

大気主成分の凝結を考慮した火星大気 非静力学モデルの開発

**Development of a nonhydrostatic model for
Martian atmosphere including condensation of
major atmospheric component**

北守 太一

Kitamori Taichi

**北海道大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
地球流体力学研究室**

2006/01/27

要旨

本研究では大気主成分の凝結を考慮した火星大気非静力学モデルを開発し、大気主成分の凝結が起きた時の流れ場の様子がどうなるかをサーマルの上昇実験を行うことで調べた。

支配方程式として大気の密度変化を表現できる準圧縮方程式を採用した。この方程式に大気主成分の凝結による効果を加えた。多くの地球大気非静力学モデルの場合、凝結の効果は潜熱による温度変化のみを考慮する。大気主成分の凝結を考える場合はこれに加えて潜熱に伴う熱膨張および大気質量の減少による圧力変化も考慮する必要がある。

凝結量および雲粒の落下量の表現は1個の雲粒の拡散成長を考えることで定式化した。地球大気非静力学モデルでは凝結量および雲粒の落下量を近似的に診断量として表現している。しかし、火星大気ではその近似が成り立つかどうかはわからなかったため、凝結量および雲粒の落下量の時間発展を計算する必要がある。凝結量は雲粒の拡散成長を用いて表現した。雲粒の落下量の扱いについて考えるために凝結量の式から生成される雲粒の半径のスケールを見積もり、さらにその値から雲粒の落下速度を見積もった。見積もられた雲粒の落下速度は、風速に比べて十分小さい値であった。従って、本モデルでは雲粒の落下量は無視した。また、凝結量の式を用いて凝結の時間スケールを見積もった。

時間方向の離散化にはモード別時間分割法を用い、重力波モードは長い時間ステップで計算し音波モードは短い時間ステップで計算した。凝結に関連する項は見積もられた凝結の時間スケールから短い時間ステップで計算する必要があることがわかった。この考察をもとにして方程式の離散化を行った。

湿潤大気の計算を行う前に乾燥大気モデルのテスト計算を行った。行ったテスト計算は個々の物理過程の動作チェックのための計算と Odaka et al. (1998) の一樣冷却と地表面熱フラックスによって駆動される乾燥対流の計算である。

開発されたモデルを用いてサーマルの上昇実験を行った。具体的には大気下部にサーマルを置いて、浮力で上昇させた時に形成される二酸化炭素氷雲の成因およびそれによって発生する流れ場のパターンを調べた。臨界飽和比の値を変えて計算を行った。計算の結果、サーマルの上部で飽和比の値が大きくなり雲が形成された。この部分では温度低下の効果と圧力上昇の効果の2つが確認できた。また、臨界飽和比の値が1.1の場合は物理量の分布のパターンが臨界飽和比の値が1の場合とだいたい同じになったのに対して、臨界飽和比の値が1.35の場合は臨界飽和比の値が1の場合と比べて異なる結果を得た。

目次

第1章 はじめに	2
第2章 支配方程式	4
2.1 大気主成分の凝結を考慮した準圧縮方程式	4
2.2 乱流のパラメタリゼーション	6
2.2.1 乱流拡散	6
2.2.2 地表面フラックス	7
2.3 境界条件	7
第3章 雲物理のパラメタリゼーション	8
3.1 単位時間単位体積当たりの凝結量の取り扱い	9
3.2 拡散成長による凝結の時間スケールおよび生成される雲粒半径のスケールの見積もり	10
3.3 単位時間単位体積当たりの雲粒落下量の扱い	13
第4章 離散化	15
4.1 空間方向の離散化	15
4.2 時間方向の離散化	15
第5章 乾燥大気モデルのテスト計算	17
5.1 モデルに含まれる物理過程のチェック	17

5.1.1 音波の計算	18
5.1.2 音波減衰項の評価	20
5.1.3 スカラー移流の計算	20
5.1.4 サーマルの計算及び数値粘性項の評価	23
5.1.5 乱流拡散の計算	25
5.1.6 一様冷却の計算	28
5.1.7 地表面熱フラックスの計算	31
5.1.8 地表面運動量フラックスの計算	33
5.2 Odaka <i>et al.</i> (1998) の再計算	35
 第6章 主成分凝結大気におけるサーマル上昇実験	42
6.1 凝結のみ考慮した場合の計算	42
6.1.1 凝結計算の整合性のチェック	45
6.1.2 凝結の時間スケール	48
6.2 凝結と音波のみを考慮した場合の計算	49
6.3 サーマルの計算	51
 第7章 まとめ	72
 付録A 定式化についての補遺	74
A.1 圧力方程式の導出	74
A.2 準圧縮方程式におけるエネルギー方程式	75
A.3 雲粒の拡散成長の式の導出	77
 付録B 縮散化の詳細	80

B.1 空間方向の離散化	80
B.1.1 平均操作	80
B.1.2 空間微分の離散化	82
B.1.3 運動方程式	83
B.1.4 圧力方程式	83
B.1.5 熱力学方程式	84
B.2 時間方向の離散化	84
B.2.1 運動方程式と圧力方程式	84
B.2.2 凝結物質保存の式	89
B.2.3 熱力学の式	89
B.3 数値粘性項	90
B.4 音波減衰項	90
B.5 Asselin の時間フィルタ	90

付録 C 飽和領域を含む場合における温度および圧力の鉛直分布の計算方法 92

第1章 はじめに

火星大気は大部分が二酸化炭素から構成される。火星極域ではこの大気主成分である二酸化炭素が凝結することがわかっている。電波掩蔽観測から得られた鉛直温度分布によると極域では大気中で凝結温度になっている領域が存在する (Colaprete *et al.*, 2003)。このことから極域の大気中では二酸化炭素の凝結が起きて雲ができることがあることが考えられる。さらに、得られた鉛直温度分布の中には過飽和状態になっている領域がある場合もあった。地球の場合、過飽和度は 1 % 以下であるのに対して、火星ではかなり高い過飽和状態が実現しうる場合があると考えられている。Wood (1998) は理論的見地から 10 % 以下の過飽和度で凝結が起きると見積もった。これに対し Glandorf *et al.* (2002) は実験により 35 % の過飽和度が必要であると述べている。しかし、二酸化炭素が凝結を起こす過飽和度が実際にどのくらいであるかはまだはっきりとはわかっていない。

