾乱が二倍の大きさになるために 1 ~ 3 日の間の時間に対応している.

最大の不安定の波長は約 6000km であるようだ. これは北緯 45 度における波数, 約 5 に対応している<sup>\*41</sup>.

<sup>\*41</sup>最大の不安定の波長 6000km が北緯 45 度における波長, 約 5 に対応しているかどうかを示す.

$$\frac{2\pi \frac{R_e}{\sqrt{2}}}{k} = 6000$$

を  $k$  について解くと (ただし,  $\frac{6000}{R_e} \sim 0.94$  とした),  $k \sim 4.7$  となる.

安定性の基準 (16) は  $V$  が緯度と独立であると云う仮定の元に導かれたが、何度の緯度で (16) を満たすのを見るために、夏半球と冬半球の Hess(1948) の断面を調べることは興味深い。最も好まれる条件<sup>\*42</sup>は  $L$  を選ぶことで<sup>\*43</sup>、したがって  $\alpha^2 = 2$  とすることで得られる<sup>\*44</sup>。(16) において  $\alpha^2$  を 2 に置き換えることで、不安定の基準は以下のときに満たされる:

$$\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} < \frac{4\Omega R_e \Theta_2}{\{\Phi_1 - \Phi_3\}(\Theta_1 - \Theta_3)} |V| \sim 0.1 |U_1 - U_3|.$$

ここで、 $U_1 - U_3$  の単位は  $\text{m sec}^{-1}$  で、 $\varphi$  は緯度である。 $\Omega$  は地球の角速度で、 $R_e$  は地球の半径である。この関係は図 2 に示されており、おそらく、強さと緯度の両方において低気圧の活動度の季節変化の部分的な説明と考えられるだろう。

準地衡流摂動方程式のさらなる正確な解は Charney(1947) と Kuo(1952) によってなされてきた。彼らの結果は、十分に短い波が常に不安定と云う点で主に上記の結果と異なる。図 1 において、これは不安定の領域は点線で描かれることを意味しているだろう。しかしながら、Kuo は不安定の付け加えられた領域における  $\nu_i$  の値は非常に小さいと云うことを示してきた<sup>\*45</sup>。この議論において、我々は大きな  $\nu_i$  を持つ波に最も興味があるので、我々がここで導いた結果を傾圧波の運動学に対する筋道立った良い一次近似として受け入れることは理にかなっている様である。

## 6. 基本流の二次のオーダーの変化

方程式 (12) と境界条件 (5) より、基本流が時間に従ってどのように変化するかと云うことがわかる。摂動理論は一次のオーダーに対して正しい摂動  $\varphi'_1$  と  $\varphi'_3$  の表現を与えてきた。したがって、我々は、次のオーダーに対して正しい (12) の右辺を見積もる位置におり、それによって二次のオーダーに対して正しい  $\Phi_{1t}$  と  $\Phi_{3t}$  を得る。

<sup>\*42</sup>最も好まれる条件とは、最も成長率が早いと云うことだろう。

<sup>\*43</sup>図 1 における極小の部分を目指す。

<sup>\*44</sup>擾乱の成長率が最も早い (図 1 における極小値) が  $\alpha^2 = 2$  の場合であることを示す。 $\tau = \infty$  のとき、(16) の不等号は等号に置き換わる。これを  $V^2$  について解き直すと、

$$V^2 = \frac{B^2}{\alpha^2(4 - \alpha^2)}$$

これを  $\alpha^2$  で微分してゼロになれば良いので、

$$\frac{\partial V^2}{\partial \alpha^2} = \frac{(-4 + 2\alpha^2)B}{(4\alpha^2 - \alpha^4)^2} = 0$$

よって  $\alpha^2$  について解くと  $\alpha^2 = 2$  となり、導けた。

<sup>\*45</sup>図 1 において  $L$  が小さいとき、つまり不安定曲線が描かれていない部分のことである。

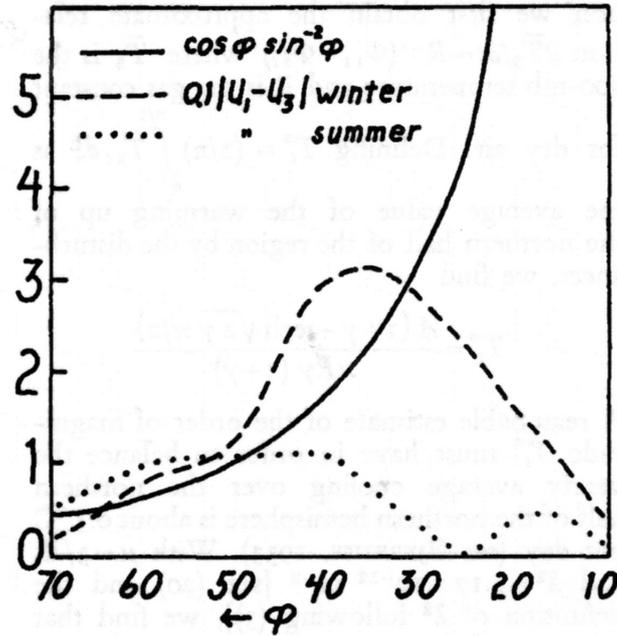


図 2: 緯度と季節の関数としての, 2 レベルモデルにおける傾圧波の安定性基準の満足.  $0.1(U_1 - U_3)$ (単位  $[m \text{ sec}^{-1}]$ ) の曲線は Hess の断面図より描かれた.

