

卒業論文

$\beta$  平面上の 2 次元定常  
ロスビー波の伝播

Propagation of two  
dimensional stationary  
Rossby wave on a beta plane.

康 アルム

KANG Ahrum

神戸大学理学部地球惑星科学科  
地球および惑星大気科学研究室

2008 年 2 月 29 日

## 要旨

本論文は林 (1987) に基づき,  $\beta$  平面上の線形化した 2 次元非発散順圧渦度方程式を解くことで, 定常ロスビー波の伝播について調べた.

定常ロスビー波の伝播について解析的に調べ, 数値計算を通して確認した. 定常ロスビー波の等位相線は波源から平均風方向の円内で現れ, その円は時間の経過とともに大きく広がっていく. その円の半径は基本場の平均風の大きさと経過時間との積として与えられた. 定常波は時間  $\delta t$  後には  $|C_g| \Delta t$  まで進んでいた.

## 目次

1	はじめに	2
2	支配方程式	4
2.1	系の設定 . . . . .	4
2.2	非発散順圧方程式 . . . . .	5
2.3	線形化 . . . . .	6
2.4	渦度方程式の導出 . . . . .	7
3	WKBJ 近似によるロスビー波	9
3.1	分散関係 . . . . .	9
3.2	位相速度 . . . . .	11
3.3	群速度 . . . . .	11
3.4	波の活動度 . . . . .	12
4	定常波の解析	14
5	定常波の数値解	17
6	まとめ	27
	謝辞	28
	参考文献	29

## 1 はじめに

ロスビー波は自転する球面上の大気の中で西向きに進む波であり、地球では中緯度の気候を支配する高低気圧など、大規模な気象現象の発現に重要な役割を果たしている。高層天気図が描かれ始めたころ、低気圧に対応する偏西風波動よりも波長の長い波が存在し、それが偏西風の中でほぼ停滞し、ときによっては流れに逆らって西に動くことが発見された。この波を発見者 Rossby にちなんでロスビー波と呼ぶ。ロスビー波の位相速度は西向きであるため、偏西風が卓越する地域で速度がつりあい、ロスビー波が停滞する。この停滞したロスビー波を定常ロスビー波という。

定常ロスビー波の伝播に関する研究を紹介する。Grose and Hoskins (1979) は球面上のロスビー波の伝播を数値的に計算した。その結果が図 1.1 である。図 1.1 は剛体回転している大気中で円形の地形が励起する流れの渦度の分布である。その応答は非等方的な形であり、2つの方向(南東, 北東)に渦度の強い応答が生じる。一方、林 (1987) は  $\beta$  平面に

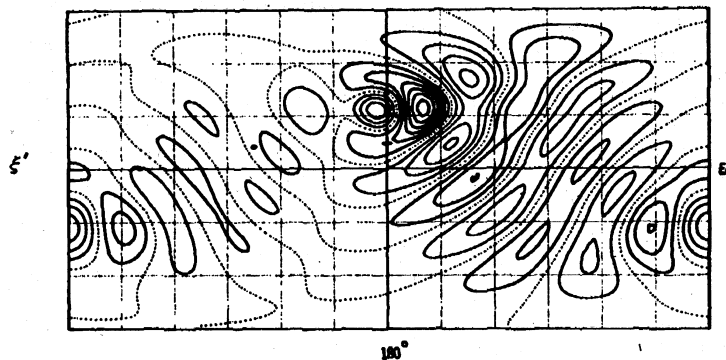


図 1.1 剛体回転する大気中に置かれた円形の山に対する渦度応答 (Grose and Hoskins, 1979). 山は ( $30^\circ \text{ N}$ ,  $180^\circ$ ) に置かれており、その底面での直径は約  $5,000 \text{ km}$  である。

おけるロスビー波の伝播を研究した。林 (1987) は WKBJ 近似で波の伝播を解析的に調べ、数値計算の結果と比較、議論した。解析解ではロスビー波の応答が波源から生じる円領域内で等方的な形で分布すると考えられた。しかし、数値計算の結果ではロスビー波の応答が円領域内で非等方的に存在した (図 1.2)。林 (1987) は局所波数振動数で波の伝播を

議論する WKBJ 近似では大規模な波の伝播を調べるのに適切でないことを示した。

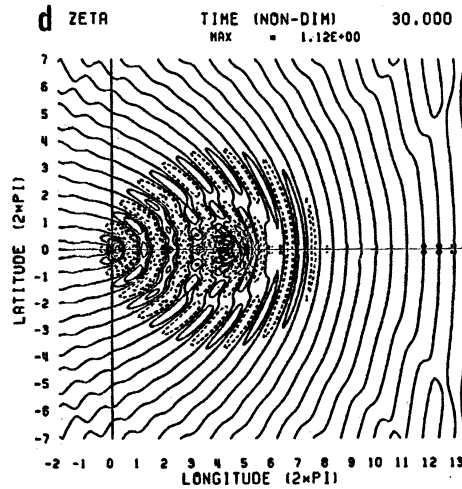


図 1.2 円形地形  $e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}}$  ( $r_0 = 0.05\lambda_S$ ) によって励起されるロスビー波の初期値問題の数値解 (林, 1987). 横軸, 縦軸の座標は定常波長  $\lambda_S$  でスケールされており, 地形は  $x = 0, y = 0$  に置かれている.

本論文では, 林 (1987) の論文に基づき, 定常ロスビー波の伝播を調べる. 数値計算を行い, 定常波の等位相線が平均風方向の円内で現れることを確認する.

本論文の構成は以下のとおりである. 2 章で非発散順圧方程式を求め, 無次元順圧渦度方程式を導出した. 3 章では WKBJ 近似よりロスビー波の分散関係式, 位相速度, 群速度, 波の活動度を求めた. 4 章では定常波を解析的に考えた. 5 章では数値解を求めた. 6 章はまとめである.

## 2 支配方程式

運動方程式, 質量方程式から非発散順圧方程式を求める. 非発散順圧方程式から無次元順圧渦度方程式を導出する.

### 2.1 系の設定

図 2.1 のような  $\beta$  平面上の非圧縮・非粘性流体を考える. 流体の上下には剛体境界があり, 境界間の高さは  $H_0$  で一定とする. 下部境界には微小な地形  $h$  が存在する. 流体の深さを  $H$  とする ( $H = H_0 - h$ ).

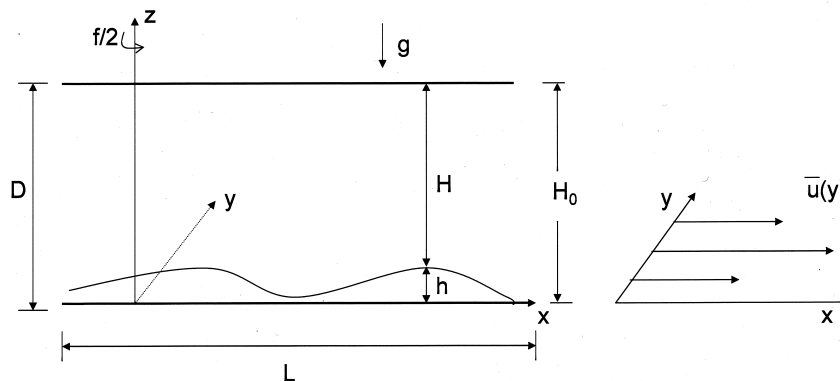


図 2.1 上下剛体境界を持つ回転系.

