

定在ロスビー波の球面伝播

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室
今村 翔太

2009年2月28日

要旨

本論文は、回転球面上の 2 次元順圧渦度方程式に対して、WKBJ 近似を用いて定在ロスビー波の性質を調べ、伝播の経路を調べた。

回転球面上のロスビー波の位相速度は西向きであるので、平均風が東向きでかつ、ロスビー波の位相速度と同じ大きさの場合に定在ロスビー波となる。定在ロスビー波の波線と波数ベクトルは同じ方向となるため、定在ロスビー波の伝播経路を求めるには波線の経路を求めればよく、波線の経路は波数の変化から求められる。

波数の変化の仕方を変えたときに波線の経路がどう変化するかを考察し、定在ロスビー波の伝播経路について、2 パターンの東西平均風について調べた。

その結果、伝播経路は、平均風が剛体回転流である場合は赤道を軸とする導波管を形成し、現実大気に近い平均流を考えた場合は臨界緯度が存在し、その付近では波線理論が適用できないことが導かれた。

目次

1	序論	2
2	支配方程式	3
2.1	系の設定	3
2.2	線形化	3
2.3	渦度方程式の導出	4
3	回転球面上におけるロスビー波束の性質	6
3.1	WKBJ 近似	6
3.2	分散関係式	6
3.3	位相速度, 群速度	7
3.4	波線	8
3.5	波の活動度	10
4	定在ロスビー波の性質	12
4.1	定在ロスビー波	12
4.2	波線の屈折	13
4.3	臨界緯度	15
5	定在ロスビー波の球面伝播	18
5.1	平均風が剛体回転流である場合の伝播	18
5.2	現実大気に近い平均流を考えた場合の伝播	21
6	まとめ	24
	謝辞	25
	参考文献	26

1 序論

ロスビー波は、ポテンシャル渦度保存則に起因する波であり、自転する惑星の大気中では西向きの位相速度を持ち、高気圧や低気圧など、中緯度の総観規模の気象現象に重要な役割を果たす。

特に中緯度では、東進する偏西風が卓越しているため、大気中を西に向かうロスビー波の位相速度と東向きに進む偏西風の速度が等しくなり、地上からみると波が停滞して見えることがある。これを「定在ロスビー波」と呼ぶ。

本論文では、この定在ロスビー波の定式化を行い、球面上において定在ロスビー波がどのように伝播するのかを波線理論を用いて考察した。

本論文の構成は以下のとおりである。2節においては、支配方程式である渦度方程式の導出を行う。3節では、分散関係式や位相速度、活動度など、ロスビー波についての定式化を行う。4節では、定在ロスビー波がどのように球面状を伝播するのかを考察し、5節にて2パターンの東西平均風を仮定して伝播の様子を図示する。6節はまとめである。

2 支配方程式

この節では、回転球面上の2次元順圧流体において、運動方程式と連続の式から渦度方程式を導出する。

2.1 系の設定

2次元回転球面上において、非圧縮、上下に剛体境界、外力なし、という系を考える。この系における運動方程式および連続の式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{uv \tan \phi}{r} - 2\Omega v \sin \phi = -\frac{1}{\rho r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f_\lambda, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u^2 \tan \phi}{r} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + f_\phi, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (v \cos \phi) = 0. \quad (3)$$

ただし、式中の各記号は、

λ : 経度

ϕ : 緯度

r : 系の半径

Ω : 系の自転角速度

ρ : 流体の密度

u : 経度方向の速度

v : 緯度方向の速度

p : 圧力

f_λ, f_ϕ : 粘性項

である。

2.2 線形化

この系には、東西方向 (λ 方向) にのみ平均風 $u(\phi)$ が存在しているとする。現実大気では $u(\phi)$ の値は緯度に大きく依存するため、 ϕ のみに依存することとする。

流体の速度を東西平均成分「 \bar{u} 」と擾乱「 u' 」に分離する。すると、 $\bar{v} = 0$ とおけるので、 u, v はそれぞれ、

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u', \\ v &= v' \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 u', v' は \bar{u} に対して微小であるとする。これらを用いて、(1)~(3)の各式を \bar{u} のまわりにおいて線形化すると、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{r \cos \phi} \frac{\partial u'}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{u}v' \tan \phi}{r} - 2\Omega v' \sin \phi = -\frac{1}{\rho r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + f_\lambda, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{r \cos \phi} \frac{\partial v'}{\partial \lambda} + \frac{\bar{u}^2 + 2\bar{u}u'}{r} \tan \phi + 2\Omega(\bar{u} + u') \sin \phi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + f_\phi, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial u'}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(v' \cos \phi) = 0 \quad (6)$$

となる。これ以後、簡略化のため u', v' の「 $'$ 」は省略する。

2.3 渦度方程式の導出

回転球面上における 2 次元順圧渦度方程式を導出する。

渦度 ζ は、

$$\zeta = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi}(u \cos \phi) \quad (7)$$

であるので、

$$\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial (5) \text{ 式}}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} ((4) \text{ 式} \cdot \cos \phi) \quad (8)$$

を計算して、そこに (6) 式を代入すると、回転球面上における 2 次元順圧流体の線形渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{r \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + \hat{\beta} v = f_\zeta \quad (9)$$

が導かれる。ただし、ここで $\hat{\beta}$ は絶対渦度の緯度方向の勾配、 f_ζ は粘性散逸項であり、

$$\hat{\beta} = \frac{2\Omega \cos \phi}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\bar{u} \cos \phi) \right), \quad (10)$$

$$f_\zeta = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial f_\phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (f_\lambda \cos \phi) \quad (11)$$

である。以下では、非散逸系 $f_\zeta = 0$ を考えることにする。

いま、流線関数 ψ を

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad v = \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (12)$$