(12) の右辺を見積もるために (17) を使うことで,  $\varphi'_{xx} + \varphi'_{yy}$  を含む項が落ちることがわかる. つまり, 摂動の渦度の摂動による移流はゼロと云うことである. これは  $U_1$  と  $U_3$  が (初めは)  $y$  に独立であるという仮定の結果である. 摂動の速度による摂動の厚さの移流を表している他の項は落ちない. (12) は次のように書かれるだ

ろうことがわかる<sup>\*46</sup>:

$$\begin{aligned}\Phi_{1\xi\xi t} - \gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) &= -\frac{1}{2}A \sin 2\xi, \\ \Phi_{3\xi\xi t} + \gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) &= \frac{1}{2}A \sin 2\xi.\end{aligned}\tag{21}$$

<sup>\*46</sup>(21)(22) を導出する. まず, 原文中にあるように (12) の右辺の内,  $\varphi'_{xx} + \varphi'_{yy}$  の項が落ちることを確認する. (12) の一式目の右辺より  $\varphi'_{xx} + \varphi'_{yy}$  の項のみ取り出すと (定数  $f_0$  は省略している),

$$\overline{\left[ \varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [\varphi'_{1xx} + \varphi'_{1yy}]}$$

である. これに (17) を代入すると,

$$\overline{\left[ \varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [-(k^2 + \mu^2)\varphi'_1]} = -(k^2 + \mu^2) \left[ \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi'_1}{\partial y} \right] = 0$$

となり, 確かにゼロとなる. したがって, (12) の一式目の右辺は

$$\lambda^2 \overline{\left[ \varphi'_{1y} \frac{\partial}{\partial x} - \varphi'_{1x} \frac{\partial}{\partial y} \right] [\varphi'_1 - \varphi'_3]} = \lambda^2 \overline{\varphi'_{1y} \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} - \varphi'_{1x} \frac{\partial \varphi'_3}{\partial y}}\tag{*}$$

となる ( $f_0$  は省略した.). これに (17) を代入して整理すると,

$$(*) = -\lambda^2 \sigma D^2 e^{\nu_i t} \frac{k\mu}{2} \sin 2\mu y \sin \psi$$

となるので, (12) の一式目は結局,

$$\Phi_{1yyt} - \lambda^2(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) = -\frac{1}{f_0} \lambda^2 \sigma D^2 e^{2\nu_i t} \frac{k\mu}{2} \sin 2\mu y \sin \psi.$$

ここで,  $\xi = \mu y$ ,  $\gamma = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$  を導入すると,

$$\Phi_{1\xi\xi t} - \gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) = -\frac{\lambda^2}{f_0 \mu^2} \sigma D^2 e^{2\nu_i t} k\mu \sin \psi \frac{1}{2} \sin 2\xi.\tag{**}$$

ここで, 右辺の一部を取り出して計算すると,

$$\frac{\lambda^2}{f_0 \mu^2} \sigma D^2 e^{2\nu_i t} k\mu \sin \psi = \frac{\lambda^2 D^2 e^{2\nu_i t}}{f_0 \mu} \left[ \frac{2\alpha V + B}{2\alpha V - B} \right]^{1/2} k \frac{2 + \alpha}{\nu_i} k\alpha V \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{(2+\alpha)\nu_i}{k\alpha V} \right)^2}}\tag{**}$$

である (ただし,  $\tan \psi = T$  とおくと,  $\sin \psi = \frac{T}{\sqrt{1+T^2}}$  と表せることを用いた.). (\*\*) をさらに計算して整理すると,

$$(**) = \frac{\lambda^2 D^2 e^{2\nu_i t}}{k\mu} \frac{\alpha(2 + \alpha)\nu_i}{2\alpha V - B}$$

となり, これを  $A$  とおくと (22) の一式目が導ける. また (22) を (\*) に導入すると (21) の一式目が導ける. 同様にして (12) の二式目を用いると (21) の二式目が導ける.

ここで,

$$A = \frac{\lambda^2 D^2 (\exp 2\nu_i t) \alpha (2 + \alpha) \nu_i}{f_0 \mu (2\alpha V - B)},$$

$$\gamma = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$$
(22)

であり, 次の新しい無次元変数を導入した:

$$\xi = \mu y = \frac{\pi y}{2w}.$$

$\xi = \pm\pi/2$  における側方の境界条件 (5) を満たす (21) の解は

$$\Phi_{1t} = -\Phi_{3t} = \frac{A}{2(2 + \gamma)} \left[ \frac{\sinh \sqrt{2\gamma}\xi}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right]$$
(23)

である\*47.

図 3 はこれらの解の図を含んでいる.

\*47(23) を導出する. (21) の一式目と二式目の和と差を取ると,

$$\begin{aligned} \Phi_{1\xi\xi t} + \Phi_{3\xi\xi t} &= 0, \\ \Phi_{1\xi\xi t} - \Phi_{3\xi\xi t} - 2\gamma(\Phi_{1t} - \Phi_{3t}) &= -A \sin 2\xi. \end{aligned}$$

ここで,  $X = \Phi_{1t} + \Phi_{3t}$ ,  $Y = \Phi_{1t} - \Phi_{3t}$  とすると,

$$\begin{aligned} X_{\xi\xi} &= 0, \\ Y_{\xi\xi} - 2\gamma Y &= -A \sin 2\xi. \end{aligned}$$

この二式の一般解はそれぞれ,  $X = c_1 \xi + c_2$ ,  $Y = c_3 \cosh \sqrt{2\gamma}\xi + c_4 \sinh \sqrt{2\gamma}\xi + \frac{A}{2(2+\gamma)\sin 2\xi}$  である ( $c_1, c_2, c_3, c_4$  は任意定数). 次に境界条件 (5) をこれらに適用することを考える.  $y$  についての境界条件 (5) を  $\xi$  について書き換えると,

$$\int_0^L \mu \varphi_{\xi t} = 0 \quad \text{at } \xi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

$\varphi = \Phi(y) + \varphi'(x, y, t)$  であり,  $\Phi$  は定数であるので, 上述の  $\xi$  についての境界条件より  $\xi = \pm \frac{\pi}{2}$  において  $\Phi_{\xi t} = 0$  である. これを  $X, Y$  の一般解に適用すると,  $c_1 = c_3 = 0$ ,  $c_4 = -\frac{A}{2+\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}}$  が求められるので, 任意定数  $c_2$  をゼロにとると,

$$\begin{aligned} X &= \Phi_{1t} + \Phi_{3t} = 0, \\ Y &= \Phi_{1t} - \Phi_{3t} = -\frac{A}{2 + \gamma} \frac{1}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} \sinh \sqrt{2\gamma}\xi + \frac{A}{2(2 + \gamma) \sin 2\xi}. \end{aligned}$$

したがって, この二式より

$$\Phi_{1t} = -\Phi_{3t} = \frac{A}{2(2 + \gamma)} \left[ \frac{\sinh \sqrt{2\gamma}\xi}{\sqrt{2\gamma} \cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2\xi \right]$$
(23)

が導ける.