火星極域では二酸化炭素氷できた雲が観測されている。Mars Orbiter Laser Altimeter (MOLA) によって雲頂から反射されたレーザーパルスが観測されており、温度、圧力分布からこの雲が二酸化炭素氷からできていると考えられている。Colaprete *et al.* (2003) は観測された雲が地形性の波によるものかどうかを調べるために線形の山岳波モデルと雲微物理モデルを組み合わせて数値シミュレーションを行った。また、Tobie *et al.* (2003) は同様の目的のために 2 次元非弾性モデルと簡単な雲微物理モデルを組み合わせて数値シミュレーションを行った。

一方、過去の火星では二酸化炭素氷雲の温室効果により温暖な気候が実現していたのではないかという問題がある。過去の研究では鉛直 1 次元モデルを用いているため、雲の水平構造には着目していない。しかし、二酸化炭素氷雲の温室効果を定量的に理解するためにはこの雲の水平構造も考慮しなくてはならない。水平構造を知るために流れ場のパターンを知っていなくてはならない。

流れ場の性質について理解するための有力な方法のひとつは非静力学モデルを用いた数値計算である。非静力学モデルは鉛直方向の運動方程式を静水圧平衡の式で近似しないモデルである。鉛直方向の速度を陽に解くため、鉛直対流の計算に適している。これまでにいくつかの火星大気非静力学モデルが開発してきた (Odaka

et al.., 1998; Rafkin *et al.*., 2001; Tobie *et al.*., 2003; Toigo *et al.*., 2003). しかし、これらのモデルでは火星大気の特徴である大気主成分が凝結するという効果が考慮されていない。これはこれらのモデルが地球大気で使われてきた非静力学モデルのパラメータや放射過程を火星用に変えることで作られているが、地球大気では凝結するのは微量成分であることによる。

本研究の目的は大気主成分の凝結を考慮した非静力学モデルの開発を行い、大気主成分の凝結が起きた際にどのような流れが起きるかを知ることである。開発されたモデルを用いてプリュームの上昇実験を行う。具体的には現在の火星極域を想定した鉛直温度分布を与え、ひとつのプリュームを地面から浮力で上昇させ、凝結高度に達して雲が生成されるまでを計算した時、流れ場の様子がどのようになるかを調べる。

第2章では大気主成分の凝結を考慮した非静力学モデルの支配方程式について説明する。第3章では本モデルにおける雲物理のパラメタリゼーションについて説明する。第4章ではモデルの離散化について説明する。第5章では開発したモデルを用いて行った乾燥大気のテスト計算について説明する。第6章では凝結大気のサマル上昇実験について説明する。第7章で本論文の内容のまとめを行う。

第2章 支配方程式

この章ではモデルの支配方程式について説明する。用いる支配方程式は大気主成分の凝結を考慮した準圧縮方程式である。多くの地球大気非静力学モデルにおいて凝結を考慮する場合は潜熱による温位変化のみ考慮する。一方、大気主成分の凝結を考慮する場合は潜熱に伴う熱膨張および大気質量の減少による圧力変化も考慮する。

2.1 大気主成分の凝結を考慮した準圧縮方程式

大気主成分の凝結が起こると、大気密度が低下する。このことを考慮して、本モデルで密度の時間変化を陽に表現することが可能な弾性系モデルを採用する。弾性系モデルは連続の式で密度の時間変化項を考慮するモデルである。弾性系モデルはさらに線形化した連続の式を用いる準圧縮方程式と近似しない連続の式を用いる完全圧縮方程式に分類することができる。本モデルでは準圧縮方程式を採用する。準圧縮方程式を用いると時間積分に第4章で述べるモード別時間分割法を使うことができ、計算コストを下げることができる。座標系は (x, z) で表される2次元直交直線座標系を考える。2次元モデルは3次元モデルに比べて計算コストが低い。第5章で行うようなパラメータ実験を行う場合には2次元の方が適している。

準圧縮方程式では物理量 ϕ を基本場 $\bar{\phi}$ とそのずれである擾乱場 ϕ' に分離する。基本場は静止状態で水平一様であるとする。基本場の圧力は静水圧平衡の式

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで p は、 ρ は密度、 g は重力加速度である。速度 $\mathbf{u} = (u, w)$ および雲密度 ρ_s の基本場成分は0である。従って表記の簡略化のため以下では擾乱場の速度および雲密度をそれぞれ u, w, ρ_s で表す。

大気主成分の凝結を含む準圧縮方程式は以下のように記述される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla u - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla w - c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + D_w + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial t} = -\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\theta} u) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right] + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \frac{d\theta'}{dt} - \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}} M_{cond}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \theta' - w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}) + M_{cond} + M_{fall}. \quad (2.6)$$

$\mathbf{u} = (u, w)$ は速度, Π はエクスナー関数, ρ は大気密度, ρ_s は雲の密度, θ は温位, T は温度, c_p は定圧比熱, g は重力加速度, c は音速である. $D_u, D_w, D_{\rho_s}, D_\theta$ は乱流拡散項, Q_{cond} は潜熱項, Q_{rad} は放射加熱項, Q_{dis} は散逸加熱項である. M_{cond} は単位時間単位体積あたりの凝結量, M_{fall} は単位時間単位体積あたりの雲粒の落下量である.