として定義すると、連続の式 (3) を自動的に満たす。この ψ を用いると渦度 ζ は、

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u \cos \phi) + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \\ &= \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} = \nabla^2 \psi \end{aligned} \quad (13)$$

と書き換えられる。なお、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (14)$$

は球面上の水平ラプラシアンである。これらを渦度方程式 (9) に代入すると、流線関数で表記された 2 次元順圧流体における線形渦度方程式

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\beta}}{r \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0 \quad (15)$$

が得られる。

3 回転球面上におけるロスビー波束の性質

この節では、前節で求めた渦度方程式に対して WKBJ 近似を用いることで、ロスビー波の分散関係式や速度を求め、さらに波線理論からロスビー波束による波の活動度について考える。

3.1 WKBJ 近似

惑星大気中を伝わる波動を考える上で、空間時間スケールの変化を考えると、 (u, v) もしくは ψ, ζ といった場の変量 X の空間時間変化は、一般的に位相 θ の空間時間変化と比べて変化の速度が十分に遅い。つまり、

$$\left| \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right| \ll \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}, \quad \left| \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial \phi} \right| \ll \frac{\partial \theta}{\partial \phi}, \quad \left| \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial t} \right| \ll \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (16)$$

となる。そこで、適当な微小パラメーター ε を用いて新しい空間時間座標 (Λ, Φ, T) を、

$$\varepsilon(\lambda, \phi, t) = (\Lambda, \Phi, T) \quad (17)$$

と定義して近似を行う。これを WKBJ 近似と呼ぶ。

(17) 式を用いて ψ を展開すると、

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(\Lambda, \Phi, T) e^{i \frac{\Theta(\Lambda, \Phi, T)}{\varepsilon}} \quad (18)$$

$(0 < \varepsilon \ll 1)$

と表すことができる。ここで、

$$\varepsilon \theta(\lambda, \phi, t) = \Theta(\Lambda, \Phi, T) \quad (19)$$

であり、 $\varepsilon^n \psi_n$ は振幅である。

3.2 分散関係式

渦度方程式 (15) より分散関係式を導出する。

(15) 式に (18) 式を用い, $O(\varepsilon^0)$ の項のみを取り出すと,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r^2 \cos^2 \Phi} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda} \right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial T} \psi_0 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Phi} \right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial T} \psi_0 \\ & - \frac{\bar{u}}{r^3 \cos^3 \Phi} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda} \right)^3 \psi_0 - \frac{1}{r^3 \cos \Phi} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \Phi} \right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda} \psi_0 + \hat{\beta} \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda} \psi_0 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる. ここで, λ 方向の波数を k , ϕ 方向の波数を l , 振動数を ω とすると,

$$k = \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial \Theta}{\partial \Lambda}, \quad (21)$$

$$l = \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \Phi}, \quad (22)$$

$$\omega = - \frac{\partial \Theta}{\partial T} \quad (23)$$

となる. これらを (20) 式に代入すると,

$$(\omega - \bar{u}k)(k^2 + l^2) + \hat{\beta}k = 0 \quad (24)$$

という式が得られ, これを ω について解くと,

$$\omega = \bar{u}k - \frac{\hat{\beta}k}{k^2 + l^2} \quad (25)$$

となる. これがロスビー波束の分散関係式である.

3.3 位相速度, 群速度

分散関係式 (25) より位相速度と群速度を求め, ロスビー波が進む方向を示す.

東西方向の位相速度を C_λ , 南北方向の位相速度を C_ϕ とすると,

$$C_\lambda = \frac{\omega}{k} = \bar{u} - \frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2}, \quad (26)$$

$$C_\phi = \frac{\omega}{l} = \left(\bar{u} - \frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2} \right) \frac{k}{l} \quad (27)$$

となる. (26) 式より, 波長が十分に短い場合, つまり波数 k, l が十分に大きい場合は $C_\lambda \simeq \bar{u}$ となるため, 位相は平均風 \bar{u} の向きに進む. 一方, 波長が十分に長い場合, つまり波数 k, l が十分に小さい場合は $C_\lambda < 0$ となるため, 位相は西向きに進む.

群速度 C_g は、分散関係式 (25) を波数で微分することによって得られる。東西方向の群速度を $C_{g\lambda}$ 、南北方向の群速度を $C_{g\phi}$ とすると、

$$C_{g\lambda} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \bar{u} + \hat{\beta} \frac{k^2 - l^2}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (28)$$

$$C_{g\phi} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = \hat{\beta} \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2} \quad (29)$$

となる。

群速度ベクトル C_g をさらに具体的に表現すると、

$$\begin{aligned} C_g &= (C_{g\lambda}, C_{g\phi}) \\ &= \left(\bar{u} + \hat{\beta} \frac{k^2 - l^2}{(k^2 + l^2)^2}, \hat{\beta} \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2} \right) \\ &= (C_\lambda, 0) + \frac{2\hat{\beta}}{K^2} \cos \alpha \frac{\mathbf{K}}{K} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。ここで、 \mathbf{K} は波数ベクトルを、 K は全波数を、 α は緯度円と波数ベクトルがなす角であり、それぞれ、

$$\mathbf{K} = (k, l), \quad (31)$$

$$K = (k^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

$$\cos \alpha = \frac{k}{K} \quad (33)$$

である。この式については、次節でさらに吟味する。

3.4 波線

波線とは、群速度ベクトル $C_g = (C_{g\lambda}, C_{g\phi})$ を接線とする曲線のことであり、波の伝播経路を波線から求める理論のことを波線理論という。ここでは、波線という概念を導入して、波線に沿って振動数と東西方向の波数が保存され、南北方向の波数は保存せずに分散関係を満たしながら変化することを示す。

(21) ~ (23) 式より、以下のような波数と振動数の関係式が得られる。

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial l}{\partial \lambda}. \quad (36)$$