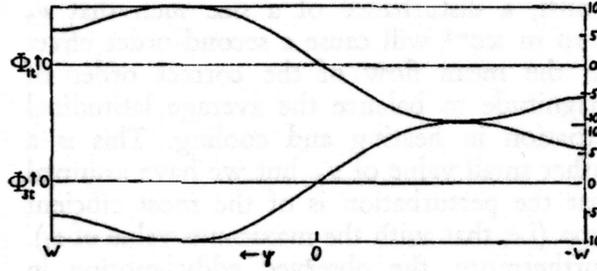


図 3: 平均化された渦度方程式の解  $\Phi_{1t}$  と  $\Phi_{3t}$  のグラフ. 右辺のスケールは  $T_t^*$  が  $0.5^\circ\text{C day}^{-1}$  のときの平均高度時間変化率と対応している.

北半分の領域において,  $\Phi_{1t} - \Phi_{3t}$  は正である, 一方で南半分の領域では負である. これは北半分の領域が暖まっていることと南半分の領域が冷えていることに対応している. したがって, Kuo(1952) によって以前示されたように, 不安定波の一つの効果は, 非断熱的な原因による加熱と冷却の緯度的な変動を中和することである.

この効果が確かな大きさを持つために必要な擾乱の大きさは直ちに見積もられる. 静水圧の式より, まず近似式  $\partial \bar{T}_2 / \partial t \sim R^{-1}(\Phi_{1t} - \Phi_{3t})$  が得られる. ここで  $\bar{T}_2$  は 500mb での温度で,  $R$  は乾燥気体の気体定数である. 擾乱による北半分の領域の暖まりの平均値を  $T_t^* \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{T}_{2t} d\xi$  と定義すると,

$$T_t^* = \frac{A(1 + \gamma - \text{sech} \sqrt{2\gamma}\pi/2)}{\pi R \gamma (2 + \gamma)}$$

を得る. 北半球の北半分に渡って年平均した冷却とバランスするための  $T_t^*$  の絶対値の理に叶った見積もりは, 1日に約  $0.5$  度 (Bjerknes, 1933) である.  $\mu = 3/R_e$  と  $\lambda^2 = 1.17 \times 10^{-12} \text{m}^{-2}$  を用いると ((20) と, (3) に従う  $\lambda^2$  の定義を見よ),  $\gamma \sim 5.3$  と

$$T_t^* (\text{deg day}^{-1}) \sim 15.4 \{A (\text{m}^2 \text{sec}^{-3})\} \quad (24)$$

がわかる.  $v$  の高度 3(750 mb) での最大値を  $v_0$  と定義すると, 次のように書ける:

$$v_0 = \left[ \frac{\varphi'_{3x}}{f_0} \right]_{\max} = \frac{k D e^{\nu_i t}}{f_0}.$$

これを (22) に導入すると, 次式を得る:

$$v_0^2 = \frac{A k^2 \mu (2\alpha V - B)}{f_0 \lambda^2 \alpha (2 + \alpha) \nu_i}.$$

$A$  を  $(30.8)^{-1} \text{m}^2 \text{sec}^{-3}$  と等しいとし<sup>\*48</sup>,

$$k = \frac{2\pi}{6 \times 10^6} \text{m}^{-1},$$

$$V \sim B \sim 14 \text{m sec}^{-1},$$

$$\nu_i = \frac{\ln 2}{1.245} \text{days}^{-1}$$

以上の値を (20) に追加すると,  $v_0$  は約  $10 \text{m sec}^{-1}$  であることがわかる. 言い換えると,  $v_0$  が  $10 \text{m sec}^{-1}$  であるような大きさの擾乱は, 加熱と冷却の平均緯度変化とバランスするために, 正しい大きさのオーダーの平均流に二次のオーダーの効果を引き起こす. これは  $v_0$  の値よりやや小さいが, 擾乱は最も効率の良い型 (つまり,  $v$  の最大値を持つもの) であると仮定してきた. さらに, 大気における観測された渦運動は, 山岳の経度方向の不揃い (これはエネルギーの緯度方向の輸送に対してきわめて重要な寄与はしないであろうか) のような特徴が原因である.

## 7. 子午面循環

この章では, 傾圧波の存在は小さな子午面循環の存在を示唆していることを見ていく. 準地衡流運動の仮定は, 子午面循環の生成を議論するために, 我々に二番目の運動方程式を使うことを許さない<sup>\*49</sup>. したがって, 我々は他の方法でその存在を示さなければならない. (1) を東西平均すると, 次式を得る:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{p_s \Phi_{1yyt}}{2f_0^2} = \frac{p_s \mu^2 \Phi_{1\xi\xi t}}{2f_0^2}.$$

ここで, (23) を使うと,  $\bar{\omega}_2$  に関する次の公式を得る:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{p_s \mu^2 A}{4f_0^2(2 + \gamma)} \left[ \frac{\sqrt{2\gamma} \sinh \sqrt{2\gamma} \xi}{\cosh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}} - 2 \sin 2\xi \right]. \quad (25)$$

今, 連続の式 (6) を  $x$  について積分し, 以下を定義する:

$$\bar{v}_1 \equiv \frac{2}{p_s} \int_0^{p_s/2} \bar{v} dp,$$

$$\bar{v}_3 \equiv \frac{2}{p_s} \int_{p_s/2}^{p_s} \bar{v} dp.$$

<sup>\*48</sup>  $A$  をこの値において (24) において  $T_t^* \sim 0.5 [^\circ\text{C}/\text{day}]$  となるようにしている.

<sup>\*49</sup> 通常, 準地衡流の理論では, 連続の式から  $\omega$  を求めようとすると, 地衡流による水平非発散により破綻する. したがって  $\omega$  を求める際には熱力学の式を用いる.