地球大気で用いられる準圧縮方程式と異なるのは圧力方程式 (2.4) である(導出については A.1 節を参照). 大気主成分の凝結を考慮した場合の圧力方程式と地球大気のそれとの間で異なる点は 2 つある. 1 つめは (2.4) 右辺第 3 項に大気質量の減少を表す項が入っていることである. 2 つめは圧力方程式 (2.4) 右辺第 2 項に熱膨張項が入っていることである. 地球大気のモデルではしばしばこの熱膨張項は省略し $d\theta/dt = 0$ とする. しかし, 大気主成分が凝結する場合, 潜熱による熱膨張項が無視できない程の凝結が起きる可能性があるため熱膨張項を無視しない. 単位時間単位体積あたりの凝結量 M_{cond} の具体的な形は第 3 章で与える. 热膨張項は潜熱による効果のみを考慮し,

$$\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \frac{d\theta'}{dt} = \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} Q_{cond} \quad (2.7)$$

と表す. 潜熱以外による効果は地球大気のモデルと同様に無視する.

次に熱力学の式 (2.5) 中の $Q_{cond}, Q_{dis}, Q_{rad}$ について述べる. 潜熱項 Q_{cond} は

$$Q_{cond} = \frac{LM_{cond}}{c_p \bar{\rho}} \quad (2.8)$$

と表す. L は潜熱である. 散逸加熱項 Q_{dis} の表し方については次節で扱う. Q_{rad} は実験設定に応じてパラメータとして与える.

2.2 乱流のパラメタリゼーション

2.2.1 乱流拡散

乱流拡散項の表現と乱流拡散係数の計算は Klemp and Wilhelmson (1978), CReSS (坪木と榎原, 2001) と同様に行う.

乱流拡散項 D_u, D_w, D_θ はそれぞれ

$$D_u = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{2}{3} K_m \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} E \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[-K_m \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$D_w = -\frac{\partial}{\partial x} \left[-K_m \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{2}{3} K_m \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2}{3} E \right] \quad (2.10)$$

$$D_\theta = -\frac{\partial}{\partial x} \left[K_h \frac{\partial \theta'}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[K_h \frac{\partial (\theta' + \bar{\theta})}{\partial z} \right] \quad (2.11)$$

と表される. ここで, K_m, K_h はそれぞれ運動量, 熱に対する乱流拡散係数で

$$K_h = 3K_m \quad (2.12)$$

とする. E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギーで

$$E = \left(\frac{K_m}{C_m l} \right)^2 \quad (2.13)$$

で与えられる. ここで, C_m はパラメータで $C_m = 0.2$, l は混合距離で $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ と与える. $\Delta x, \Delta z$ はそれぞれ水平, 鉛直方向の格子間隔である.

乱流拡散係数の値は以下の時間発展方程式を解いて決める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_m}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial K_m}{\partial x} + w \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\bar{\theta}} \frac{\partial \theta'}{\partial z} \\ &\quad + C_m^2 l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad - \frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2l^2} K_m^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

散逸加熱項 Q_{dis} は

$$Q_{dis} = \frac{1}{c_p} \frac{C_\varepsilon}{l} \frac{K_m^3}{(C_m l)^3} \quad (2.15)$$

と与える。

2.2.2 地表面フラックス

地表面からの熱フラックス F_h および運動量フラックス F_m はバルク法により

$$F_h = c_D c_p \bar{\rho} |u_1| (T_g - T_1), \quad (2.16)$$

$$F_m = -c_D \bar{\rho} |u_1| u_1 \quad (2.17)$$

で計算する。ここで c_D はバルク係数, u_1 はモデル最下層の水平速度, T_1 はモデル最下層の温度, T_g は地表面温度である。本モデルでは熱フラックスと運動量フラックスに対するバルク係数は同じであるとし, さらにその値は一定であるとしている。

2.3 境界条件

水平方向の境界では周期境界条件を与える, 鉛直方向の境界では free-slip 境界条件を与える。

また本モデルでは, 上部境界での波の反射を抑えるために, 任意の厚さのスponジ層を導入することができる。これは任意の変数の擾乱成分 ϕ' の時間発展方程式方程 $\partial\phi'/\partial t = F_\phi$ に対し

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} = F_\phi - \gamma\phi' \quad (2.18)$$

というような減衰項を加えることで与えられる。ここで γ は z の関数で

$$\gamma = \begin{cases} 0 & z < z_{low}, \\ \sigma \left\{ 1 - \cos \left(\pi \frac{z - z_{low}}{z_{top} - z_{low}} \right) \right\} & z \geq z_{low} \end{cases} \quad (2.19)$$

で与えられる。 σ は減衰の強さを示す定数である。この逆数 $1/\sigma$ は波の振幅が $1/e$ になるまでの時間を表しており e -folding time と呼ばれる。

第3章 雲物理のパラメタリゼーション

この章では単位時間単位体積当たりの凝結量 M_{cond} および単位時間単位体積当たりの雲粒の落下量 M_{fall} の表し方について述べる。

地球大気の非静力学モデルで用いられている凝結量の表現は凝結は瞬時に起こるものとして考えている、しかし、火星大気で瞬時に凝結が起こるかどうかはわからない。

そこで、拡散成長を仮定して単位時間単位体積あたりの凝結量 M_{cond} を表す。ここでは簡単のため雲粒の併合成長は考慮しない。Tobie *et al.* (2003) によると可視光に対し光学的厚さが 0.1 程度になる火星大気としては標準的な凝結核数密度を考慮した場合、 $50\mu\text{m}$ 程度の雲粒が併合成長によりできるまでに要する時間は拡散成長によるそれに比べて十分小さい。

上記の方法で表された M_{cond} の式を用いて静的な状態の大気中でどの程度の大きさの雲粒が生成されるかを考える。その大きさの値を用いて単位質量単位時間あたりの落下量 M_{fall} の扱いを考える。