$\omega = \tilde{\omega}(k \cos \phi, l; \lambda, \phi, t)$ とみなし, 上記の式を使うと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \\ &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \lambda} \right] \\ &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \lambda} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \\ &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi} \frac{\partial l}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \end{aligned} \quad (39)$$

となる. ここで, 群速度を用いる. 群速度 $C_{g\lambda}$, $C_{g\phi}$ はそれぞれ,

$$C_{g\lambda} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial k} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial(k \cos \phi)} \cos \phi, \quad (40)$$

$$C_{g\phi} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} \quad (41)$$

と表されるので, これらを使うと, (37) ~ (39) の各式は,

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \lambda}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial l}{\partial \phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \quad (44)$$

となる. 分散関係式 (25) より, $\tilde{\omega}$ は λ, t に陽に依存しないので,

$$\frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial(k \cos \phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial l}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial l}{\partial \phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \phi}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} = 0 \quad (47)$$

となる。これらの式から、波線に沿って見ると、 $k \cos \phi$ と ω は保存されるが、 l は保存されないことがわかる。ここで、 l は分散関係式 (25) より、

$$l^2 = -\frac{\hat{\beta}k}{\omega - \bar{u}k} - k^2 \quad (48)$$

を満たす。 \bar{u} は ϕ に依存しているので、 l も ϕ に依存して変化する。

3.5 波の活動度

波の活動度が波線に沿って保存されることを示す。

再び渦度方程式 (15) に (18) 式を用いて、今度は $O(\varepsilon^1)$ の項のみを取り出すと、

$$\begin{aligned} & [(-i\omega + i\bar{u}k)\{-(k^2 + l^2)\} + i\hat{\beta}k]\psi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\bar{u}}{r \cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) \{(k^2 + l^2)\psi_0\} \\ & + 2(\omega - \bar{u}k) \left(\frac{k}{r \cos \Phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Lambda} + \frac{l}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi} \right) + (\omega - \bar{u}k) \left(\frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial k}{\partial \Lambda} + \frac{l}{r \cos \Phi} \frac{\partial(l \cos \Phi)}{\partial \Phi} \right) \psi_0 \\ & + \hat{\beta} \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Lambda} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

となる。ここで、 ψ_1 の係数は分散関係式 (24) より 0 となる。残りの項を ψ_0 とその微分についてそれぞれまとめると、

$$\begin{aligned} & -(k^2 + l^2) \frac{\partial \psi_0}{\partial T} + \{-(k^2 + l^2)\bar{u} + 2(\omega - \bar{u}k)k + \hat{\beta}\} \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Lambda} \\ & + 2(\omega - \bar{u}k) \frac{l}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi} + D\psi_0 = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

と変形される。なお、式中の D は、

$$D = -\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\bar{u}}{r \cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) (k^2 + l^2) + (\omega - \bar{u}k) \left(\frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial k}{\partial \Lambda} + \frac{l}{r \cos \Phi} \frac{\partial(l \cos \Phi)}{\partial \Phi} \right) \quad (51)$$

である。ここで、

$$P \equiv (\omega - \bar{u}k)(k^2 + l^2) + \hat{\beta}k \quad (52)$$

を定義すると、

$$\frac{\partial P}{\partial k} = -\bar{u}(k^2 + l^2) + 2k(\omega - \bar{u}k) + \hat{\beta}, \quad (53)$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 2l(\omega - \bar{u}k), \quad (54)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = k^2 + l^2 \quad (55)$$

となる. これらを使うと, (50) 式は簡略に表記することができ,

$$-\frac{\partial P}{\partial \omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial T} + \frac{\partial P}{\partial k} \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Lambda} + \frac{\partial P}{\partial l} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi} + D\psi_0 = 0 \quad (56)$$

と書ける. また, (53) ~ (55) の各式を使うことによって群速度は,

$$C_{g\lambda} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_l = \frac{\partial P}{\partial k} \left(\frac{\partial P}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad (57)$$

$$C_{g\phi} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial l} \right)_k = \frac{\partial P}{\partial l} \left(\frac{\partial P}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (58)$$

と表せるので, (56) 式を群速度を用いて書き換えると,

$$-\frac{\partial P}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial T} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \Phi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi} \right) + D\psi_0 = 0 \quad (59)$$

となる. (51) 式の D についても群速度を用いると,

$$D = -\frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2} \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{(k^2 + l^2)^2}{2\hat{\beta}} \right) + \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(C_{g\lambda} \frac{(k^2 + l^2)^2}{2\hat{\beta}} \right) + \frac{1}{r \cos^2 \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(C_{g\phi} \cos^2 \Phi \frac{(k^2 + l^2)^2}{2\hat{\beta}} \right) \right] \quad (60)$$

と書き換えられる. これを (56) 式に用いて, さらに $\frac{(k^2 + l^2)\psi_0 \cos \Phi}{\hat{\beta}}$ をかけると,

$$\frac{\partial A}{\partial T} + \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Lambda} (AC_{g\lambda}) + \frac{1}{r \cos \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} (AC_{g\phi} \cos \Phi) = 0 \quad (61)$$

となる. ここで A は,

$$A = \frac{(k^2 + l^2)^2 \cos \Phi}{2\hat{\beta}} \psi_0^2 \quad (62)$$

であり, 波の活動度という. これは, 波の振幅である ψ_0 の 2 乗に比例した量であり, 波動の強さを表す. したがって (61) 式より, 波の活動度は波線に沿って保存されることがわかる.

