熱帯大気の線形応答

神戸大学 理学部 地球惑星科学科 地球および惑星大気科学研究室 島津 通（指導教員 林 祥介）

＜目的＞

•地球規模の大気海洋の現象を調べる上で, 熱帯大気が重要な役割を果たすことが知られている. 熱帯大気の大規模運動は, 赤道波と呼ばれる大気波動によって記述することができる. よって本研究では, 赤道波に関して以下の研究を行う.

1. 赤道波の分散関係および空間構造（固有値・固有モード）を理論的に導出し, 図示する.
2. 熱源に対する大気の応答を数値計算によって調べる.

1. 赤道波とは

赤道波とは以下の特徴を持つ赤道域に特有な波動のことである.

•赤道付近で振幅が最大.
•赤道から離れるにつれて振幅が減少する.

2. 基礎方程式

基礎方程式系は線形化・無次元化された赤道ベータ面浅水方程式系を用いる.

線形化・無次元化された赤道ベータ面浅水方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -Q$$

x : 東西方向（東が正）
y : 南北方向（北が正）
(u, v) : (x, y) 方向の風速
t : 時間
ϕ : ジオポテンシャルの微小なズレ
Q : 熱源

無次元化に用いたスケール

重力波の速度 $c = \sqrt{gH}$
赤道変形半径 $\lambda = \sqrt{c/\beta}$

3. 固有値の導出

$$u(x,y,t) = \hat{u}(y)e^{-i\omega t + ikx}$$
$$v(x,y,t) = \hat{v}(y)e^{-i\omega t + ikx}$$
$$\phi(x,y,t) = \hat{\phi}(y)e^{-i\omega t + ikx}$$
$$Q = 0$$

とし,方程式系に代入, $\hat{v}$ について整理する.

k : 東西波数
ω : 振動数

求められた微分方程式はウェーバーの微分方程式と呼ばれ, 以下のような境界条件を与えると, 解は次のようになることが知られている.この導出の際に得られる条件式が分散関係式となり, この式を解くことにより固有値を求める.

ウェーバーの微分方程式

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \left(\omega^2 - k^2 - \frac{k}{\omega} - y^2\right)\hat{v} = 0$$

境界条件 $v \to 0 \ (y \to \pm\infty)$

解

$$\hat{v}(y) = Ce^{-\frac{1}{2}y^2}H_n(y)$$

$H_n(y)$: エルミート多項式

分散関係式 $\omega^2 - k^2 - \dfrac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

固有値

$(n \geq 1)$

$\omega_{1,2} \sim \pm\sqrt{k^2 + 2n + 1}$ 東西慣性重力波 (＋ : 東向き − : 西向き)

$\omega_3 \sim -\dfrac{k}{k^2 + 2n + 1}$ ロスビー波

$(n = 0)$

$\omega_1 = \dfrac{k}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{k}{2}\right) + 1}$

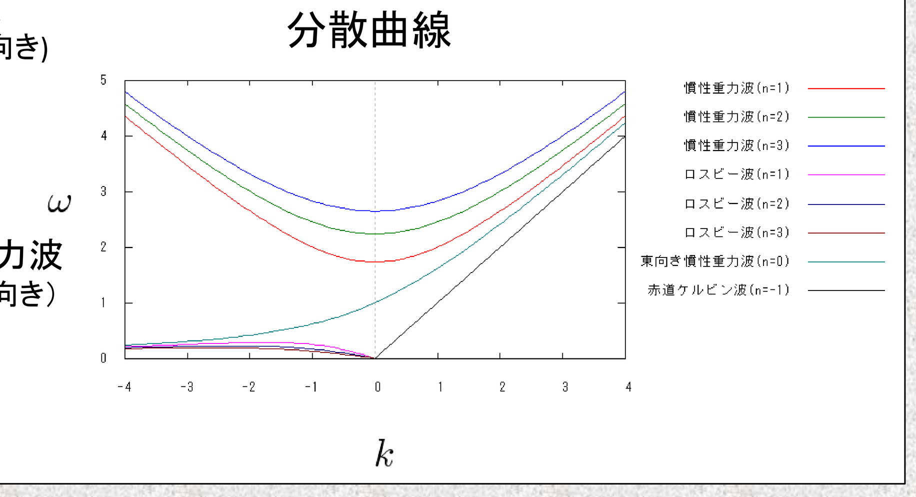
$\omega_2 = \dfrac{k}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{k}{2}\right) + 1}$