火星大気の場合、考える雲物理過程は二酸化炭素大気と二酸化炭素氷雲の変換のみである。

核形成には大気中に存在する微粒子などの不純物の影響を受ける不均一核形成とその影響を受けない均一核形成の 2 種類がある。地球では大気中に浮遊するエアロゾルを凝結核として不均一核形成が起きている。火星大気中では大気中にダストや氷雲粒が浮遊しておりこれが地球におけるエアロゾルと同じような働きをすることにより不均一核形成が起きると考えられる。従って本モデルでは核形成として不均一核形成を考える。なお、本モデルでは単位質量大気あたりに含まれる凝結核の個数は一様であると仮定する。

雲粒の成長過程にはまわりの大気の拡散によって成長する拡散成長と雲粒が合体

することによって成長する併合成長がある。本モデルでは併合成長による雲粒の成長過程を無視し、雲粒は拡散成長によってのみ成長すると仮定する。

3.1 単位時間単位体積当たりの凝結量の取り扱い

ここでは単位時間単位体積あたりの凝結量 M_{cond} の表しかたについて述べる。モデル格子内に含まれる雲粒の半径は全て同じであると仮定する。雲粒は凝結核を核として形成され、雲粒も凝結核も球形であると仮定する。この時、

$$\frac{4}{3}\rho_I\pi(r_d^3 - r_{aero}^3)N = \rho_s \quad (3.1)$$

となる。 r_d は雲粒半径、 ρ_I は二酸化炭素氷の密度、 N は単位体積当たりの凝結核数密度、 r_{aero} は凝結核の半径で定数である。さらに、簡単のため雲粒の球形効果による平衡蒸気圧の変化は考えない。

いま、雲粒が拡散成長で大きくなる場合を考える。この時、単位時間単位体積当たりの凝結量は

$$M_{cond} = \frac{4\pi r_d N}{R_h + R_m}(S - 1) \quad (3.2)$$

で表される（この式の導出については付録 A.3 を参照）。 S は飽和比で

$$S = \frac{p}{p_*} \quad (3.3)$$

と表される。 p は圧力、 p_* は飽和蒸気圧である。 R_m 、 R_h はそれぞれ質量輸送、熱輸送に関する係数で

$$R_h = \frac{L^2}{kRT}, \quad (3.4)$$

$$R_m = \frac{RT}{Dp_*} \quad (3.5)$$

と表される。 k は熱拡散係数、 D は分子拡散係数、 R は大気の気体定数である。 R_m は Tobie *et al.* (2003) と同様に無視して

$$M_{cond} = \frac{4\pi r_d N}{R_h}(S - 1) \quad (3.6)$$

と表す。

二酸化炭素の飽和蒸気圧は Antoine の式

$$\ln p_* = A - \frac{B}{T - C} \quad (3.7)$$

で決める。二酸化炭素の場合、 $A = 27.4 \text{ Pa}$, $B = 3103 \text{ K}$, $C = -0.16 \text{ K}$ とする(化学工学会, 1999)。ここでは $O(T) \sim 100 \text{ K}$ であるため $C \sim 0$ とする。

クラウジウス-クラペイロンの式

$$\frac{dp_*}{dT} = \frac{Lp_*}{RT^2} \quad (3.8)$$

に (3.7) を代入すると潜熱 L に対する関係式は

$$L = BR \quad (3.9)$$

と与えられる。

3.2 拡散成長による凝結の時間スケールおよび生成される雲粒半径のスケールの見積もり

拡散成長による凝結の時間スケールおよび生成される雲粒半径のスケールをそれぞれ飽和比の時間変化の式、雲粒半径の時間変化の式を用いて見積もる。凝結の時間スケールは後述の離散化の議論でも触れるようにモード別時間分割法を用いた時間積分を行う際に必要になる。また雲粒の半径のスケールは次節で雲粒の落下速度を見積もるために必要になる。

飽和比 S は飽和蒸気圧の式 (3.7) および理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$ を代入すると

$$S = \frac{\rho RT}{\exp\left(A - \frac{B}{T}\right)} - 1 \quad (3.10)$$

となる。 S は ρ および T の関数であるから S の時間変化は

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial \rho} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.11)$$

と書くことができる。この式に (3.10) を代入すると

$$\frac{dS}{dt} = S \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \left(1 - \frac{B}{T}\right) \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \right\} \quad (3.12)$$

となる。

ここで飽和比 S の時間変化を M_{cond} を用いて表現する。式(2.6)で静止状態を考え、 $d\rho = -d\rho_s$ を代入すると

$$\frac{d\rho}{dt} = -M_{cond} \quad (3.13)$$

となる。また温度は潜熱のみによって変化する場合を考えているから $dT/dt = Q_{cond}$ である。式(2.8)を代入すると

$$\frac{dT}{dt} = \frac{LM_{cond}}{c_p \rho} \quad (3.14)$$

となる。よって

$$\frac{dS}{dt} = S \left\{ -1 + \left(1 - \frac{B}{T}\right) \frac{L}{c_p T} \right\} \frac{M_{cond}}{\rho} \quad (3.15)$$

となる。中括弧の中の第1項は凝結に伴う気体成分の減少、第2項は潜熱による熱膨張、第3項は潜熱による飽和蒸気圧の変化による過飽和度の変化をそれぞれ表している。

次に雲粒半径の時間変化の式を導出する。式(2.6)で静止状態を考え、(3.1)を代入すると以下の雲粒半径の時間変化の式を得る。

$$\frac{dr_d}{dt} = \frac{M_{cond}}{4\pi\rho_I r_d^2 N}. \quad (3.16)$$

式(3.15)および(3.16)をそれぞれ時間積分して凝結の時間スケールおよび生成される雲粒のスケールを見積もる。式(3.15)および式(3.16)を前進差分で離散化すると

$$S^{t+\Delta t} = S^t + S^t \left\{ -1 + \left(1 - \frac{B}{T}\right) \frac{L}{c_p T} \right\} \frac{M_{cond}^t}{\rho} \Delta t \quad (3.17)$$

$$r_d^{t+\Delta t} = r_d^t + \frac{M_{cond}^t}{4\pi\rho_I r_d^{t2} N} \quad (3.18)$$

$$M_{cond}^t = \frac{4\pi r_d^t}{R_h} (S^t - 1) \quad (3.19)$$

となる。この式を S が 1 になるまで計算を行い、 S の時間変化の様子から凝結の時間スケールを見積もる。初期の飽和比は $S = 1.35$ とし、単位質量当たりの大気に含まれるダストの数密度 $N' = \rho N$ の値が $5.0 \times 10^7 \text{ kg}^{-1}$, $5.0 \times 10^8 \text{ kg}$, $5.0 \times 10^9 \text{ kg}$ の3通りについて計算を行った。これはダストの光学的厚さが 0.01, 0.1, 1 とした場合に相当する (Tobie *et al.*, 2003)。