4 定在ロスビー波の性質

この節では、前節で求めたロスビー波の性質が、定在ロスビー波となる場合においてどのように変化するかを考える。

4.1 定在ロスビー波

定在ロスビー波となるときの位相速度は 0 である。よって、定在ロスビー波となる条件は、(26) 式、(27) 式より、

$$\bar{u} - \frac{\hat{\beta}}{k^2 + l^2} = 0, \quad (63)$$

すなわち、

$$k^2 + l^2 = \frac{\hat{\beta}}{\bar{u}} \quad (64)$$

となった場合である。この条件を使って、定在ロスビー波の伝播経路を考える。

定在ロスビー波となるときの群速度は、群速度の定義 (28) 式、(29) 式に (64) 式を用いて、

$$C_{g\lambda} = \frac{2\bar{u}^2 k^2}{\hat{\beta}}, \quad (65)$$

$$C_{g\phi} = \frac{2\bar{u}^2 kl}{\hat{\beta}} \quad (66)$$

となる。ここで、平均風の分布に極端な仮定を用いない限り $\hat{\beta} > 0$ であるので、一般的に $C_{g\lambda} > 0$ となる。つまり、群速度は東向きとなる。また、群速度ベクトル C_g を具体的に表現すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_g &= (C_{g\lambda}, C_{g\phi}) \\ &= \left(\frac{2\bar{u}^2 k^2}{\hat{\beta}}, \frac{2\bar{u}^2 kl}{\hat{\beta}} \right) \\ &= 2\bar{u} \cos \alpha \frac{\mathbf{K}}{K} \end{aligned} \quad (67)$$

となる。ここで、

$$|\mathbf{C}_g| = C_g = 2|\bar{u}| \cos \alpha \quad (68)$$

とすると, (67) 式は,

$$C_g = C_g \frac{K}{K} \quad (69)$$

と表せる. これは, 群速度ベクトルと波数ベクトルが同じ方向であることを示している.

4.2 波線の屈折

定在ロスビー波の波線が屈折することを示す.

まず, 波線の緯度円に対する傾きを α とすると,

$$\tan \alpha = \frac{l}{k} \quad (70)$$

と表すことができる. また, 波線に沿った微分を,

$$\frac{d_g}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{C_{g\lambda}}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{C_{g\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (71)$$

と定義すると, 波線に沿った $k \cos \phi$, l の変化は

$$\frac{d_g(k \cos \phi)}{dt} = 0, \quad (72)$$

$$\frac{d_g l}{dt} = \frac{K}{l} \frac{d_g K}{dt} = \frac{K}{l} C_{g\phi} \frac{d_g K}{d\phi} \quad (73)$$

となる. ここで, (68) 式より,

$$C_{g\phi} = \frac{2\bar{u}^2 k l}{\hat{\beta}} = \frac{l}{K} C_g \quad (74)$$

とできるので, これを用いると,

$$\frac{d_g l}{dt} = C_g \frac{d_g K}{d\phi} \quad (75)$$

となる. これに (70) 式を代入すると,

$$\frac{d_g \tan \alpha}{dt} = \frac{C_g}{k} \frac{d_g K}{d\phi} \quad (76)$$

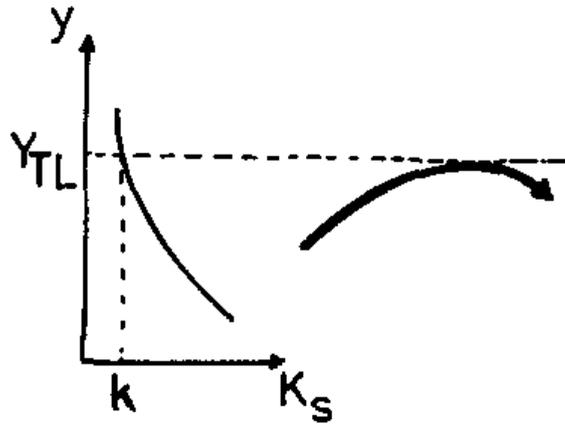


図 1: 波線が屈折する様子の概念図. 図中の K_s, y はそれぞれ本文中の K, ϕ と対応する. また, 図中の Y_{TL} は波線が緯線と平行になる緯度であり, 転向緯度とよばれる. (Hoskins and Ambrizzi, 1993)

となり, これを α について書き直すと,

$$\frac{d_g \alpha}{dt} = \frac{C_g k}{K^2} \frac{d_g K}{d\phi} \quad (77)$$

となる. ここから, l が変化した場合における α のふるまいについて考察する. まず, (77) 式の右辺の係数 $C_g k / K^2$ は, $k > 0$ より正であることを先に述べておく. ここから, $d_g K / d\phi < 0$ となる場合は $d_g \alpha / dt < 0$ となることがわかる. つまり, 全波数 K が減少すると α も減少し, 図 1 のようになる. 逆に, $d_g \alpha / dt > 0$ となる場合は $d_g K / d\phi > 0$ となることがわかる. つまり, 全波数が増加すると α は増加する. したがって, どちらの場合も波線は全波数 K が大きくなる方向へ屈折することがわかる.

ただし, (77) 式に再び着目すると, $C_g = 2|\bar{u}| \cos \alpha$ から, $\alpha \rightarrow \pm 90^\circ$ に近づくと

$$\frac{d_g \alpha}{dt} \rightarrow 0 \quad (78)$$

となるため, 波線が緯線に完全に垂直となることはない. これらのことから, 波線は全波数 K の極大があるときには, 波線は K が極大となる緯度を軸にして, 図 2 のような導波管が形成される.