$x$  は東向き,  $y$  は北向きであり,  $z$  は鉛直方向である. 水平方向の長さスケールを  $L$ , 鉛直方向の長さスケールを  $D$  とし,  $D/L$  は非常に小さいとする.  $x, y, z$  方向の速度をそれぞれ  $u, v, w$  とし, 基本場としては平均風  $\bar{u}(y)$  が存在する. コリオリパラメータは  $f = f_0 + \beta y$  とする.  $g$  は重力加速度である.

## 2.2 非発散順圧方程式

前節の系のもとで非発散順圧方程式を導出する.

運動方程式および質量保存則は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \mathbf{k} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

である. ここで  $\mathbf{k}$  は鉛直方向の単位ベクトル,  $\rho$  は密度を表す.  $D/L \ll 1$  であるので, 静水圧近似を用いると, 圧力は

$$P = -\rho g z + \tilde{P} \quad (3)$$

と書ける. ただし,  $\tilde{P}$  は静力学平衡からの微小なずれを表す.  $z = H_0$  での圧力を  $P(x, y, H_0, t) = P_H$  とすると,

$$P_H = -\rho g H_0 + \tilde{P} \quad (4)$$

であり, 式 (3) に代入すると

$$P = \rho g (H_0 - z) + P_H, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla_H P = \frac{1}{\rho} \nabla_H P_H, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -g \mathbf{k} \quad (6)$$

となる. ここで,

$$\nabla_H = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

である. 水平速度を  $u(x, y, t), v(x, y, t)$  とし, 式 (6) を運動方程式 (1) に代入すると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_H}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_H}{\partial y}, \quad (8)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (9)$$

となる.

質量保存則 (2) より

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (10)$$

であるから、これを  $z$  方向について積分することで、

$$w(x, y, z, t) = -z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tilde{w}(x, y, t) \quad (11)$$

が得られる。 $\tilde{w}$  は積分定数である。

上部境界  $z = H_0$  における鉛直速度は  $w(x, y, H_0, t) = 0$  であるので、式 (11) より

$$\begin{aligned} w(x, y, H_0, t) &= -H_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tilde{w} = 0, \\ \tilde{w} &= H_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、式 (11) は

$$w(x, y, z, t) = (H_0 - z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (13)$$

となる。また、下部境界  $z = h(x, y)$  の流体要素の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \\ &= w(x, y, h, t) \end{aligned} \quad (14)$$

であるから、式 (13), (14) より

$$(H_0 - h) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (15)$$

となる。

### 2.3 線形化

基本場の平均風の速度は  $\bar{u} = \bar{u}(y)$  であり、平均風からの微小なずれを  $u'$  とすると、

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v' \quad (16)$$



である. ただし,  $v'$  は  $y$  方向の微小速度とした. 運動方程式 (7), (8), 質量保存則 (15) は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} - f v' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_H}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + f(\bar{u} + u') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_H}{\partial y}, \quad (18)$$

$$(H_0 - h) \left( \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = (\bar{u} + u') \frac{\partial h}{\partial x} + v' \frac{\partial h}{\partial y} \quad (19)$$

となる. ここで, 微小量  $u', v', h$  が 2 つ以上かかっている項は  $u', v', h$  が 1 つの項より非常に小さいので無視でき, 上式は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f v' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_H}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + f \bar{u} + f u' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_H}{\partial y}, \quad (21)$$

$$H_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (22)$$

となる. 簡単化のため以下では添え字  $'$  は省略する.

## 2.4 渦度方程式の導出

運動方程式 (20), (21) と質量保存則 (22) から渦度方程式を求める. まず式 (21) を  $x$  について偏微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (f u) + \frac{\partial}{\partial x} (f \bar{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P_H}{\partial x \partial y} \quad (23)$$

となる. 次に式 (20) を  $y$  について偏微分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (f v) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P_H}{\partial x \partial y} \quad (24)$$

となる. 式 (23) から式 (24) を引くと,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v = -f \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (25)$$

となり, 式 (22) を用いると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v = - \left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\bar{u}}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (26)$$

となる. ここで,  $\zeta$  は渦度を表し,

$$\zeta \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

である.

渦度方程式 (26) を無次元化する. 速度スケールとして一般流  $\bar{u}$  の大きさを代表するある値  $\bar{u}_0$  をとる. 時間スケール  $T$ , 空間スケール  $L$  をそれぞれ

$$T = \sqrt{\frac{1}{\beta \bar{u}_0}}, \quad (27)$$

$$L = \sqrt{\frac{\bar{u}_0}{\beta}} \quad (28)$$

とすると, 無次元化された渦度方程式は

$$\frac{\partial \zeta_*}{\partial t_*} + \bar{u}_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + \left(1 - \frac{\partial^2 \bar{u}_*}{\partial y_*^2}\right) v_* = - \left(f_* - \frac{\partial \bar{u}_*}{\partial y_*}\right) \frac{\bar{u}_*}{H_{0*}} \frac{\partial h_*}{\partial x_*} \quad (29)$$

となる. ここで, 添え字\*がついている量は無次元量を表す. 以下簡単のために\*を省略する.

ここで, 流線関数  $\psi$  を導入する.  $u, v$  を

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (30)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (31)$$

とすると, 渦度は  $\zeta = \nabla^2 \psi$  となるので, 式 (29) は

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \left(1 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \frac{\bar{u}}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (32)$$

となる. 式 (32) が以下の議論で基本となる式である.

### 3 WKBJ 近似によるロスビー波

WKBJ 近似により分散関係, 位相速度, 群速度, 波の活動度を求める.

#### 3.1 分散関係

渦度方程式 (32) の  $\psi$  の解の形として実関数の位相関数  $\theta(x, y, t)$  が定義できるものについて考える. 振幅, 振動数の空間時間変化が位相の空間時間変化よりゆっくりであるときを議論する. 微小パラメータを導入することによって, 時間, 空間を引き伸ばし, 局所的な波の解を求める.

微小のパラメータ  $\varepsilon$  で  $\psi$  を展開する.

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n e^{i\theta}. \quad (33)$$

ただし,

$$0 < \varepsilon \ll 1 \quad (34)$$

である.