計算結果を図 3.1 に示す。この図から凝結の時間スケールは 1–20 秒程度と見積もられる。また、雲粒半径は 5–25 μm 程度と見積もられる。

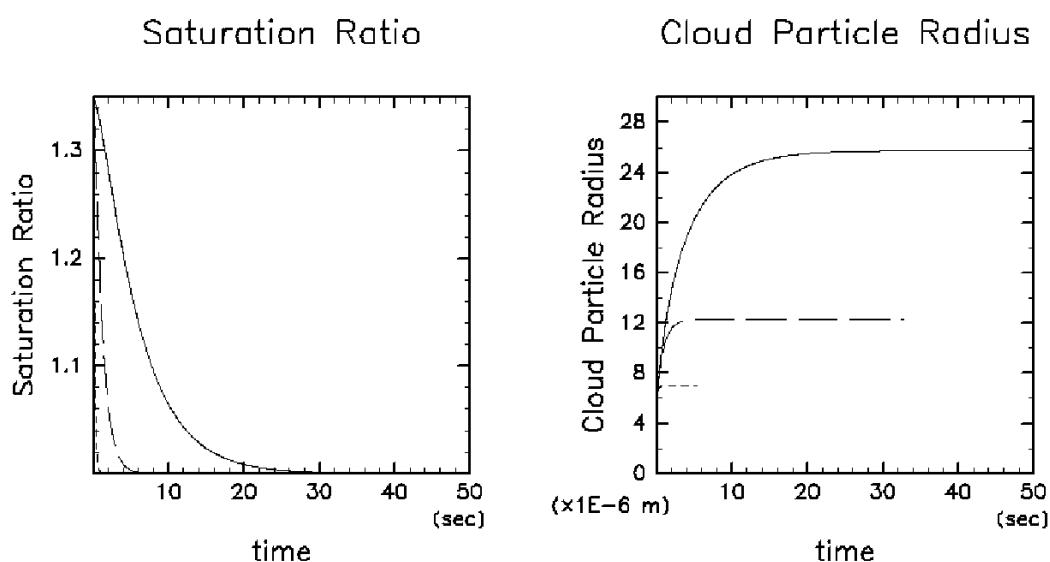


図 3.1: (左) 飽和比の時間変化. (右) 雲粒半径の時間変化. 雲粒半径の値は飽和比の時間変化から計算される. それぞれ実線は $N'_{aero} = 5.0 \times 10^7 \text{ kg}^{-1}$, 破線は $N'_{aero} = 5.0 \times 10^8 \text{ kg}^{-1}$, 点線は $N'_{aero} = 5.0 \times 10^9 \text{ kg}^{-1}$.

3.3 単位時間単位体積当たりの雲粒落下量の扱い

前節で求めた雲粒半径のスケールを用いて雲粒の落下速度を見積もり、単位時間単位体積当たりの雲粒落下量 M_{fall} を見積もる。

雲粒は終端速度で落下していると仮定すると、雲粒にかかる力の釣り合いは

$$\frac{4}{3}\pi r_d^3(\rho_I - \rho)g = F \quad (3.20)$$

で表される。ここで F は雲粒の受ける抵抗力である。気体の密度は固体のそれに比べ十分に小さいとして、 $\rho_I \gg \rho$ を仮定すれば

$$\frac{4}{3}\pi r_d^3\rho_I g = F \quad (3.21)$$

と近似される。

抵抗力はストークスの法則より

$$F = \frac{6\pi\eta r_d U}{1 + 1.255\frac{\lambda}{r_d}} \quad (3.22)$$

で表される。ここで η は大気の動粘性率、 λ は大気を構成する分子の平均自由行程で

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\eta}{\eta_0} \frac{p_0}{p} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (3.23)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda_0 = 6.62 \times 10^{-8} \text{ m}$, $\eta_0 = 1.818 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$, $p_0 = 1.013 \times 10^3 \text{ hPa}$, $T_0 = 293.15 \text{ K}$ である。 (3.22) を (3.21) に代入すると

$$U = \left(1 + 1.255\frac{\lambda}{r_d}\right) \frac{2r_d^2 g \rho_I}{9\eta} \quad (3.24)$$

となる。図 3.2 にこの式を用いて計算された雲粒の落下速度を示す。

先述の見積もりによると現在の火星環境において凝結成長によってできる雲粒の半径は最大で約 $25 \mu\text{m}$ 程度であった。従って図 3.2 から凝結成長によってできる雲粒の落下速度の最大値は 10 cm/s 程度であると見積もられる。風速の値が数 m/s 程度であると考えると、見積もられた落下速度の値は十分に無視できると考えられる。従って、雲密度の式 (2.6) 中の雲粒落下項 M_{fall} を無視する。