すでに (1), (2) を導いたように,  $p = 0$  と  $p = p_s$  で  $\omega$  は消えることを仮定する.  $\bar{v}_1$  と  $\bar{v}_3$  は  $\bar{\omega}_2$  と以下の公式で関係づけられる:

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \xi} = -\frac{2\bar{\omega}_2}{\mu p_0}.$$

今,  $\xi = -\pi/2$  において  $\bar{v}_1$  と  $\bar{v}_3$  は両方ゼロに等しいと云う境界条件を用いて,  $\xi$  について  $\xi = -\pi/2$  から  $\xi = \xi$  まで積分されるだろう:

$$-\bar{v}_1 = \bar{v}_3 = \frac{\mu A}{2f^2(2+\gamma)} \left[ \frac{\cosh \sqrt{2\gamma}\xi}{\cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \cos 2\xi \right]. \quad (26)$$

( $\xi = \pi/2$  において  $\bar{v}_1$  と  $\bar{v}_3$  もまた消えると云う境界条件は自動的に満たされることに気をつけよう.)

(25) と (26) より与えられる子午面循環は図 4 に示される. ここで,  $A$  は  $T_t^* = 0.5^\circ\text{C day}^{-1}$  と対応していると見なしている. この子午面循環は 3 つの「セル」から成る, つまり, 北と南の端の「直接的な」セルと, 領域の中央部にあるより大きな「間接的な」セルである. これら 3 つのセルは非常に弱く, したがって現在の観測網で見つけられるかどうか疑わしい.

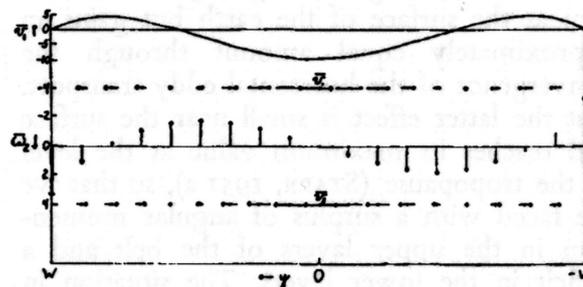


図 4: 傾圧波による子午面循環. 矢印は流れの向きと激しさを示す.  $\bar{\omega}_2$  と  $\bar{v}_1$  の値は  $T_t^*$  を  $0.5^\circ\text{C day}^{-1}$  ととったときのもので, 左側に示している;  $\bar{\omega}_2$  の単位は  $\text{mb day}^{-1}$  で,  $\bar{v}_1$  (上の線) の単位は  $\text{cm sec}^{-1}$  である.

子午面循環の存在は (1), (2), (3) 式に組み入れられない. もしそうした場合, 平均化した方程式 (12) は  $f_0 B \bar{v}$  を含むだろう.  $\bar{v}$  に関する陽な表現<sup>\*50</sup>をしていることで, 今 (12) における無視は正当化され得る. もし, 残った項  $\Phi_{1yyt}$  の平方とともに,

<sup>\*50</sup>(12) において風速は,  $\bar{v} = \bar{v}_g + \bar{v}_a$  ではなく,  $\bar{v} = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \Phi$  で考えている.

無視された項  $f\beta\bar{v}$  の平方の  $-\pi/2 \leq \xi \leq \pi/2$  に渡る平均値の比を計算すれば、約 0.03 の値を得る。この荒い比較は、東西方向に平均された渦度方程式 (12) の解において、平均循環 (25), (26) の存在は相対的に重要でないことを示す。

$\Phi_{1t} - \Phi_{3t}$  の分布に反映されるような [参照はここで (31) に為されるべきである] 我々のモデルにおける緯度方向のエネルギー輸送は、水平方向の渦輸送と子午面循環 (25), (26) の両方によってもたらされたと示されるだろう。[この輸送がこれら二つの種類の寄与に分解されるだろうと云う議論は、Starr (1951 b) によって為されてきた。] 子午面循環によるエネルギー輸送は常に  $\bar{v}_1$  と同じ方向を向いており、したがって北と南の領域において極方向の輸送を生み出し、中央部において赤道方向の輸送を生み出す。他方で渦輸送は常に極向きで、中央部において子午面循環からの寄与より大きい。

緯度円を横切る潜熱の実際の渦輸送のいくつかの観測は White (1951) によってなされてきた。彼はまた放射の効果を中和するために緯度円を横切って輸送されなければならないエネルギー量をまとめることも行った。彼のデータは観測された渦フラックスは、必要な輸送を考えると、中緯度において僅かに大きすぎ、高緯度や低緯度においてはおそらく小さすぎると云うことを示している。そのデータはこの最後の意見に信用を置き過ぎていると云うことを十分に示していないけれども、もしその矛盾が子午面循環により為されていれば、子午面循環は図 4 のそれと類似するだろう。

壁から離れた領域における大半の熱輸送は渦によって為されるので、図 4 は、必要なエネルギー輸送の全てを与える仮定の子午面循環と非常に異なっていると云うことは驚くべきことではない。そのような循環の例は Bjerknes et al. (1933) により計算されている。また予想されるように、図 4 のそれよりはるかに強い。

## 8. 東西方向の運動量の変化

(23) により与えられる  $\Phi_1$  と  $\Phi_3$  の二次のオーダーの変化は、傾圧波は平均の東西方向の運動量の分布を変化させていると云うことを示す。(23) を  $y$  について微分することで、基本流速の変化は

$$U_{3t} = -U_{1t} = \frac{A\pi}{2f_0(2+\gamma)} \left[ \frac{\cosh \sqrt{2\gamma}\xi}{\cosh \sqrt{2\gamma}\frac{\pi}{2}} + \cos 2\xi \right] \quad (27)$$

で与えられることがわかる。A を  $(15.4)^{-1} \text{m}^2 \text{sec}^{-3}$  と見なすとき ( $T_t^* = 1^\circ\text{C day}^{-1}$  に対応している) の  $U_{3t}$  の分布は図 5 に示している。

これが大循環についてどんな示唆を持っているかと云うことを議論する前に, (27) に関する次の二つの事実に気を付けよう:

1. (27) を (26) と比較すると,

$$U_{1t} - f_0 \bar{v}_1 = 0, \quad \text{and} \quad U_{3t} - f_0 \bar{v}_3 = 0 \quad (28)$$

がわかる. したがって, 基本流における速度変化 (27) は「仄かしの<sup>\*51</sup>」子午面循環 (25), (26) の存在により説明される<sup>\*52</sup>.