ここで, 振幅, 波数, 振動数の空間時間変化のゆっくりさを表すために, 新しい空間時間座標  $X, Y, T$  を導入する.  $x, y, t$  と  $X, Y, T$  の関係は,

$$\varepsilon(x, y, t) = (X, Y, T) \quad (35)$$

とする. 振幅と位相がきちんと定義できるためには,  $\psi_n$  の空間時間変化が  $O(\varepsilon)$  であるのに対し,  $\theta$  の空間時間変化は  $O(1)$  でなければならない. この場合,  $\psi_n, \theta$  はそれぞれ

$$\psi_n = \psi_n(X, Y, T), \quad (36)$$

$$\theta = \theta(x, y, t) \equiv \frac{\Theta(X, Y, T)}{\varepsilon} \quad (37)$$

と表される. もとの展開式 (33) は  $X, Y, T$  で表すと,

$$\psi = \sum \varepsilon^n \psi_n(X, Y, T) e^{i \frac{\Theta(X, Y, T)}{\varepsilon}} \quad (38)$$

となる. ここで, 波数ベクトル  $K$  と振動数  $\omega$  を以下のように定義する.

$$\mathbf{K} = (k, l) \equiv \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right), \quad (39)$$

$$\omega \equiv -\frac{\partial \Theta}{\partial T}. \quad (40)$$

WKBJ 近似より分散関係式を求める. 外力がない場合, 渦度方程式は式 (32) より,

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \left( 1 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

となり, 新しい空間時間座標  $X, Y, T$  で表すと,

$$\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi + \bar{u} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi + \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (42)$$

となる. 展開式 (38) を式 (42) に代入し,  $O(\varepsilon^0)$  の項をとると,

$$\left[ -\frac{\partial \Theta}{\partial T} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) - \bar{u} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right] \psi_0 = 0 \quad (43)$$

となる. 上式に波数 (39) と振動数 (40) を代入して整理すると, 分散関係式

$$\omega = \bar{u}k - \frac{k}{k^2 + l^2} \quad (44)$$

が得られる.  $\bar{u} > 0, k < 0$  の場合, 振動数  $\omega$  が小さくなる.  $\bar{u} > 0, k > 0$  の場合は振動数が大きくなる.  $\bar{u} = 1/(k^2 + l^2)$  の場合は  $\omega = 0$  であり, 定常波となる. 式 (44) の右辺第 2 項目は静止基本場における分散関係であり, 平均風  $\bar{u}$  が存在することによって  $\bar{u}k$  だけ振動数が変化する.

### 3.2 位相速度

分散関係より位相速度を求める.  $x, y$  方向の位相速度をそれぞれ  $c_X, c_Y$  とすると,

$$c_X \equiv \frac{\omega}{k} = \bar{u} - \frac{1}{k^2 + l^2}, \quad (45)$$

$$c_Y \equiv \frac{\omega}{l} = \left( \bar{u} - \frac{1}{k^2 + l^2} \right) \frac{k}{l} \quad (46)$$

となる. 東西方向の位相速度において, 波長が十分短い場合は波数  $k, l$  が大きいので, 式 (45) の右辺第 2 項は平均風  $\bar{u}$  に対して無視できる. つまり, 波は平均風  $\bar{u}$  で東に伝播する. 一方, 波長が十分長い場合は波数が小さいので, 式 (45) の右辺第 2 項は平均風  $\bar{u}$  より大きくなり, 波は西に進む. 位相速度が 0 の場合は定常波であり,

$$k^2 + l^2 = \frac{1}{\bar{u}} \quad (47)$$

となる.

### 3.3 群速度

群速度  $C_g$  は分散関係式を波数で微分することによって得られる.  $X, Y$  方向の群速度をそれぞれ  $C_{gX}, C_{gY}$  とすると,

$$C_{gX} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \bar{u} + \frac{k^2 - l^2}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (48)$$

$$C_{gY} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2} \quad (49)$$

となる. 東西方向の群速度  $C_{gX}$  において,  $l$  を一定とし, 東西方向の波数  $k$  が  $l$  に比べて非常に大きい場合と, 小さい場合を考えると,

$$C_{gX} = \bar{u} + \frac{1}{k^2} > \bar{u} \quad (k \gg l), \quad (50)$$

$$C_{gX} = \bar{u} - \frac{1}{l^2} < \bar{u} \quad (k \ll l) \quad (51)$$

となる. すなわち, 東西方向の波長が相対的に短い場合には群速度が平均風  $\bar{u}$  よりも速くなり, また南北方向の波長に比べて東西方向の波長が非常に長い場合には群速度が平均風  $\bar{u}$  よりも遅くなる.

### 3.4 波の活動度

外力がない場合, 展開式 (38) を渦度方程式 (41) に代入し,  $O(\varepsilon^1)$  の項を取り出す. 直接  $O(\varepsilon^1)$  を計算するのは煩雑になるので別のやりかたで計算する. 式 (42) の両辺に  $\nabla^2 \psi^*$  をかけると,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial X} \right) \psi \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi^* \\ & + \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi^* = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

となる. ここで  $\psi^*$  は  $\psi$  の複素共役である. 上式とその複素共役を足し合わせると,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial X} \right) \left[ \left| \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi \right|^2 \right] \\ & + \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left| \frac{\partial \psi}{\partial X} \right|^2 - \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right|^2 \right] \\ & + \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y} \left[ 2 \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

となる. ここから  $O(\varepsilon^1)$  の項を取り出すのは簡単である. なぜならば, 式 (53) では  $\psi$  が  $\psi^*$  とペアになって,  $e^{i\frac{\omega}{\varepsilon}}$  の部分が消えてしまうからである.  $O(\varepsilon^1)$  の項を取り出し, 波数と振動数で表すと,

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial X} \right) \left[ (k^2 + l^2)^2 \psi_0^2 \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ (k^2 - l^2) \psi_0^2 \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ 2kl\psi_0^2 \right] = 0 \quad (54)$$

となる. 群速度  $C_g$  を用いると, 上式 (54) は

$$\frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (C_{gX} A) + \frac{\partial}{\partial Y} (C_{gY} A) = 0 \quad (55)$$

となる. ただし,

$$A \equiv \frac{1}{2} (k^2 + l^2)^2 \psi_0^2 \quad (56)$$

である.

量  $A$  のような波の振幅の自乗の量を, 波動の強さを表す量という意味で波の活動度という. 式 (55) は波の活動度のフラックスが  $C_g A$  であることを示していて, 波の活動度が群速度によって伝播することを表す.

## 4 定常波の解析

$\delta$  関数型をした地形によって励起される定常波がどのように伝播するのかを解析的に考える.

式 (47) より, 定常波における群速度は

$$C_{gX} = 2\bar{u}^2 k^2, \quad C_{gY} = 2\bar{u}^2 kl, \quad (57)$$

$$|C_g| = \frac{2k}{K_S} |\bar{u}| \quad (58)$$

となる. ただし,  $K_S = \sqrt{k^2 + l^2}$  である. 式 (57) から定常波の群速度は波数ベクトル  $K(k, l)$  に平行で, 西には伝播せず, 東にのみ伝播することがわかる ( $C_{gX} > 0$ ). それを表しているのが図 4.1 である. 式 (57) より

$$(C_{gX} - \bar{u})^2 + C_{gY}^2 = \bar{u}^2 \quad (59)$$

となるので, 図 4.1 のように波は群速度によって半径  $|\bar{u}|$  (平均風の大きさ) の円周上に到達する. 真東向きの波束が最も大きな群速度を持ち, この場合, 真北, 真南には伝播しない.