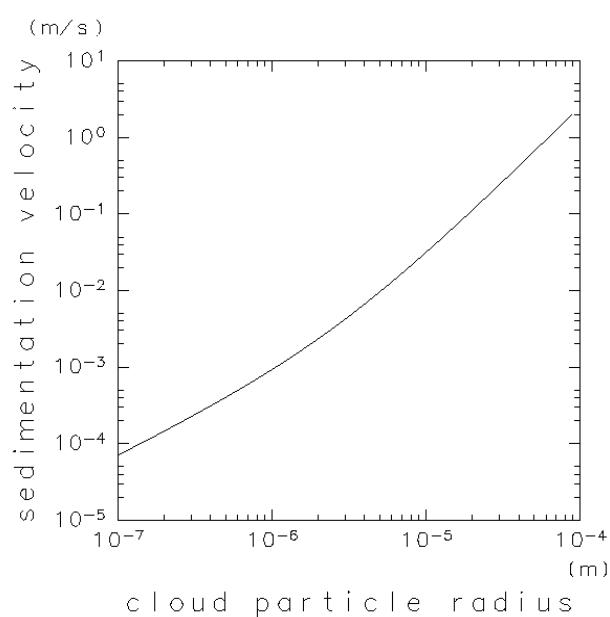


図 3.2: 式を用いて計算された、雲粒半径に対する雲粒の落下速度。

第4章 離散化

この章では前章までに説明した方程式を離散化方法の概要について説明する。離散化の詳細については付録 B を参照されたい。

本モデルでは時間方向の離散化にモード別時間分割法を用い、重力波モードを長い時間ステップで、音波モードを短い時間ステップで計算している。第3章で見積もった凝結の時間スケールを用いると、凝結に関する項は短い時間ステップで計算すべきであるということが示される。

4.1 空間方向の離散化

格子点配置は水平方向に対しては Arakawa-C 格子を、鉛直方向に対しては Lorenz 格子を用いる。空間微分は 4 次精度中心差分を用いて表現する。ただし、音波に関連する項は 2 次精度中心差分を用いて表現する。空間方向の離散化についての詳細は B.1 節を参照のこと。

4.2 時間方向の離散化

準圧縮方程式は音波を解に含む。音速は非常に速いため、CFL 条件を破らないようになると時間ステップを短くしなくてはならなくなり、計算が非効率になる。これを回避するためにモード別時間分割法を採用する。モード別時間分割法とは時間ステップを 2 種類用意し、短い方の時間ステップで音波に関連する項を解き、移流項や拡散項など音波に関連しない項は長い時間ステップで解くという方法である(図 4.1)。短い時間ステップで計算する項を最小限にとどめることで計算効率を改善することができる。

凝結に関連する項をどちらの時間ステップで解くかは凝結の時間スケールによって決まる。現在の火星大気を想定すると音速はおよそ 200 m/s である。また、現在の火

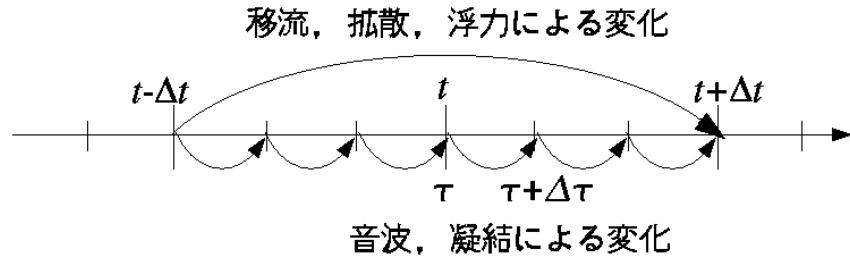


図 4.1: モード別時間分割法の概念図.

星大気表層付近における風速の最大値はおよそ 20 m/s である (Odaka *et al.*, 1998). 仮に格子点間隔を 100 m とすると, CFL 条件を満たす長い時間ステップと短い時間ステップの最大値はそれぞれ 5 秒, 0.5 秒となる. 凝結はおよそ 10 秒程度で起こるため, 凝結に関連する項を十分な時間的解像度で計算するためには短い時間ステップで計算する必要がある.

長い時間ステップはリープフロッギ法で解き, 短い時間ステップは水平方向の音波と凝結に関連する項はオイラー法で, 鉛直方向の音波に関連する項はクランクニコルソン法で離散化する.

第5章 乾燥大気モデルのテスト計算

この章では乾燥大気のテスト計算について述べる。

まず、本モデルの乾燥大気部分を開発する過程で行ったモデルに含まれる物理過程のチェックをするためのテスト計算についてまとめる。モデルを開発する過程の各段階においてテスト計算を行い、モデルの挙動を逐一確認していくことは非常に重要である。

それぞれの物理過程がチェックできたら、全ての物理過程を入れて実際の大気を想定した計算を行いモデル全体で正しく計算できているかのチェックを行う。そのひとつの一例としてここでは Odaka *et al.* (1998) の計算を扱う。この計算で質量、エネルギーといった保存量に対するチェックも行う。

5.1 モデルに含まれる物理過程のチェック

ここではひとつひとつの物理過程のチェックをするために行うテスト計算について述べる。行ったテスト計算の概略を開発の順を追って書くと以下のようになる。

- 音波が正しく計算できているかチェックする。
- 音波減衰項を入れて正しく計算できているかチェックする。この時、適切な音波減衰項の値も決める。
- 温位の移流が正しく計算できているかチェックする。
- プリュームの計算が正しく行えるかチェックする。この時、適切な数値粘性項の係数を決める。
- 境界層の計算を行い、乱流拡散項が正しく計算できているかチェックする。
- 一様冷却が正しく計算できているかチェックする。

- 地表面フラックスが正しく計算できているかチェックする。

5.1.1 音波の計算

ガウシアン型の圧力擾乱を初期条件として与え、音波が伝播する様子を計算する。この計算では音波に関連する項のみ計算する。この計算でチェックすることは

- 音波の位相速度は計算設定から予想される値と整合的か
- 速度と圧力擾乱の振幅は初期条件から予想される値と整合的か
- 境界での計算が正しく行われているか

である。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	短: 0.3 秒
計算モデル時間	40 秒
基本場の温度	298.15 K で一様
基本場の圧力	1.0×10^5 Pa で一様
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	z 方向に対しガウシアン型に変化する擾乱を与える。
風速の初期値	なし
重力加速度	0 m/s ²
気体の平均分子量	29.8×10^3 kg/mol
定圧比熱	1004 J/K kg
乱流拡散	なし
境界条件	水平: 周期, 鉛直: すべりなし