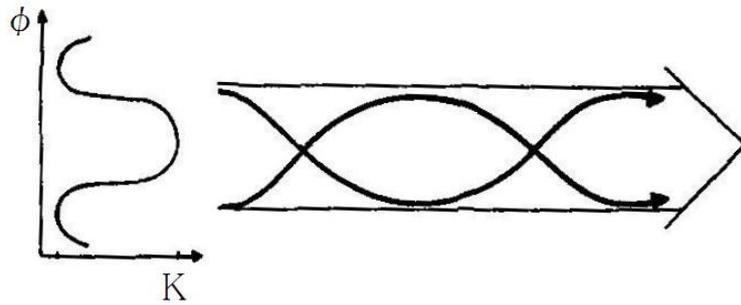


図 2: 導波管ができる場合の概念図. 右図の上下に蛇行している曲線は波線であり, その上下に引かれている直線は南北の転向緯度である. この波線は南北に蛇行を繰り返しながら東へ進む. (Hoskins and Ambrizzi, 1993)

4.3 臨界緯度

臨界緯度について考える.

k を一定として, $l \rightarrow \infty$ となる緯度, すなわち $\omega - \bar{u}k = 0$ となる緯度を臨界緯度 ϕ_c とすると, 群速度 $C_{g\phi}$ は臨界緯度に近づくにつれて,

$$C_{g\phi} = \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} \rightarrow 0 \quad (79)$$

となる. よって, 臨界緯度において $C_{g\phi}$ は収束する (図 3).

\bar{u} を $\phi = \phi_c$ のまわりにおいて 1 次の項までテイラー展開をすると,

$$\bar{u}(\phi) = \bar{u}(\phi_c) + \bar{u}'(\phi_c)(\phi - \phi_c) \quad (80)$$

となり, さらに $\bar{u}(\phi_c) = 0$ であるので,

$$\bar{u}(\phi) = \bar{u}'(\phi_c)(\phi - \phi_c) \quad (81)$$

となる. よって,

$$\omega - \bar{u}k = -k\bar{u}'(\phi_c)(\phi - \phi_c) \quad (82)$$

$$\begin{aligned} l^2 &= -\frac{\hat{\beta}k}{\omega - \bar{u}k} - k^2 \\ &\sim \frac{\hat{\beta}}{\bar{u}'(\phi_c)(\phi - \phi_c)} - k^2 \\ &\propto (\phi - \phi_c)^{-1} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} C_{g\phi} &= \frac{2\hat{\beta}kl}{(k^2 + l^2)^2} \\ &\sim 2\hat{\beta}k \frac{1}{(\phi - \phi_c)^{-\frac{3}{2}}} \\ &\propto (\phi - \phi_c)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (84)$$

より, $C_{g\phi}$ が臨界緯度に達するまでの時間は

$$\int \frac{d\phi}{C_{g\phi}} \propto (\phi - \phi_c)^{-\frac{1}{2}} \quad (85)$$

となり, 無限に時間がかかる.

しかし, この議論は正しくない. 臨界緯度付近では WKBJ 近似は成り立たないからである. これからそれを示していく. (61) 式より, いま, 定常で東西一様であるとすると,

$$AC_{g\phi} \cos \Phi = \text{一定} \quad (86)$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \psi_0 &\propto \left(\frac{1}{C_{g\phi}(k^2 + l^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\hat{\beta}kl} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\propto l^{-\frac{1}{2}} \\ &\propto (\phi - \phi_c)^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (87)$$

となる. ここで, 臨界緯度付近において振幅 ψ_0 の ϕ 方向の変化のスケールを考えると,

$$\frac{1}{\psi_0} \frac{d\psi_0}{d\phi} = (\phi - \phi_c)^{-1} \quad (88)$$

であり, ϕ 方向の波長 $\frac{2\pi}{l}$ と振幅の変化するスケール $\frac{1}{\psi_0} \frac{d\psi_0}{d\phi}$ の比は,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{l} \left(\frac{1}{\psi_0} \frac{d\psi_0}{d\phi} \right)^{-1} &\propto (\phi - \phi_c)^{\frac{1}{2}} \cdot (\phi - \phi_c)^1 \\ &= (\phi - \phi_c)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (89)$$

となる. この値は $\phi = \phi_c$ で 0 となる. つまり, 1 波長の中に, 振幅が大きく変化することを意味しており, これは WKBJ 理論の仮定に矛盾する. したがって, 臨界緯度付近では WKBJ 理論は成り立たない.

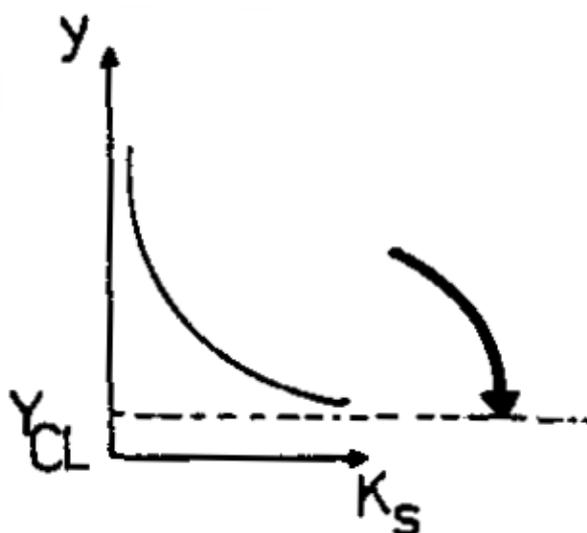


図 3: 臨界緯度の概念図. 図中の K_s, y はそれぞれ本文中の K, ϕ と対応する. また, 図中の Y_{CL} は臨界緯度を表しており, 本文中の ϕ_c と対応する. (Hoskins and Ambrizzi, 1993)

5 定在ロスビー波の球面伝播

経度 0 度, 北緯 45 度に点波源がある場合の定在ロスビー波の伝播経路について, 2 パターンの平均風を仮定して考察した.

5.1 平均風が剛体回転流である場合の伝播

回転球面上に剛体回転流である平均風があると仮定した場合の定在ロスビー波の伝播経路について考察する.

まず, 平均風 \bar{u} が剛体回転流であるので,

$$\bar{u} = 15 \cos \phi \quad (90)$$

とする. この平均風の大きさを図に表すと図 4 のようになる.