基本場が  $y$  によらない, つまり  $\bar{u} = \text{一定}$  のもっとも単純な場合を考える. 調べるべき方程式 (32) は

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \left(1 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \frac{\bar{u}}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (32)$$

である. 式 (32) の右辺は外力項であり,

$$\left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \frac{1}{H_0}$$

は基本場におけるポテンシャル渦度で, 外力の大きさを決める. ここでは簡単のために

$$\left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \frac{1}{H_0} = 1 \quad (60)$$

とした. また, 平均風の大きさを  $\bar{u} = 1$  とすると, 式 (32) は

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (61)$$



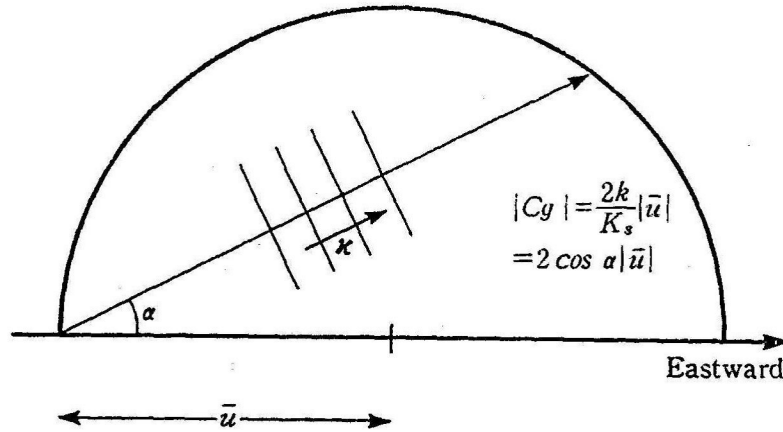


図 4.1 群速度の方向依存性 (林, 1987).

となる.  $\delta$  関数型をしている地形を考えると,

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (62)$$

となる.

新しい空間時間座標  $(X, Y, T)$  を用いて, 定常波の場合における渦度方程式を表すと, 式 (62) より

$$\frac{\partial}{\partial X} (\nabla^2 \psi + \psi + \delta) = 0 \quad (63)$$

となる. 式 (63) と東のみに伝播する群速度の考察から, 点源から東方向に対称性のいい応答が得られる. 波が地形を通過してから有限時間  $\Delta t$  が経過したとすると, 定常解は  $|C_g| \Delta t$  の範囲内で到達されていると考えられる. 例えば, 図 4.2 のように真東に進む波束について考える. 群速度の大きさは式 (58) より

$$|C_g| = 2 |\bar{u}| \quad (64)$$

となるので, 定常波は時間  $\Delta t$  後には  $2 |\bar{u}| \Delta t$  まで進んでいる.

定常ロスビー波を解析的に調べてわかったことを整理すると以下の通りである.

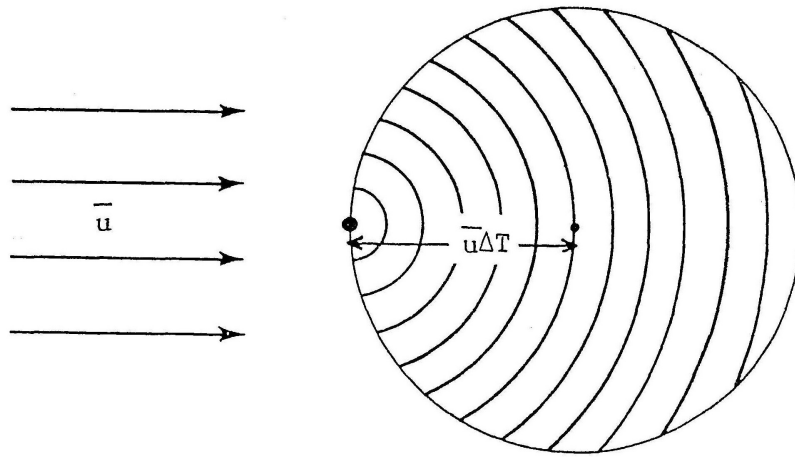


図 4.2 分散関係と式 (63) から考えられる点源によって励起された定常波の応答 (Lighthill, 1966).

- $\delta$  関数型の地形によって励起される定常ロスビー波の応答は群速度によって東 (平均風の方向) にのみ伝播する.
- 等位相線は東方向の円内で現れる.
- 波源の東にできた円の半径は平均風の大きさと経過時間との積で与えられる.
- 定常波は時間  $\Delta t$  後  $|C_g| \Delta t$  まで進んでいる.

これらは数値計算を通して確認する.

## 5 定常波の数値解

さらに詳しくロスビー波の伝播を知るために、渦度方程式を数値的に調べる。

前章と同じ場合を考える。調べるべき方程式は (62) である。

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (62)$$

$\delta$  関数では数値的に計算できないので、式 (62) の右辺を

$$\delta \sim e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}} \quad (65)$$

とし、半径  $r_0 = 1.0$  の等方的なガウス型とする。

Euler 法で式 (62) を書き直すと、

$$\zeta_2 = \zeta_1 - dt \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \quad (66)$$

となる。ここで、 $(\zeta_2 - \zeta_1)/dt$  は渦度の時間変化を表し、ある時点の渦度を  $\zeta_1$ 、微小な時間  $dt$  後の渦度を  $\zeta_2$  とした。SPMODEL(竹広ほか, 2006) を用いて、式 (66) を計算する。

系の設定は以下のようにした。

- 格子点数：東西 64, 南北 64, 等間隔
- 領域：東西 100, 南北 100 (無次元化した距離)
- 切断波数：東西 30, 南北 30
- 外力の中心： $x = 20, y = 50$
- 境界：東西, 南北ともに周期境界

計算結果は図 5.1 - 5.8 である。図 5.1 - 5.4 はそれぞれ  $t = 10, 20, 30, 40$  における渦度  $\zeta$  の応答, 図 5.5 - 5.8 は  $t = 10, 20, 30, 40$  における流線関数  $\psi$  の応答である。

全体の結果をみると、定常波の応答は地形の東方向のみに現れた。定常ロスビー波の等位相線は地形から東方向の円内で現れた。その円の半径は図 4.2 のように (平均風の速度  $\bar{u}$ )  $\times$  (経過した時間) であると考えられる。計算結果は図 5.1 ( $t = 10$  の渦度) の円の半径が 10, 図 5.2 ( $t = 20$  の渦度) では半径が 20 であり、解析解と同じ結果であった ( $t=30, 40$  の場合もそれぞれ半径が 30, 40 であった)。また、ここでの群速度は  $|C_g| = 2|\bar{u}| = 2$  と設定されており、図 5.1 での定常波は東方向に 20, 図 5.2 では 40, 次は 60, 80 ほどと、時間  $\Delta t$  が経過したら地形から東に  $|C_g| \Delta t$  まで進んでいることが確認できた。流線関数の図においても同様であった。