表 5.1: 音波の計算における計算設定。

初期擾乱として z 方向に対してガウス関数型に変化するエクスナー関数擾乱を与える。擾乱の中心は $x = 2000$ m で $\Pi = 0.008$, 半値幅は 500 m である。

図 5.1 に計算結果を示す。

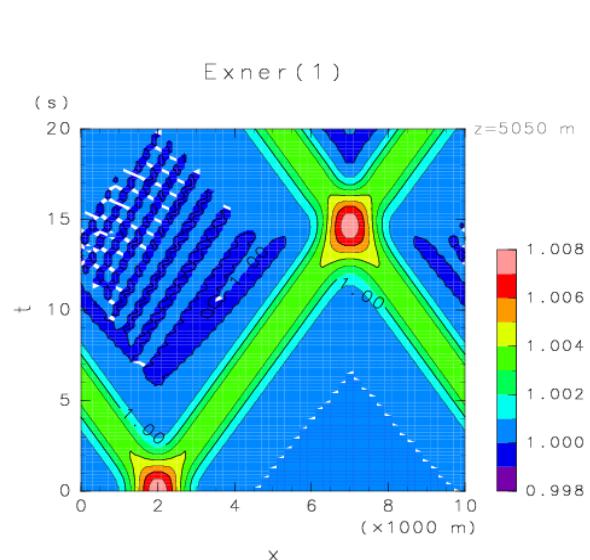


図 5.1: 音波の計算結果. エクスナー関数の x-t 分布.

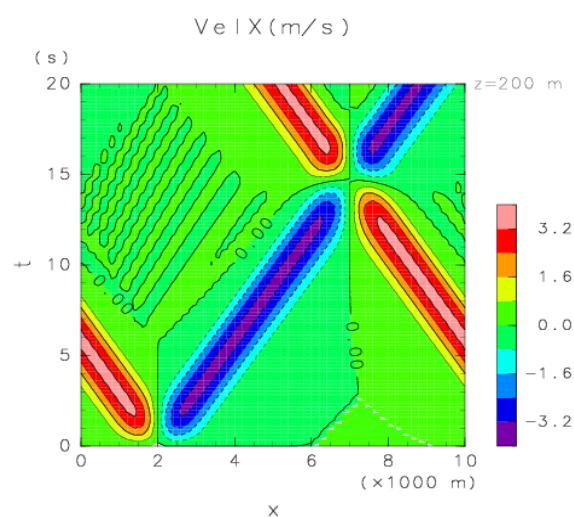


図 5.2: 音波の計算結果. 水平速度の x-t 分布.

音波の位相速度が音速と一致しているかを確認する。図 5.1 より音波の位相速度は 340 m/s 程度である。一方、式 (B.4) で計算される音速は 344 m/s である。よって計算された音波の位相速度は正しいと思われる。

圧力勾配によって発生する速度を正しく計算できているかを確認する。速度は圧力勾配によってのみ変化するので

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (5.1)$$

である。ここで圧力勾配を(擾乱の最大値)/(2x 半値幅)で与えておよその速度変化率を見積もると 2.4 m/s² 程度になる。図 5.2 より計算開始直後における擾乱がある部分の速度変化率は 1.5 m/s² 程度であり見積り値とオーダーは一致する。ファクターのずれは圧力勾配を(擾乱の最大値)/(2x 半値幅)と大雑把に与えたことによるものと考えられるため、計算された速度は正しいと思われる。

本実験では z 方向に一様なエクスナー関数擾乱を与えたが、 x 方向に一様なエクスナー関数擾乱を与えた場合も同様の結果を得ることができる。

5.1.2 音波減衰項の評価

前節の計算に音波減衰項を加える。音波減衰項の値をいろいろ変えて計算を行う。この計算でチェックすることは

- 音波減衰項の値として適当な値はいくらか

である。

図 5.3 に計算結果を示す。 $\alpha = 1.0 \times 10^{-6} \times \Delta x^2 / \Delta t$ の場合、計算不安定が起こった。 $\alpha = 5.0 \times 10^{-7} \times \Delta x^2 / \Delta t$ の場合、計算不安定は起きず、圧力擾乱も減衰していることがわかる。 $\alpha = 2.5 \times 10^{-7} \times \Delta x^2 / \Delta t$ の場合も計算不安定は起きていないが、圧力擾乱の減衰が弱い。以上の結果より、音波減衰項の値は $\alpha \times 10^{-7} \times \Delta x^2 / \Delta t$ が適当であると考えられる。

5.1.3 スカラー移流の計算

スカラー移流の計算を行う。ここではスカラー量として温位を扱うこととする。実際にはガウシアン型の温位擾乱の初期分布を与え、定常一様な水平風速を与えたときの温位の移流を計算する。この計算では熱力学方程式の移流項のみを計算する。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	短: 0.3 秒
計算モデル時間	40 秒
基本場の温度	298.15 K で一様
基本場の圧力	1.0×10^5 Pa で一様
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	z 方向に対しガウシアン型に変化する擾乱を与える.
風速の初期値	なし
重力加速度	0 m/s ²
気体の平均分子量	29.8×10^3 kg/mol
定圧比熱	1004 J/K kg
乱流拡散	なし
境界条件	水平: 周期, 鉛直: すべりなし

表 5.2: 音波減衰項を評価するための計算における計算設定.