2.  $U_{3t} = -U_{1t}$  より, 任意の  $\xi$  の値に対して, 平均速度  $1/2(U_1 + U_3)$  の変化はない. したがって, 我々の考える擾乱は, Kuo (1949) で研究されているように, 緯度円を横切る正味の運動量の輸送に関するいかなる機構も含まない<sup>\*53</sup>.

地表面の東西風のプロファイルにおける亜熱帯の東風, 中緯度の西風, 極の東風の存在を説明する為の試みは長く気象学者の興味を引いてきた. 一般に, そのような全ての試みは Hadley (1735) の貿易風帯に関する馴染みのあるモデルより始まった. そして, 地表面に西風と極の東風が連続して現れることを「説明する」ために必要な様々な型の摩擦の効果を持ち出すことにより, この形の理屈をより高緯度へ拡張することを試してきた.

1948 年に, Starr は異なる緯度帯の角運動量収支は大規模な水平方向の流れのパターンにおける非対称性により非常に影響を与えられるだろうと云う Jeffreys (1926) の示唆に再び注意を引いた. これらの非対称性により, 緯度円に沿って地表から大気の上端まで積分するとき,  $\rho uv$  ( $\rho$  は密度である) の値はゼロにならないだろう. それによって, その緯度を横切る正味の運動量フラックスを与えるだろう. 今までに為されてきた, いくつかの総観規模におけるこの過程の研究はこの輸送が確かに存在することを示している. さらに, この過程による様々な緯度帯への正味の運動量の輸送は, むしろ各緯度帯が地表面の摩擦の効果や大きな山の幅を横切る圧力差により生じるトルクを通して経験する運動量の増減を明らかにする. [これらの結果の要約と彼らの解釈の一般的な議論は Starr (1951 a) により為されてきた.] しかしながら, より詳細な典型的な緯度帯における運動量収支が調べられるとすぐに,  $u$  と  $v$  の相関による水平方向の輸送に加えて, 他の型の運動量輸送が存

<sup>\*51</sup>原文の”implicit”を「仄かしの」と訳している.

<sup>\*52</sup>[原文脚注]: ここで導かれた結果は, Eliassen (1952) によって導かれたものの精神の多くである; 我々は単に渦による熱輸送によりもたらされる子午面循環を強調しているだけである. 一方で, Eliassen は, 子午面循環が軸対称な非断熱な加熱と冷却によるものと解析していた. [ここで「Eliassen (1952) によって導かれたものの精神の多くである」と云う言い回しは「Eliassen (1952) の結果と今回の結果の多くは一致している」と云う意味であろう.]

<sup>\*53</sup>[memo]: 全層で平均すると, 運動量の南北方向の輸送はないと云うこと.

在しなければならないことが明らかになる。とりあえず中緯度の緯度帯のモーメントを考えよう。この帯は地表面で角運動量を消失しているが、水平の渦輸送の収束を通して近似的に等しい量を得ている。しかし、後者の効果は地表面近くで小さく、対流圏界面の高度でその最大値に達する (Starr 1951a)。したがって我々はその帯の上方の層における角運動量の過剰と、下方の層における角運動量の不足に直面する。地表面における東風を伴う緯度におけるその状況は逆である；そこでは、地表面付近で運動量の過剰があり、より高高度で運動量の不足がある。

二つの緯度円と二つの値の高度により制限された輪の形をした領域における角運動量方程式を書くことで簡単にわかるように、角運動量が(地表から大気の上端まで)完全に緯度帯の内部で再分配される(緯度帯におけるそれぞれの層での角運動量収支もまた釣り合っている)ことにより有効となる3つの主要な機構が存在する。

1. 例えば、積雲の活動などの、小規模な擾乱による鉛直輸送。この過程は確かに下方への輸送を生む。これは地表の西風が吹く領域において必要なことである。しかし、この過程が地表の東風が吹く領域で上方の輸送を生んでいることを想像するのは難しい。
2. 総観規模で観測される東西と鉛直の速度成分の相関による大規模な擾乱の鉛直輸送。この過程による運動量輸送は運動量が減少する方向である必要はない。また、おそらく低緯度や高緯度では上方を向き、中緯度では下方を向いているだろう。中緯度におけるいくつかのこの観測は White and Cooley (1952) によって為されてきた。彼らの結果は、中緯度の下方の輸送の内いくらかはこの過程によるものであると示している。
3. 運動量の不足がある層(例えば、中緯度のより下の層)における正味の極方向の運動と運動量の過剰がある層における正味の赤道方向の運動を含む子午面循環。Palmen and Alaka (1952) はこの機構を低緯度における運動量収支の詳細の議論をうまく使ってきた。

( $U_1$  と  $U_2$  は初めは緯度と独立であると仮定されたと云う事実による) 我々の考える解において  $u$  と  $v$  の相関の欠如は、我々に、与えられた緯度帯への運動量の全輸送について理論的に如何なることを述べることも許さない。さらに、2レベルモデルの未熟な性質は我々にかなり詳細な鉛直方向の運動量の再分配の研究のためにそれを使うことを許さないだろう。しかしながら、我々の結果を 500 mb の高度以下の大気の層、つまり大気の下半分に応用することは可能である。弱い灰かしの子午面循環 (25), (26) (我々の理論では、これは傾圧不安定波の存在の一つの結果であると考えられている) は、正しいオーダーの相対的運動量の局所的な湧き出しや吸

い込みを与える。その正確さの程度は観測された水平渦輸送と地球にとの運動量の交換の結果として、異なる緯度における局所的な運動量の過多と不足がバランスすることを補償する様な大きさである。