この場合, 全波数 K は赤道で極大をとり, 極で 0 となる. また, 赤道から極へ向けて単調減少となり, 他に極値を持つような緯度は存在しない. したがってこの場合, 波線は図 5 に示すように, 赤道を軸とする導波管を形成する. また, 波線の傾きを表す式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \phi} \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{C_{g\phi}}{C_{g\lambda}} \\ &= \frac{l}{k} \\ &= \frac{\sqrt{K^2 - k^2}}{k} \end{aligned} \quad (91)$$

より, 伝播経路を考える. (33) 式の α を赤道と波線のなす角 γ に置き換えると,

$$\cos \gamma = \frac{k \cos \phi}{K} \quad (92)$$

となるので, これを (91) 式に代入すると,

$$\frac{1}{\cos \phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \sqrt{\tan^2 \gamma - \tan^2 \phi} \cos \phi \quad (93)$$

となる. この式を λ で積分すると, 波線の式は,

$$\tan \gamma \sin(\lambda - \lambda_0) = \tan \phi \quad (94)$$

となる. これは経度 $\lambda = \lambda_0$ において赤道と角度 γ で交わり, 緯度 γ に届く大円を表す. つまり, この場合の定在ロスビー波の伝播経路は図 5 のように大円となる.

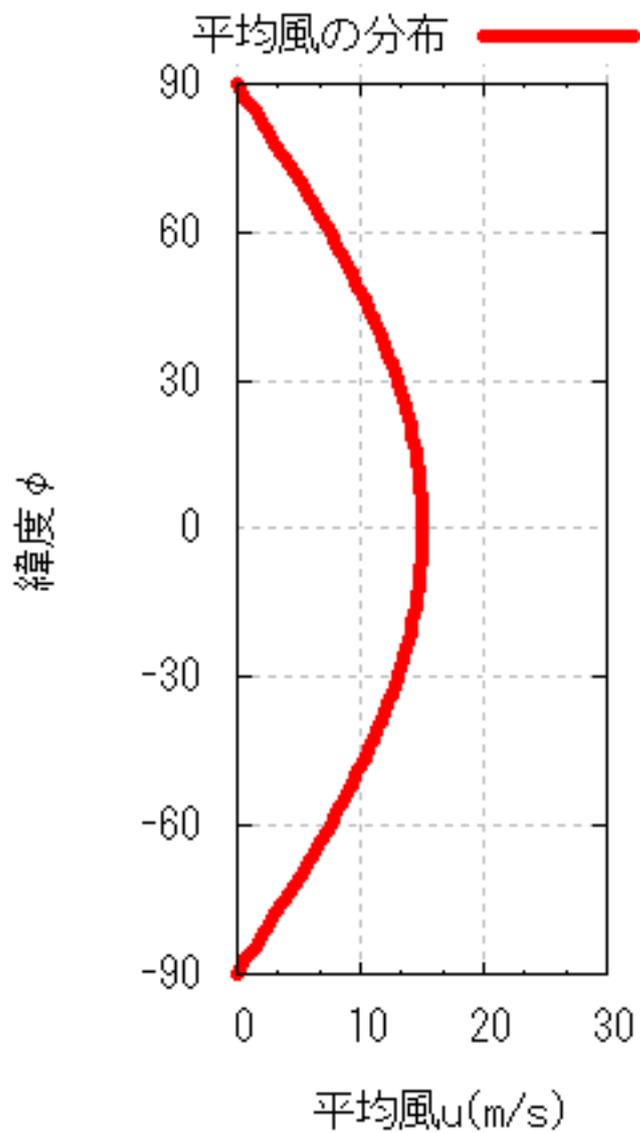


図 4: 剛体回転流の場合の平均風の緯度分布.