混合ロスビー重力波 (ω_1 : 東向き ω_2 : 西向き)

$(n = -1)$

$\omega = k$ 赤道ケルビン波

分散曲線



4. 固有モードの導出

$(\hat{u}, \hat{v})$, $(\hat{\phi}, \hat{v})$ の関係式とエルミート多項式の昇降関係式を用い,各固有値に対する固有モードを得る.

$(\hat{u}, \hat{v})$,$(\hat{\phi}, \hat{v})$ の関係式

$$\hat{u} = \frac{i}{\omega^2 - k^2}\left(\omega y \hat{v} - k\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right)$$
$$\hat{\phi} = \frac{i}{\omega^2 - k^2}\left(ky \hat{v} - \omega\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right)$$

エルミート多項式の昇降関係式

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y)$$
$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y)$$

固有モード

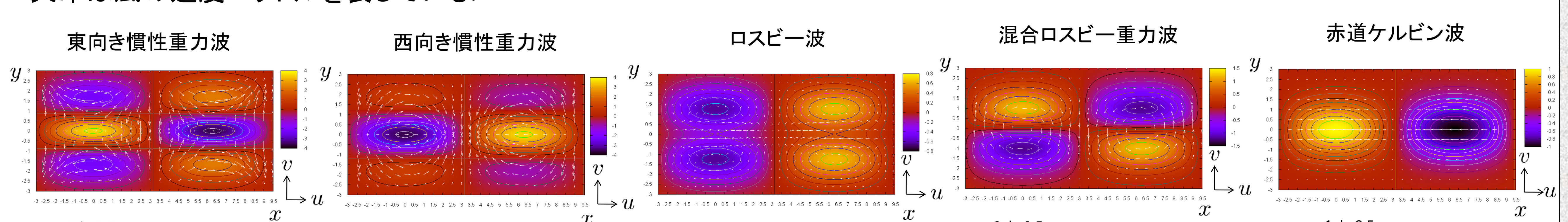
$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_{nl} = \begin{pmatrix} i(\omega_{nl}^2 - k^2)\psi_n \\ -\frac{1}{2}(\omega_{nl} + k)\psi_{n+1} + n(-\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \\ -\frac{1}{2}(\omega_{nl} + k)\psi_{n+1} - n(-\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \end{pmatrix}_{nl}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_{0l} = \begin{pmatrix} -2i(\omega_{0l} - k)\psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}_{0l}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{u} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}_{-1}$$

ただし $\psi_n = e^{-\frac{1}{2}y^2}H_n(y)$

得られる固有モードの特徴は次のとおりである. トーンはジオポテンシャルのズレを矢印は風の速度ベクトルを表している.



n=1, k=0.5 コンター間隔は0.5
n=1, k=0.5 コンター間隔は0.5
n=1, k=0.5 コンター間隔は0.1
n=0, k=0.5 コンター間隔は0.2
n=-1, k=0.5 コンター間隔は0.1

東西慣性重力波では, 図より風の収束・発散によって, 波が伝播しているのがわかる.

流速と等値面が平行になっていることから,地衡風平衡が成立している.

南北方向では慣性重力波の性質を表しており, 東西方向では, 地衡風平衡が成立しており, ロスビー波的である。

東西方向は慣性重力波のようにふるまい, 南北方向は地衡風平衡が成り立ち, ロスビー波のようにふるまう.

5. 時間発展数値計算

赤道大気の熱源に対する応答を数値計算を行い調べてみる.