Widger (1949) は 1946 年の 1 月の地表面, 700 mb, 500 mb の高度における単位高度あたりの角運動量の地衡流渦フラックスを計算した。彼の観測は、同じ月の、地表摩擦と山の効果による観測される運動量の変化も含んでいる (White 1949)。 $uv$  の相関による 1946 年 1 月の地表面から 500 mb の高度の水平運動量輸送  $H$  を北向きのときは正であるとしよう。  $\Delta$  を、1946 年 1 月の二つの緯度円と地表面と 500 mb の高度面で仕切られた体積の角運動量の変化としよう。最後に、 $E$  をその月の緯度帯の地球表面から得られる全運動量とし、大気に関する増加を示すとき、正としよう。そして、地球の各緯度帯に関して、地表から 500 mb 高度までの方程式における角運動量の要請をまとめよう:

$$\Delta = H_S - H_N + E + Q \quad (29)$$

ここで、 $S$  と  $N$  の添え字は南部と北部の緯度帯における値を表す。  $Q$  と云う量は、上記の三つの機構とは異なる付加的な運動量の「源」を示す。

$H_S - H_N$ ,  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Q$  [(29) から計算される] は Widger のデータと考えられており、表 1<sup>\*54</sup> に示されている<sup>\*55</sup>。  $Q$  の値はこれらをそれぞれの帯の近似の質量とその地軸からの平均距離で割ることで  $\partial U/\partial t$  の値に変換されている。  $\partial U/\partial t$  の値は表 1 の最後の欄に示されており、もしこれらの空気の帯に関する運動量収支が (29) を満足するならば、上記 3 つの過程から要求される正味の相対的な加速度と考えられるだろう<sup>\*56</sup>。

傾圧波の可能な重要性と、(29) を満たすために要求される運動量の湧き出しと吸い込みが与えられる場合のそれらの関連する子午面循環は図 5<sup>\*57</sup> に見ることができる。(27) から得られる理論的な値  $U_{3t}$  に加えて、この図は表 1 の  $\partial U/\partial t$  の値を示している。 [この比較を可能にするために、北緯 45 度において  $\xi = 0$ 、北緯 15 度において  $\xi = -\pi/2$ 、北緯 75 度において  $\xi = \pi/2$  とおかれており、 $2w$  を選択したことは緯度 60 度と同等である。さらに、(27) における  $A$  はより冬の条件と対応が良くなる様に  $(15.4)^{-1} \text{m}^2 \text{sec}^{-3}$  に等しいとおいている。] (27) により与えられる運動量の変化ははっきりと絶対値の正しいオーダーであり、近似的に緯度変化と合う<sup>\*58</sup>。

\*54 原文では表 1 であるが、ここでは図 5 として示している。

\*55 [原文脚注]:  $H$  と  $\Delta$  の値は、Widger が 7.5 km 高度面の層に使ったようにと云うよりはむしろ、500 mb 高度面に応用する様に僅かに改訂されている

\*56  $H$ ,  $E$ ,  $\Delta$  から  $Q$  を推定し、 $Q$  を  $\frac{\partial U}{\partial t}$  で表すと云うことである。

\*57 原文では図 5 であるが、ここでは図 6 と表している。

\*58 [原文脚注]: 境界条件 (5) は北端の領域において理論的な値  $U_t$  に人工的な制限をおく。この望まれない特徴は、極の端において計算によるいくつかの追加の補完を行って球座標を用いることで

Lat. Belt	$H_S - H_N$	$E$	$\Delta$	$Q$	$\partial U / \partial t$ ( $\text{m sec}^{-1} \text{ day}^{-1}$ )
	(in units of $10^{29} \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ )				
15—20	— 309	4770	2	— 4459	— 2.2
20—25	— 622	2470	51	— 1797	— 1.0
25—35	— 747	1832	272	— 813	— 0.2
35—45	491	— 4495	100	4104	1.6
45—55	1119	— 3187	— 573	1495	0.8
55—65	200	214	— 131	— 546	— 0.5
65—75	156	280	— 209	— 645	— 1.2

図 5: 1946 年一月の 1000 – 509 mb における角運動量収支 [Widger (1949) を参考に].

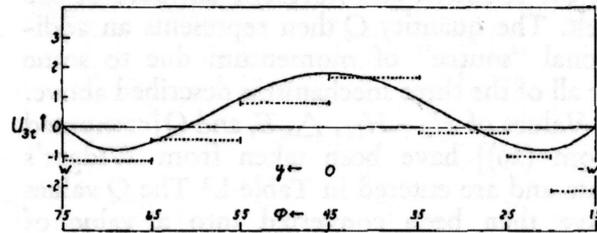


図 6:  $U_{3t}$  の単位は  $\text{m sec}^{-1} \text{ day}^{-1}$  で,  $T_t^*$  が  $1^\circ \text{ C day}^{-1}$  のときの値である. 水平方向の破線は表 1 の Widger のデータから算出した  $\partial U / \partial t$  の値である.

図 4 に示された子午面循環 (25), (26) は, 観測された地表面の風の分布にはたらく地表面の摩擦の効果に基づく通常の質的な考察と同じ一般的な型である (例えば, 中緯度の西風の領域において摩擦力はより下方の層で極方向の流れを生み, 質量の連続性の理由から, より上方の層では赤道に還る流れを生む.). しかしながら, 我々の議論は観測された地表面の風の分布から生じていないが, 代わりに以下のことを示そうとしてきた: 準地衡流の傾圧波は, 運動量の水平渦フラックスと結合して, 観測された地表面の東西風の分布の主な特徴を規定する弱い子午面循環を伴う. したがって, 例えば, 基本流の初期状態を地表面においてどこでも  $U$  がゼロであ

取り除かれ得る. 赤道における適切な手続きは, 準地衡流理論がコリオリパラメータの値が小さいときにそう簡単に正当化されないため, より明らかでない.

るとすれば(これは不安定波の二次のオーダーの効果には影響しない), 波によりつくられた子午面循環は高緯度や低緯度の地表面で西風, 高い高度や中間の緯度で東風である系をつくる.