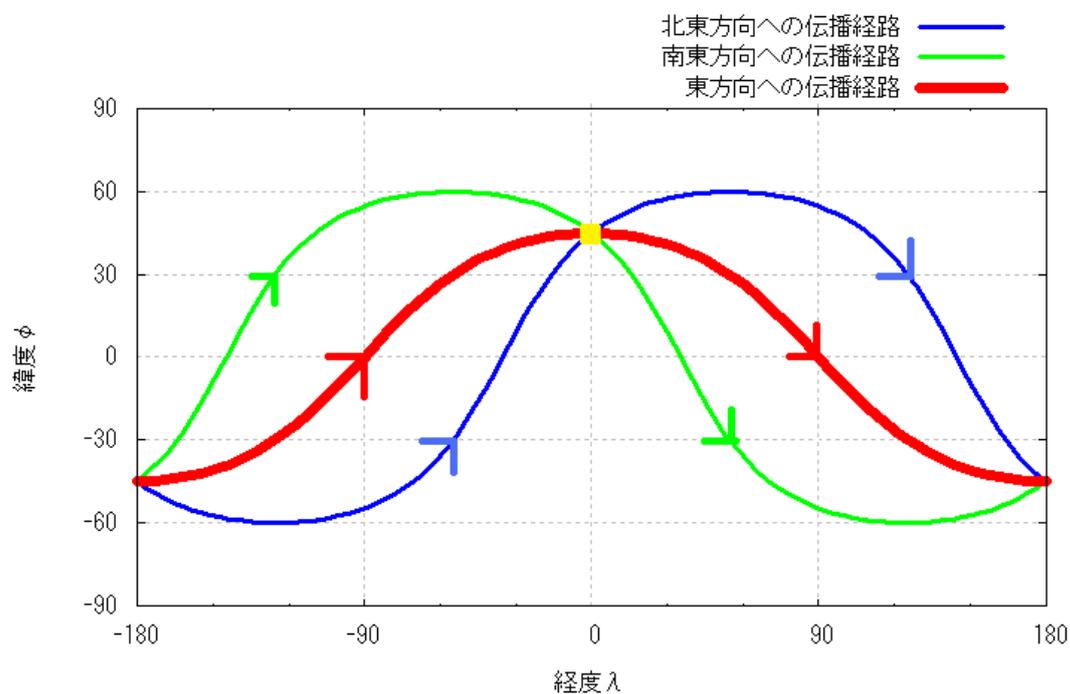


図 5: 平均風が剛体回転流の場合の波線図. 点波源から北東, 真東, 南東へ進むとした 3 本の波線の例を示した. 点波源から北東に進む波線, 真東に進む波線, 南東に進む波線の λ_0, γ の値はそれぞれ, 北東: $\lambda_0 \simeq -35.3^\circ, \gamma = 60^\circ$, 真東: $\lambda_0 = -90^\circ, \gamma = 45^\circ$, 南東: $\lambda_0 = -144.7^\circ, \gamma = 60^\circ$ となる.

5.2 現実大気に近い平均流を考えた場合の伝播

現実の地球大気では、赤道付近は貿易風と呼ばれる東風が、中緯度付近では偏西風と呼ばれる西風が卓越している。このように、現実大気に近い平均流を仮定した場合の定在ロスビー波の伝播経路について考察する。

まず、平均風 \bar{u} を図 6 のように、

$$\bar{u} = -30 \cos 3\phi \quad (95)$$

とおいた。この関数を選んだ目的は、赤道付近で東風を、中緯度では西風を表現できる関数の中で、最も簡単な形なためである。なお、この関数は赤道対称であるため、ここでは北半球の場合のみを考える。

この場合、北緯 30° において $\bar{u} = 0$ となる。そのため、北からこの緯度に近づくとつれて全波数 K は、

$$K = \left(\frac{\hat{\beta}}{\bar{u}} \right) \rightarrow \infty \quad (96)$$

となる。したがって、北緯 30° より北では、北緯 30° を臨界緯度とした伝播経路となる。また、赤道から北緯 30° の間では、 $\bar{u} < 0$ となり、波数 K が実数値をもたない。これは定在ロスビー波は西風の中でのみ存在できるためである。この場合における伝播経路は図 7 に示す。経度 0 度、北緯 45 度から出た波線は、南寄りに出ようと北寄りに出ようと時計回りに屈折して、いずれは経線に平行な方向に近づきながら臨界緯度に接近し、やがて伝播しなくなる。したがって、定在ロスビー波が永遠に存在することはできない。定在ロスビー波を存在させるためには全波数が極大となる緯度が必要である。

しかし現実大気では、中緯度地域に定在ロスビー波が存在する。その理由はおそらく、中緯度地域に偏西風の強い地帯が局在的にあり、その緯度において K の値が極大を取り、導波管の軸となるからであると予想される。

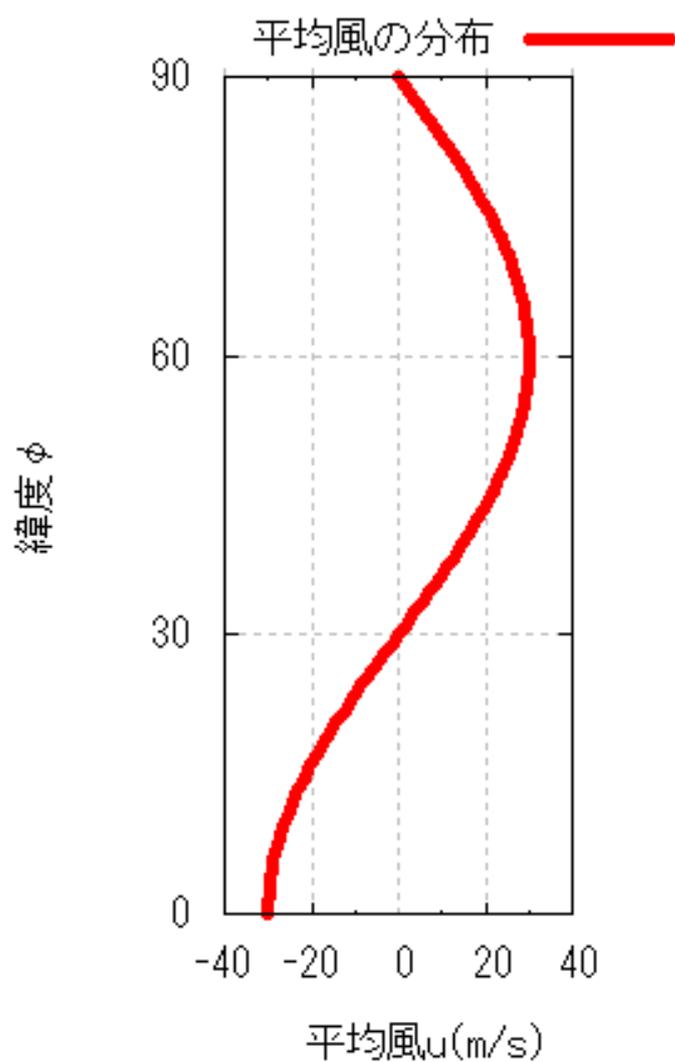


図 6: 現実大気に近い平均風がある場合の平均風の緯度分布. 北緯 30° を境として, それ以南では東風が, 以北では西風が吹いているとする.