基礎方程式系は線形化・無次元化された赤道ベータ面浅水方程式を用い, 境界条件はx方向は周期境界,y方向は壁面境界としている.

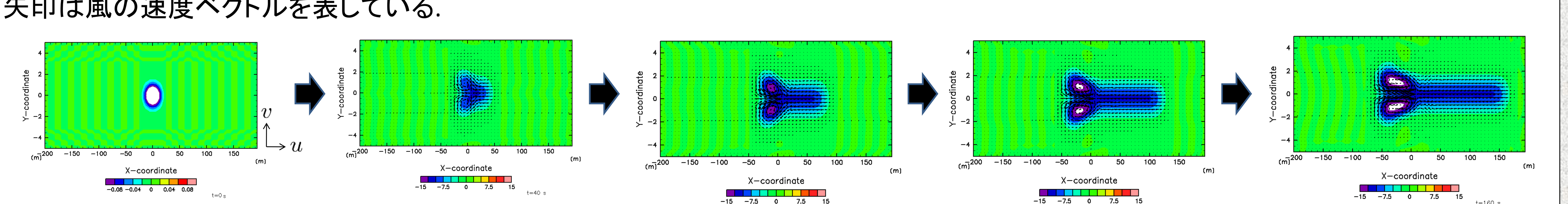
数値計算には SPMODEL (竹広 et al. ,2006) を利用する.

$t = 0$ から熱源を与える.熱源 Qは次式のように赤道対称に与える.

$$Q(x, y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}\cos(ax) \quad (|\,x\,| < A)$$

ここで, $a = \dfrac{\pi}{2A}$ であり, A は加熱領域の東西の幅である.ここでは, $A = 20$ としている.
また, 計算領域はx:-200~200, y:-5~5 である.

計算結果は以下のとおりである. ここでトーンはジオポテンシャルのズレを, 矢印は風の速度ベクトルを表している.



東向きの波動は一定の速さで進み, 波動の先端部分の通過後は定常な流れが残る.流速は東西成分のみもっている.また, 流速, ジオポテンシャルは赤道で最大の振幅を持っている.これらは赤道ケルビン波の特徴である.

西向きの波動も一定の速さで進み, 波動の先端部分の通過後は定常な流れが残る.流速とジオポテンシャルはほぼ地衡風平衡が成立している.またジオポテンシャルの振幅は赤道に対して南北対称になっている. これらはロスビー波の特徴である.

6. まとめ

●熱帯大気に特有な波動である, 赤道波の分散関係・空間構造（固有値・固有モード）を調べた.
• 赤道波の固有値・固有モードは,線形化・無次元化された赤道ベータ面浅水方程式に対し, 時間と東西方向に波動型の解を仮定することで得られ, 各々東西慣性重力波, ロスビー波, 混合ロスビー重力波,赤道ケルビン波となる.

●熱帯大気の熱源に対する応答を数値計算によって調べた.
• 赤道対称に熱源を与えると, 同じく赤道対称な,東進する赤道ケルビン波と n=1 の西進するロスビー波のような構造をもつ波動が表れる.

参考文献

•Matsuno.T. ,1966:"Quasi-Geostrophic Motions in the Equatorial Area", *J.Met.Soc.Japan*,**44**,25-43.
•小倉義光,1978:｢気象力学通論｣,東大出版会,249pp.
•小倉義光,1999:｢一般気象学 第2版｣,東大出版会,308pp.
•堀淳一,1969:｢物理数学2｣,共立出版社,257pp.
•山田由貴子,2002:｢赤道波の線形理論｣, 北海道大学 卒業論文
•林麻利子,2006:｢赤道付近における熱源応答と赤道波｣, 神戸大学 卒業論文
•竹広真一, 石岡圭一, 西澤誠也, 谷口博, 森川靖大, 小高正嗣, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2007: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/, 地球流体電脳倶楽部.

謝辞

本文中の図の作成には, gnuplot および, 電脳Ruby プロジェクトの成果物を利用させていただいた. ここに開発者の方々に感謝する.