我々のモデルにおいて運動量の鉛直輸送を与えたときに  $\rho uw$ (もしくは  $\omega u$ ) の大規模な相関が果たす役割は計算できるが, 子午面循環 (25), (26) の効果と比較して無視できる. 他方で, White and Cooley (1952) による観測は, この型の下方向への運動量の輸送は中緯度に存在し, それは絶対値の適切なオーダーであることを示している. 摂動理論による解析におけるこの相関の値は  $U_1$  と  $U_3$  は緯度と独立であると云う仮定に非常に影響を受けるだろう<sup>\*59</sup>. もしくは, 有限の側方幅における傾圧波のこの効果の Kuo の解析でおそらく示されたように, 2 レベルモデルはこの効果を明示的に含むには荒すぎるが, 暗示的には子午面循環の型を含んでいる. どんな場合でも, 我々が使う単純な 2 レベルモデルは, 東西運動量の鉛直方向の再分配の機構を確かに含んでおり, したがって 1 節の終わりで書かれた数値実験の成功にいくらかの希望を込めて使われている.

## 9. 不安定波におけるエネルギー変換

3 節では, 準地衡流方程式 (1), (2) と境界条件 (4), (5) が力学的エネルギー方程式と無矛盾であることを見た. おそらく, この事実を不安定な傾圧の摂動を研究するために使う系に応用することはいくらか興味深い.

(10) に  $\omega_2$  について (3) の表現を導入することで, エネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \left[ q_1 + q_3 + \frac{\lambda^2}{2f_0^2} (\varphi_1 - \varphi_3)^2 \right] dx dy = 0 \quad (30)$$

と書き直せるだろう. ここで, 積分は  $-w \leq y \leq w$ ,  $0 \leq x \leq L$  に渡って行った. また,  $\mathbf{v}$  が地衡流であるとき, この領域で  $\mathbf{v} \cdot \nabla h$  ( $h$  は任意) を積分するとゼロになると云う事実を使った.  $1/2 f_0^{-2} \lambda^2 (\varphi_1 - \varphi_3)^2$  の項<sup>\*60</sup> は明らかに系のポテンシャルエネルギーのいくつかの型を示している. 運動エネルギー  $q_1 + q_3$  とポテンシャルエネルギー  $1/2 f_0^{-2} \lambda^2 (\varphi_1 - \varphi_3)^2$  は基本流のエネルギーを示す部分と摂動のエネルギーを示す部分にそれぞれ分割されるだろう. したがって, (30) は

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[ U_1^2 + U_3^2 + \frac{\lambda^2 (\Phi_1 - \Phi_3)^2}{f_0^2} \right] + \left[ \overline{u_1'^2 + v_1'^2 + u_3'^2 + v_3'^2} + \frac{\lambda^2 (\varphi_1' - \varphi_3')^2}{f_0^2} \right] \right\} d\xi = 0 \quad (31)$$

<sup>\*59</sup>  $U_1$  と  $U_3$  は緯度と独立であると云う仮定によって傾圧不安定を取り除き, 傾圧不安定のみを考慮することができる. もし,  $U$  が南北に依存して変化すると, 傾圧不安定まで考えなくてはならない.

<sup>\*60</sup> いわゆる有効位置エネルギーと云うもの

となる.

基本流のエネルギーの変化率は (27) と (23) より計算される:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (U_1^2 + U_3^2) d\xi = -X \frac{2(2+\alpha) \tanh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}}{\pi \sqrt{2\gamma} (2+\gamma)}, \quad (32)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda^2}{f_0^2} (\Phi_1 - \Phi_3)^2 d\xi = -X(2+\alpha) \left[ \frac{1}{2} - \frac{2 \tanh \sqrt{2\gamma} \frac{\pi}{2}}{\pi \sqrt{2\gamma} (2+\gamma)} \right]. \quad (33)$$

である. ここで,

$$X = \frac{AV\mu}{f_0(2+\alpha)}$$

である. 摂動の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの時間変化率は直ちに (17) より計算される:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2 + \bar{u}_3^2 + \bar{v}_3^2) d\xi = X\alpha, \quad (34)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda^2}{f_0^2} (\varphi'_1 - \varphi'_3)^2 d\xi = X \left( \frac{2-\alpha}{2} \right). \quad (35)$$

(32) から (35) を全て足すことで, エネルギー方程式を本当に満たすことを簡単に見ることができる.

(32) より,  $X(2+\alpha)$  の因子は 0.026 の値を持つ. 基本流からの運動エネルギーの散逸を表すこの項は, 確かに (33) の最後の項とバランスしているので, 摂動のエネルギーの全増加量の 95% は基本流のポテンシャルエネルギーから生じており, 残りの 5% は東西方向の運動の運動エネルギーから生じている. これらの値は  $\gamma = \lambda^2 \mu^{-2}$  が 5.3 の値を持っているときに得られる. より小さな  $\gamma$ , たとえばより小さな  $w$  あるいは  $f_0$  の値において, 基本流の運動エネルギーから生じる摂動のエネルギーの割合は増加する.

(34) の値の 1/2 で近似して与えられる, 単位面積当たりの運動エネルギーの生成率は,  $A$  が  $(30.8)^{-1} \text{m}^2 \text{sec}^{-3}$  のとき, 約  $0.375 \times 10^{-3} \text{m}^2 \text{sec}^{-3}$  の値を持つ. これに 10 トン (およそ 1 平方メートルあたりの大気質量) をかけると, 摂動の運動エネルギーの生成率として  $3.75 [\text{J sec}^{-1} \text{m}^{-2}]$  の値を得る. これは, Brunt によって見積もられた (1939) 大気における運動エネルギーの平均の散逸率, およそ  $5 [\text{J sec}^{-1} \text{m}^{-2}]$  と比較され得る.