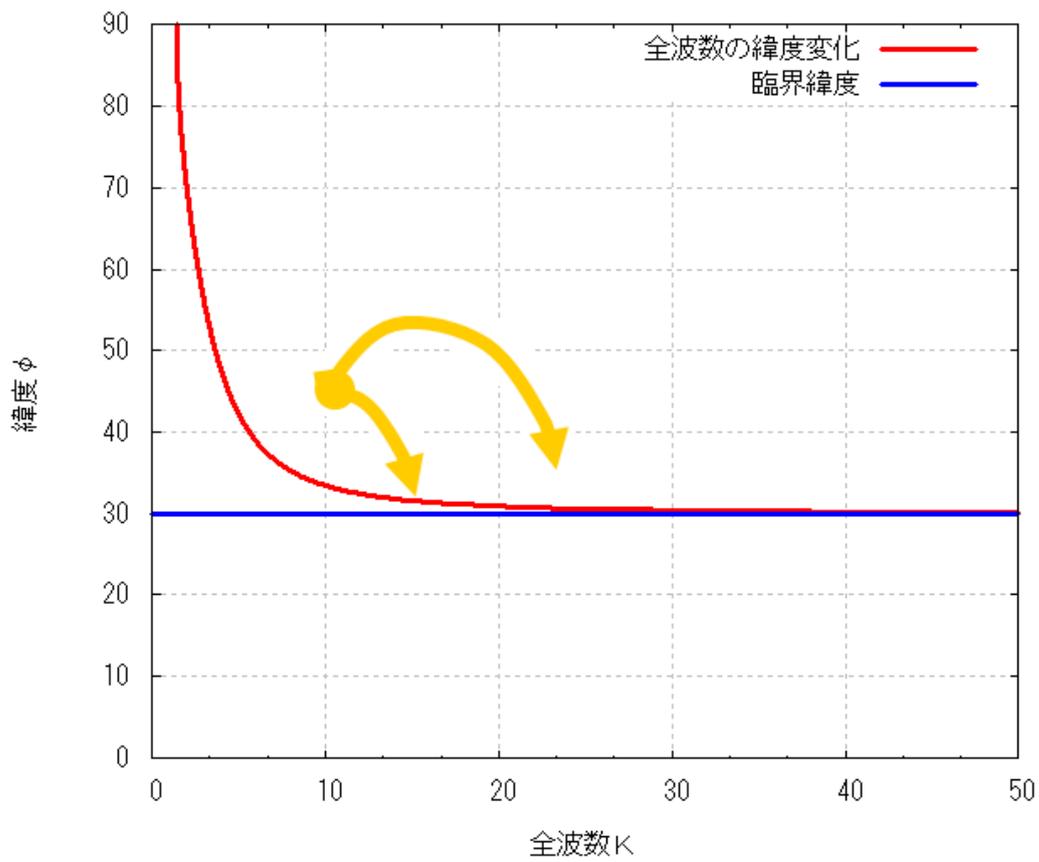


図 7: 現実大気に近い平均風がある場合の波線図. 赤線は全波数の値であり, 北から北緯 30° の臨界緯度に近づくとつれ, 無限大に発散する.

6 まとめ

本論文は、回転球面上の 2 次元順圧渦度方程式に対して、WKBJ 近似を用いて定在ロスビー波の性質を調べ、伝播の経路を調べた。

回転球面上のロスビー波の位相速度は西向きであるので、平均風が東向きでかつ、ロスビー波の位相速度と同じ大きさの場合に定在ロスビー波となる。定在ロスビー波の波線と波数ベクトルは同じ方向となるため、定在ロスビー波の伝播経路を求めるには波線の経路を求めればよく、波線の経路は波数の変化から求められる。

波線理論から以下のことが示された。平均風が剛体回転流である場合、全波数は赤道で極大をとり、極で 0 となるので、波線は赤道を軸とする導波管を形成する。現実大気に近い平均流を考えた場合、波線が南寄りに出ようと北寄りに出ようと、いずれは屈折して経線に平行な方向に近づきながら臨界緯度に接近し、やがて伝播しなくなる。しかし、臨界緯度付近では波線理論は適用できないため実際に伝播しなくなるとは限らない。また、現実大気では中緯度地域に定在ロスビー波が存在する、という事実から現実大気平均風はおそらく、中緯度地域に全波数の極大ができるような分布をしている、ということが予想された。

これ以後、さらに議論を進めるには現実大気にさらに近づけた平均風を考える必要性があり、また、数値計算の結果も含めて議論する必要がある。

謝辞

本論文の執筆にあたり，多くの方々の御指導ならびに御協力を頂きました。指導教官である林祥介教授には，本論文の指針を与えて頂きました。岩山隆寛准教授には，論文内容についての御指導，助言を頂きました。また，特に佐々木洋平氏，森川靖大氏，村上真也氏には貴重なお時間を割いて頂き，発表資料の作成や，論文を書く上での多大なご指導と助言を頂きましたことに深く感謝いたします。

また，日頃のセミナーや会話などを通じて貴重なアドバイスを頂きました地球および惑星大気科学研究室の皆様にも感謝の意を表し，深く御礼申し上げます。どうもありがとうございました。

参考文献

- [1] Hoskins, B. J., and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally barying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1661-1671.
- [2] Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics -2nd Edition-*, Springer, 703 pp.
- [3] 小倉義光, 1999: *気象力学通論*, 東京大学出版会, 249 pp.
- [4] 兼成智久, 2007: 定常ロスビー波の球面伝播, 北海道大学理学部地球科学科, 卒業論文.
- [5] 康アルム, 2008: β 平面上の 2 次元定常ロスビー波の伝播, 神戸大学理学部地球惑星科学科, 卒業論文.
- [6] 高橋こう子, 2002: 二次元定常ロスビー波の伝播, 北海道大学理学部地球科学科, 卒業論文.
- [7] 竹広真一, SPMODEL 開発グループ, 2008: 回転球面上での 2 次元順圧流体の定式化. <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>
- [8] 林祥介, 1987: 二次元定常ロスビー波の線形論, *気象研究ノート*, 第 156 号「ロスビー波」, 日本気象学会, 235-254.
- [9] 林祥介, 1992: 線形波動, *GFD ノート*.