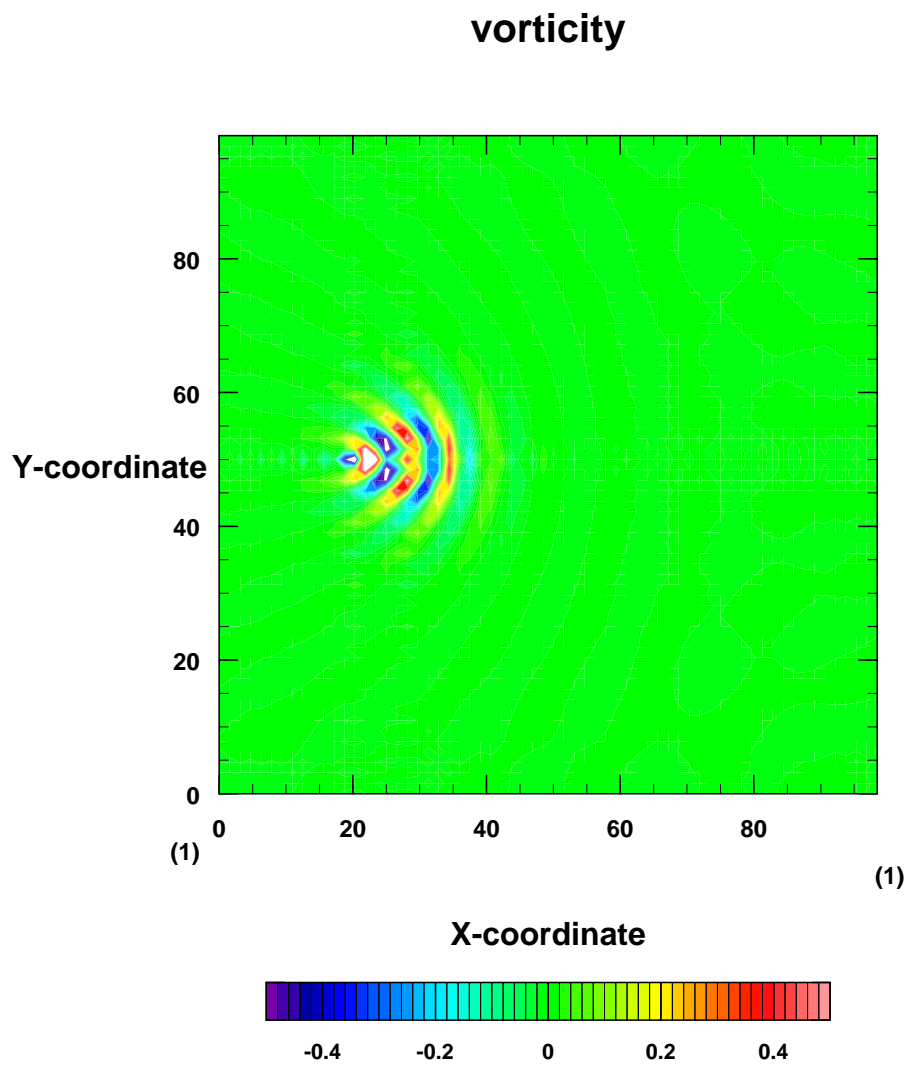


図 5.1  $t = 10$  のときの渦度

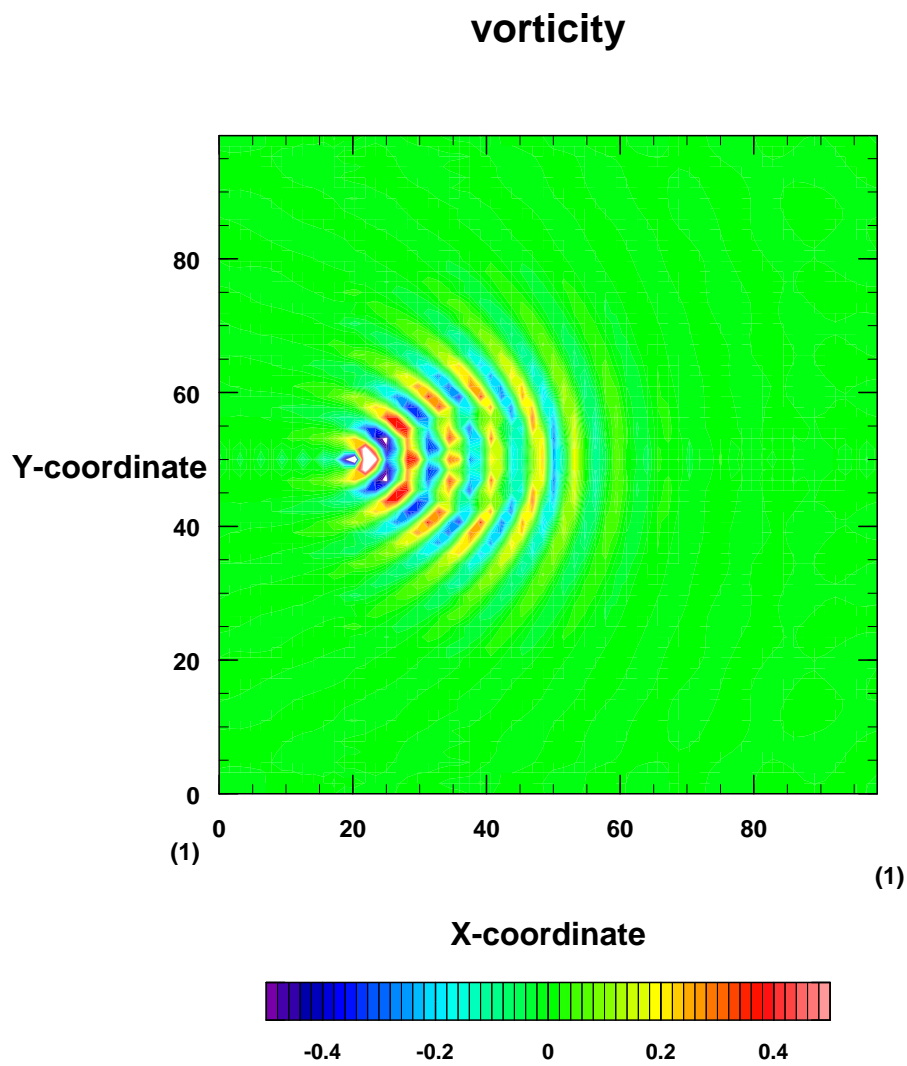


図 5.2  $t = 20$  のときの渦度

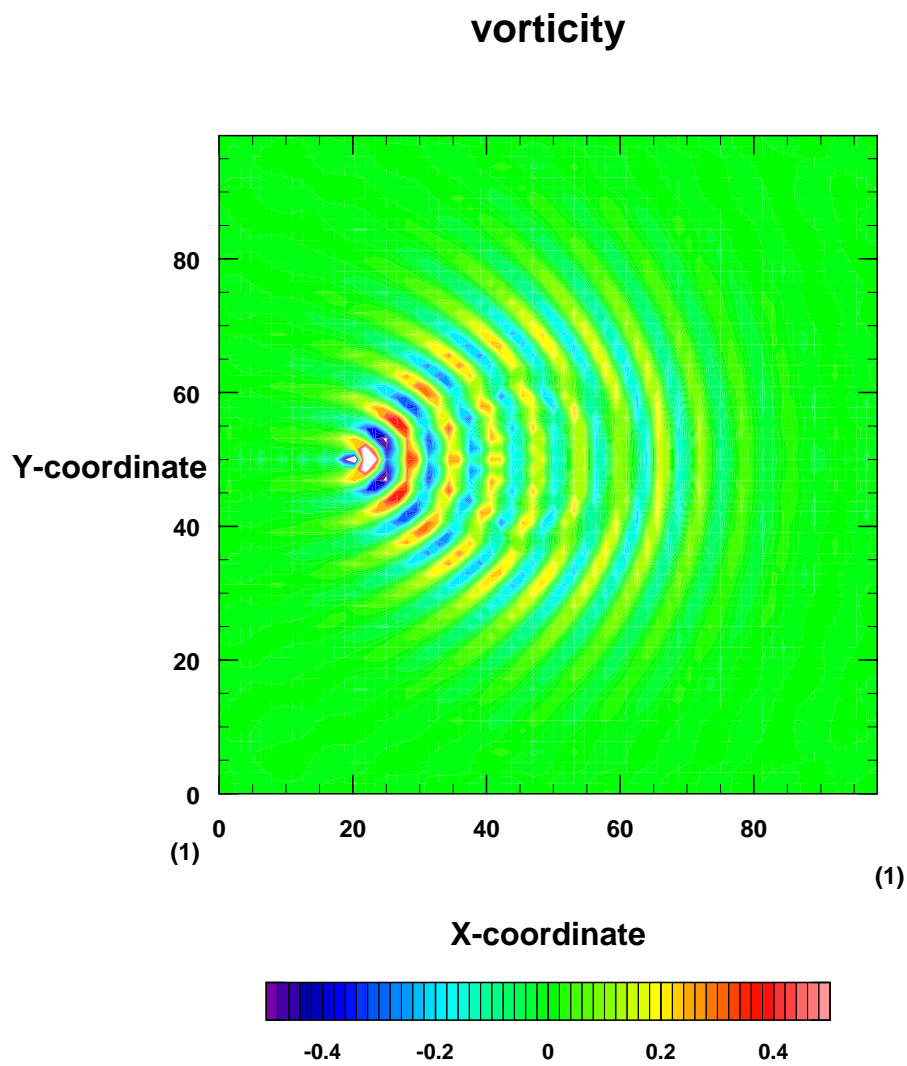


図 5.3  $t = 30$  のときの渦度

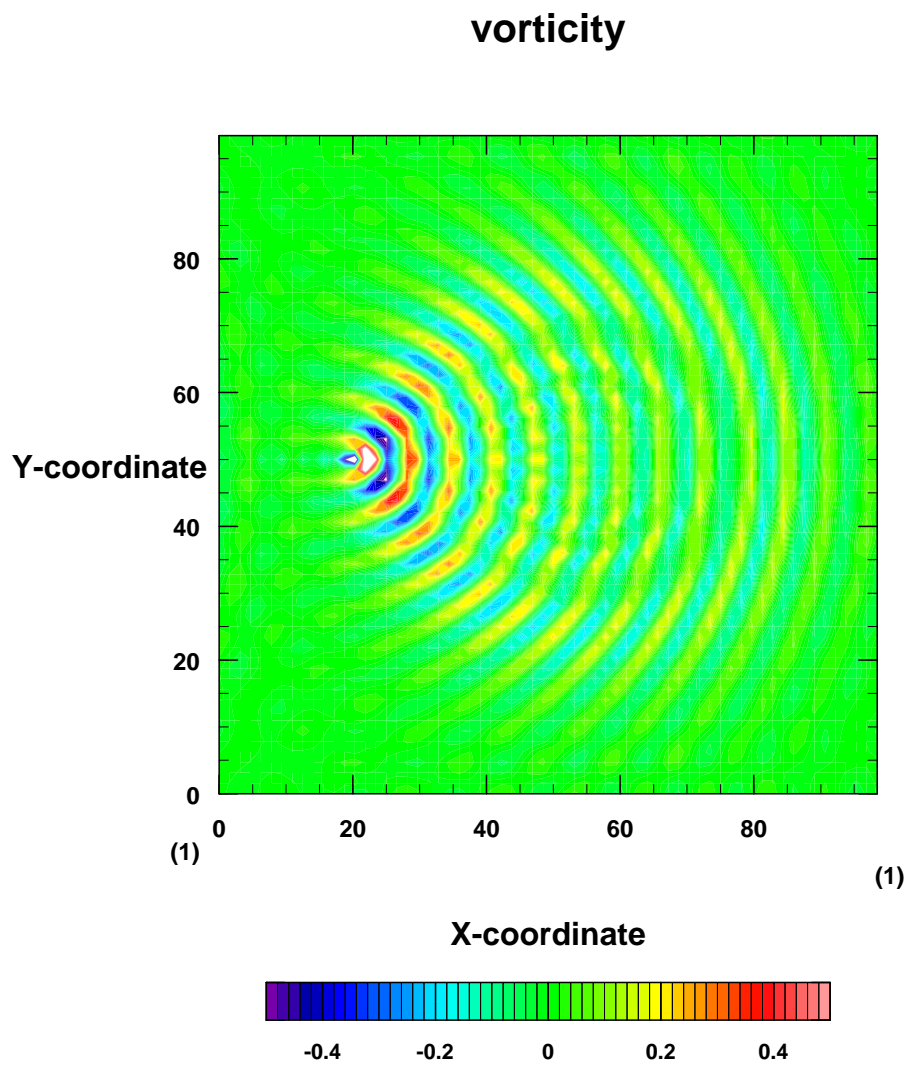


図 5.4  $t = 40$  のときの渦度



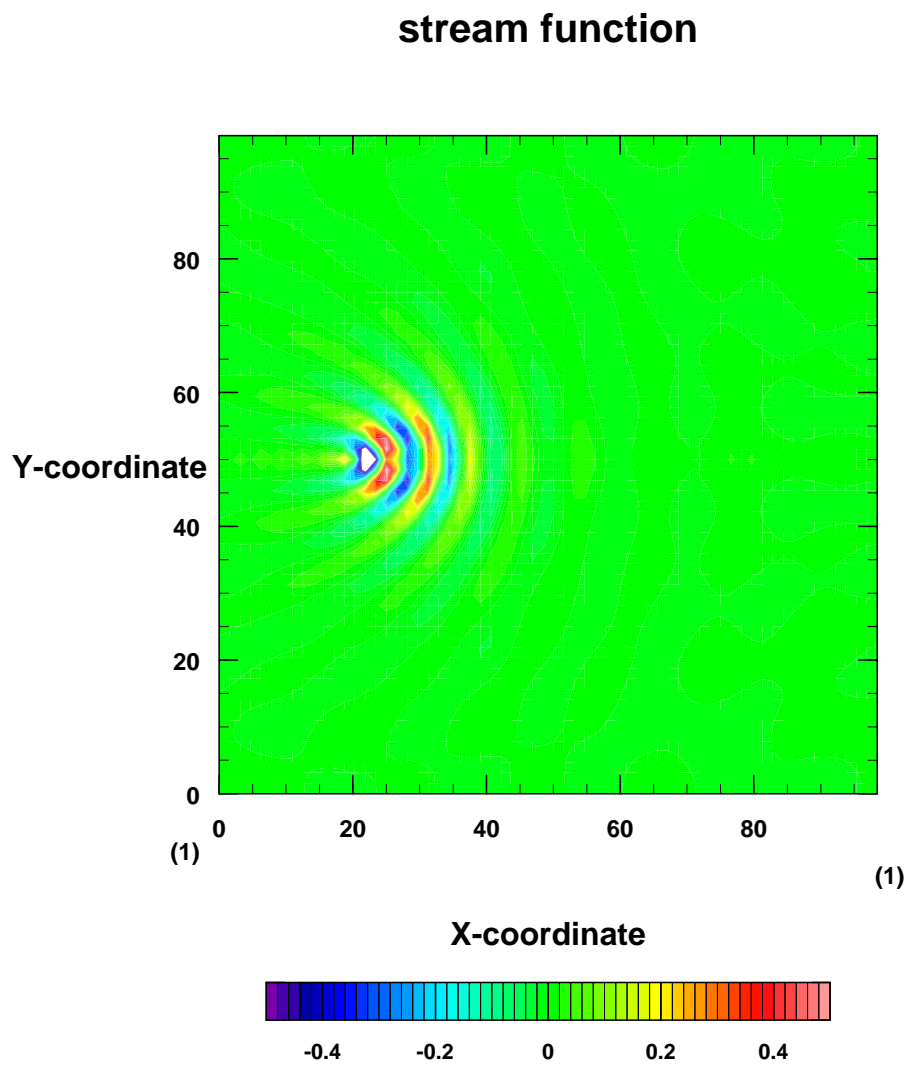


図 5.5  $t = 10$  のときの流線

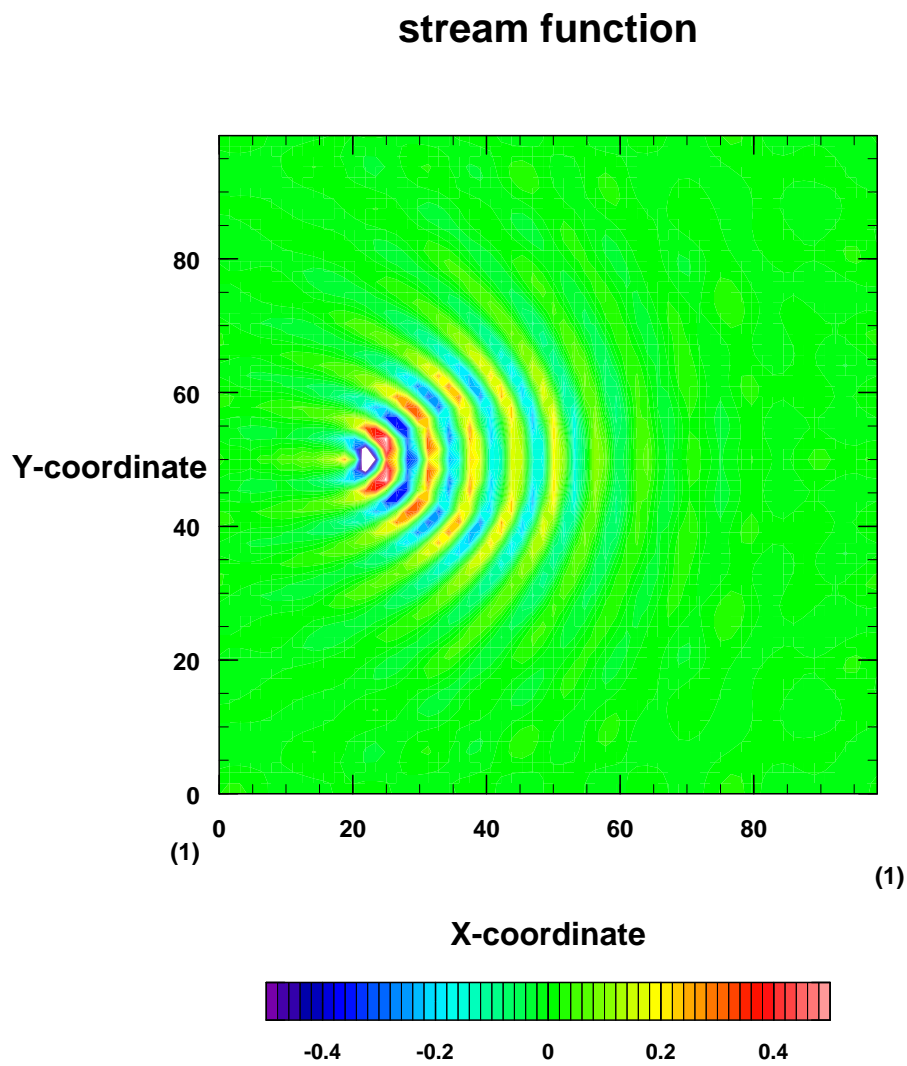


図 5.6  $t = 20$  のときの流線

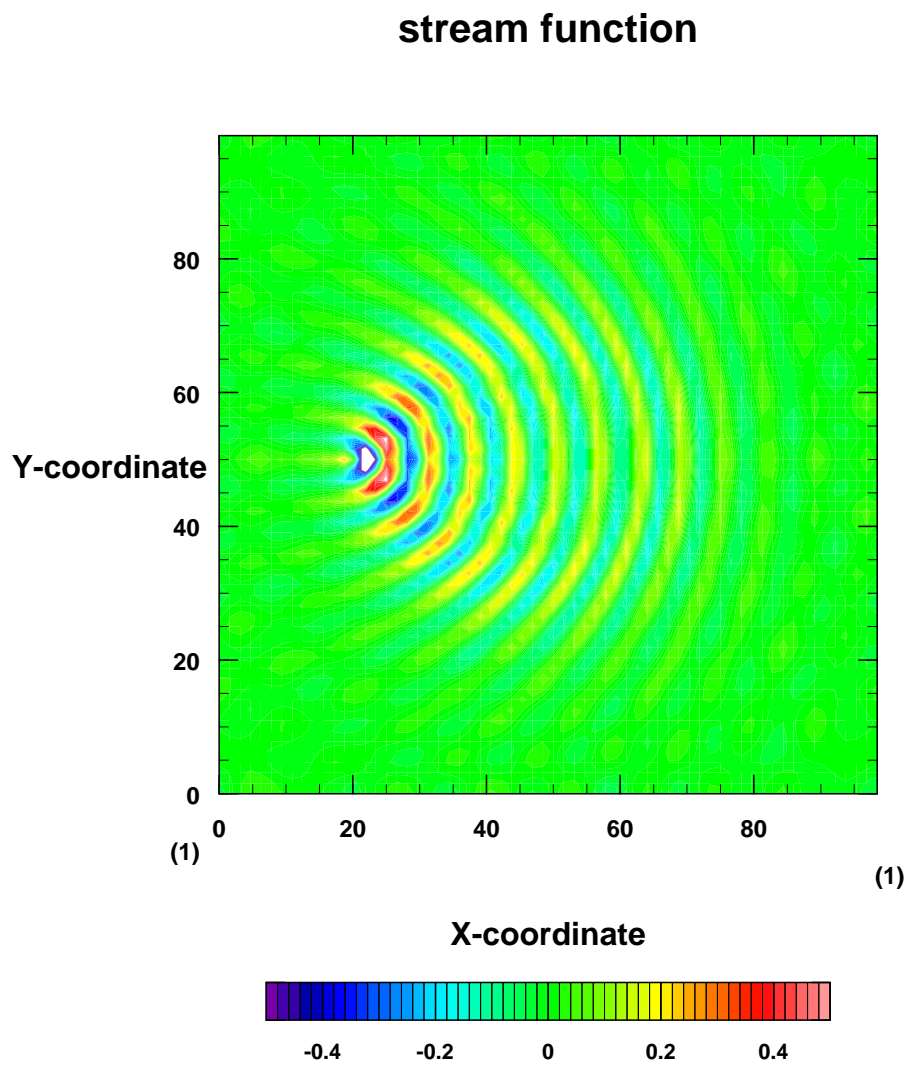


図 5.7  $t = 30$  のときの流線

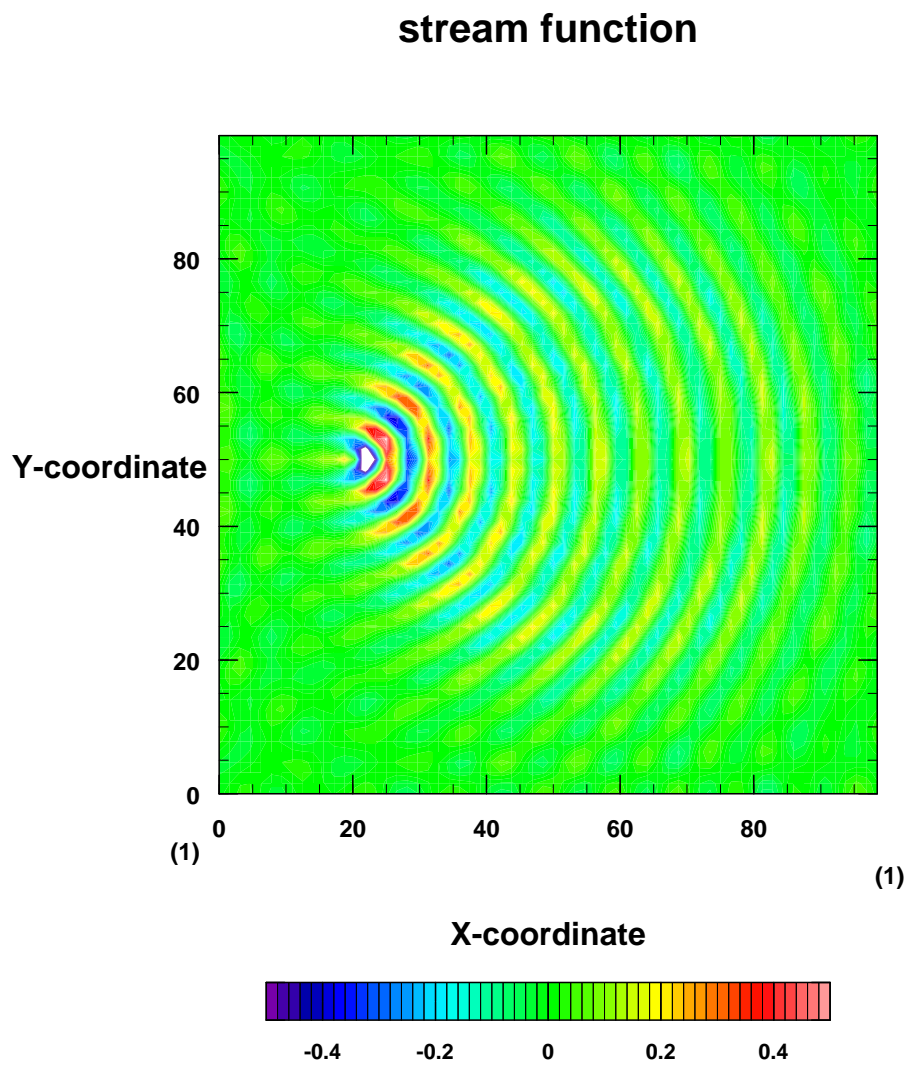