## 10. エントロピーの鉛直輸送

放射による加熱と冷却の計算は、緯度について平均する条件を考えるならば、対流圏の上半分は熱を失うが、一方で下半分は熱を得ることを示す。Eady (1949) は、傾圧不安定波における鉛直速度と渦位の正の相関は、放射とバランスするように働く正味の上向きのエントロピーの輸送を与えることを指摘した。

我々の方程式は二つの層でしか  $\Phi_t$  を記述していない。それ故、温度は一つの層でしか定義していない。したがって、大気の上半分と下半分の平均のエントロピーの時間変化率の直接の計算には使うことができない。しかしながら、 $\Theta_1^*$  と  $\Theta_3^*$  が大気の上半分と下半分の温位の平均値によって定義されれば、断熱運動における次の公式が得られる：

$$\frac{\partial \Theta_1^*}{\partial t} = -\frac{2}{\pi p_s} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega_2 \Theta_2 d\xi.$$

$\Theta_2$  は、状態方程式と静水圧の方程式の助けを借りて  $(\varphi_1 - \varphi_3)$  の項を表現している。我々が考えている型の擾乱において、 $T_t^*$  を  $0.5^\circ\text{C day}^{-1}$  とすることで、 $\partial \Theta^*/\partial t$  は約  $0.25^\circ\text{C day}^{-1}$  であるとわかる。大気における高さに伴う温度の分布の存在を考える、どんな完全な理論もこの大規模な温帯の擾乱の効果を含まなければならない。

この擾乱の効果はそれらの振幅の平方に比例するので、エントロピーの上方への輸送は、夏季より冬季でより大きくななければならない。これにより夏よりも冬で、断熱減率はより安定となるであろう。この証拠は冬季と夏季における Hess の子午面断面で容易く確認できる (Hess 1948)。

## 付録 B (27) の導出

(27) の見積もり, あるいは導出をする. まず, 一式目について考える.  $\Phi_1 - \Phi_3$  の値を見積もるために, level1, 3 の高度差  $Z_1 - Z_3$  を見積もる. 米国標準大気の数値 (Holton 2012, Appendix E) を線形内挿して見積もると,  $Z_1 - Z_3 = 7.89 \times 10^3$  [m] であり, これは Phillips (1954) の見積もりとおおよそ合っている. あるいは別の方法で一式目を見積もろう.  $\frac{d\Phi}{dp}$  を level2 に適用すると,

$$\left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{p_1 - p_3}$$

である. 一方で静水圧の式より,  $\left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_2 = -\frac{T_2 R}{p_2}$  であるので,

$$\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{p_1 - p_3} = -\frac{T_2 R}{p_2}$$

両辺の分母は 500hPa であるので, 気温減率を  $\Gamma = 6.5$  [K/km], 地表と level2 の間の高度を  $z = 5.5$  [km] とすると,

$$\Phi_1 - \Phi_3 = R(T_4 - \Gamma z) = \frac{2000}{7}(288 - (6.5 \times 5.5)) \sim 7.21 \times 10^4$$

と見積もれる (ただし, 地表面の温度  $T_4$  を 288 [K] とした). これは Phillips (1954) の見積もりとおおよそ合っている. また,  $\Phi_1 - \Phi_3 = RT_2 = H_2 g$  より, 与えられた重力加速度とスケールハイトの値を用いて逆に  $T_2$  を見積もると,

$$T_2 = \frac{gH_2}{R} = \frac{9.81 \times 8.16 \times 10^3}{\frac{2000}{7}} \sim 2.8 \times 10^2$$
 [K]

となる. したがって, この見積もりでは 280 [K] の等温大気を仮定している.

次に, 二式目について考える.  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  の値を見積もるために,  $T_1, T_2, T_3$  の値を見積もる. 米国標準大気の数値 (Holton 2004, Appendix E 参照) を線形内挿して見積もると, それぞれ  $T_1 \sim 221$  [K],  $T_2 \sim 251$  [K],  $T_3 \sim 272$  [K] である (この  $T_2$  の見積もりから, 先ほどの等温大気の仮定は少々高いことがわかる.).  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  の値を見積もると,  $\Theta_1 \sim 1225$  [K],  $\Theta_2 \sim 1140$  [K],  $\Theta_3 \sim 1096$  [K] である. したがって,  $\frac{\Theta_2}{\Theta_1 - \Theta_3} \sim 8.8$  であるので, おおよそ原文の数値と合っている.

続いて, 三式目について考える.  $2w$  は緯度 60 度の距離と対応していることより,

$$2w = R_e \frac{\pi}{3}$$

これと (21) の三式目より (20) の三式目が導ける. あるいは,  $y = \pm w$  における境界条件を考えて,

$$\cos \mu y = \cos \left\{ \pm \mu \frac{\pi}{6} R_e \right\} = 0$$

これを満たすためには,  $\pm \mu \frac{\pi}{6} R_e = \frac{\pi}{2}$  となれば良いので, (20) の三式目が導かれる.

最後に四式目について考える.

$$\left( \frac{dU}{dz} \right)_2 = \left( \frac{dU}{dp} \frac{dp}{dz} \right)_2 = \left( \frac{dU}{dp} (-\rho g) \right)_2 = \left( -\frac{pg}{RT} \frac{dU}{dp} \right)_2 \quad (*)$$

ここで, level2 に関するスケールハイト  $H_2 = \frac{RT_2}{g}$  を導入すると,

$$(*) = -\frac{p_2}{H_2} \frac{U_1 - U_3}{p_1 - p_3} = \frac{2V}{H_2} = \frac{2gV}{\Phi_1 - \Phi_3}$$

となり, (20) の四式目が導ける.

## 謝辞

本論文を書くにあたって、林教授には研究内容についての方針を示して頂き、指導教官である岩山准教授には細やかなご指導をして頂いた。また、高橋准教授には研究を進めていく上で貴重なご助言を頂いた。様々な面でご協力を頂いた地球および惑星大気科学研究室の皆様には、深く感謝の意を表する。

## 参考文献

- Brunt, D., 1939: Physical and dynamical meteorology, 2nd edn, *Cambridge University Press*.
- Hess, S. L., 1948: Some new meridional cross sections through the atmosphere, *J. Meteor.*, **5**, 293-300.
- Pedlosky, J., 1987: Geophysical Fluid Dynamics, 2nd edn, *Springer-Verlag New York*, 426-430 pp.
- Phillips, N. A., 1954: Energy Transformations and Meridional Circulations associated with simple Baroclinic Waves in a two-level, Quasi-geostrophic Model, *Tellus*, **6**, 273-286.
- Widger, W. K., 1949: A study of the flow of angular momentum in the atmosphere, *J. Meteor.*, **6**, 291-299.
- 伊藤朋之, 住明正, 新田尚, 野瀬純一, 2005: 気象ハンドブック, 第3版, 朝倉書店, 92 pp.
- 小倉義光, 1999: 一般気象学, 第2版, 東京大学出版会, 187 pp.