図 5.8  $t = 40$  のときの流線

## 6 まとめ

本論文では林 (1987) に基づき, 定常ロスビー波の伝播について調べた.

数値計算を行い, 定常ロスビー波の伝播を調べた結果, 一様流の中で定常ロスビー波の等位相線は地形から平均風方向の円内で現れることが確認できた. その円の半径は平均風の大きさ $\bar{u}$ と経過時間の積によって与えられた. 時間  $\Delta t$  が経った後には定常波が平均風方向に  $|\bar{u}| \Delta t$  まで進んでいた.

数値計算の結果では, 定常ロスビー波の応答が 相対的に強いところが見られた. 今後は振幅についても議論を行い, 定常ロスビー波の伝播をもっと詳しく調べる必要がある.

## 謝辞

本論文の作成にあたり, 多くの方々の御指導, 御協力を頂きました.

指導教官である林祥介教授には研究テーマと方針を頂きました. 佐々木洋平さんにはプログラムの作成から論文の修正まで多くの助言を頂きました. 岩山隆寛准教授, 高橋芳幸さん, 森川靖大さんには図の修正などの助言を頂きました. 研究室の方々をはじめ, 御協力頂いた皆様に深く感謝いたします.

## 参考文献

- Grose, W. L. and Hoskins, B. J., 1979: On the influence of orography on large-scale atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 223–234.
- Lighthill, M. J., 1966: Dynamics of rotating fluids: a survey. *J. Fluid Mech.*, **26**, 411–431.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics. 2nd Edition*. Springer-Verlag, 770pp.
- 浅井富雄, 新田尚, 松野太郎, 2000: 基礎気象学. 朝倉書店, 97–100.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 53–60.
- 兼成智久, 2007: 定常ロスビー波の球面伝播. 卒業論文, 北海道大学理学部地球科学地球物理学専攻.
- 岸保助三郎, 佐藤信夫, 1986: 新しい気象力学. 東京堂出版, 53–55.
- 高橋こう子, 2002: 二次元定常ロスビー波の伝播. 卒業論文, 北海道大学理学部地球科学地球物理学専攻.
- 竹広真一, 小高正嗣, 石岡圭一, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2006: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 spmodel. ながれマルチメディア, <http://www.nagare.or.jp/mm/2006/spmodel>.
- 林祥介, 1987: 二次元定常ロスビー波の線形論. 気象研究ノート, **156**, 235–254.
- 林祥介, 1992: 線型波動の基礎. GFD ノート.
- 松井考典, 松浦充宏, 林祥介, 寺沢敏夫, 谷本俊郎, 唐戸俊一郎, 1996: 地球連続体力学. 岩波書店, 80–85.
- 余田成男, 2002: 気象学 I. <http://www.gfd-dennou.org/seminars/gfdsemi/2002-03-25/yoden/note/dyn-met-C9/pub/dyn-met-C9.pdf>.