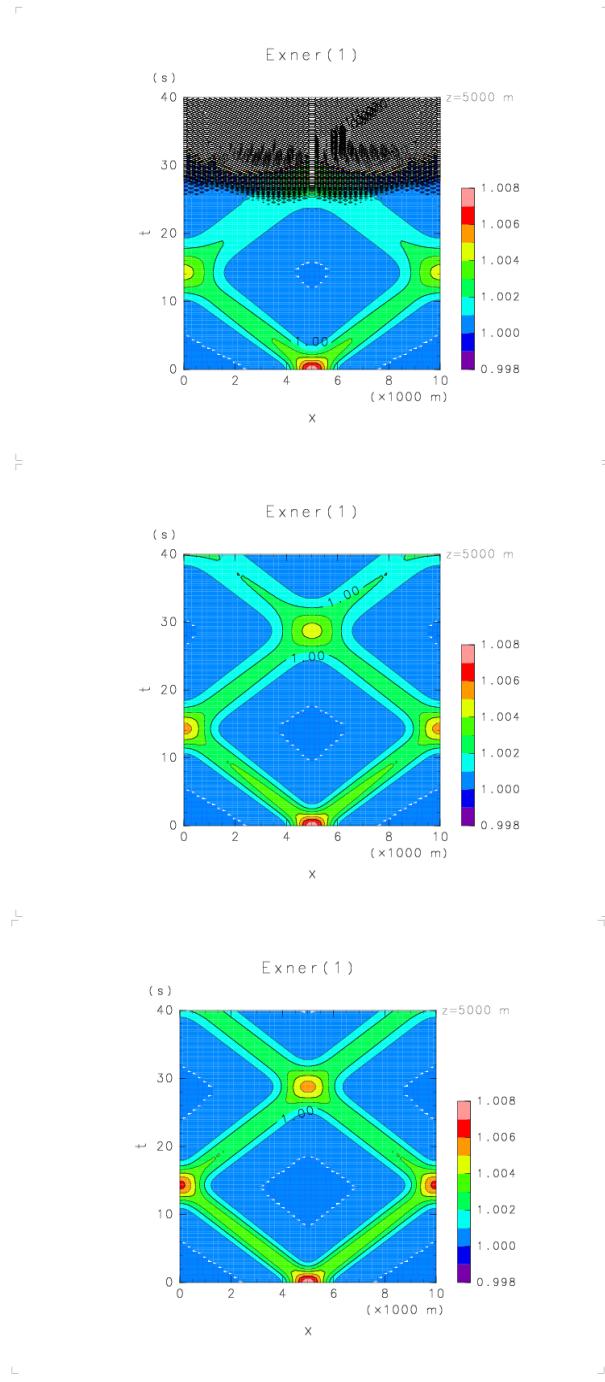


図 5.3: 音波減衰項を評価するための計算結果. エクスナー関数の $x-t$ 分布. (上) $\alpha = 1.0 \times 10^{-6} \times \Delta x^2 / \Delta t$. (中) $\alpha = 5.0 \times 10^{-7} \times \Delta x^2 / \Delta t$. (下) $\alpha = 2.5 \times 10^{-7} \times \Delta x^2 / \Delta t$. 上の図で $t > 25$ 秒の領域が黒くなっているのは計算不安定が起きてコンターが密になっているためである.

この計算でチェックすることは

- 温位擾乱の位相速度は水平風速と同じになっているか
- 時間積分することで温位擾乱の振幅にどれだけの誤差が生じるか

である。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 100 m, 鉛直: 100 m
時間間隔	長: 3 秒
計算モデル時間	300 秒
基本場の温度	298.15 K で一様
基本場の圧力	1.0×10^5 Pa で一様
温度の初期擾乱	x, z 方向に対しガウス関数型の擾乱を与える
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
重力加速度	0 m/s ²
気体の平均分子量	29.8×10^3 kg/mol
定圧比熱	1004 J/K kg
乱流拡散	なし
境界条件	水平: 周期, 鉛直: すべりなし

表 5.3: 温位の移流計算における計算設定.

温位の移流計算の結果を図 5.4, 図 5.5 に示す.

図 5.4 から温位擾乱の位相速度は与えた風速と同じ 35 m/s 程度であることがわかる. また, 図 5.5 より格子点間隔 100m, 時間ステップ 3 秒で 300 秒 計算した場合, ほとんど温位擾乱の振幅の誤差は生じなかった.

5.1.4 サーマルの計算及び数値粘性項の評価

サーマルが浮力で上昇する様子を計算する. 数値粘性項の係数を変えて 3 通りの計算を行う. この計算でチェックすることは

- サーマルが上昇するか

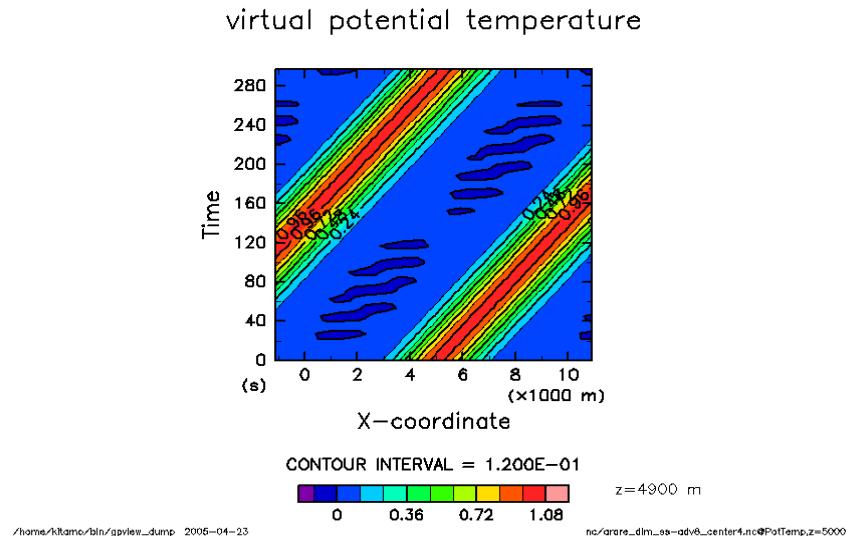
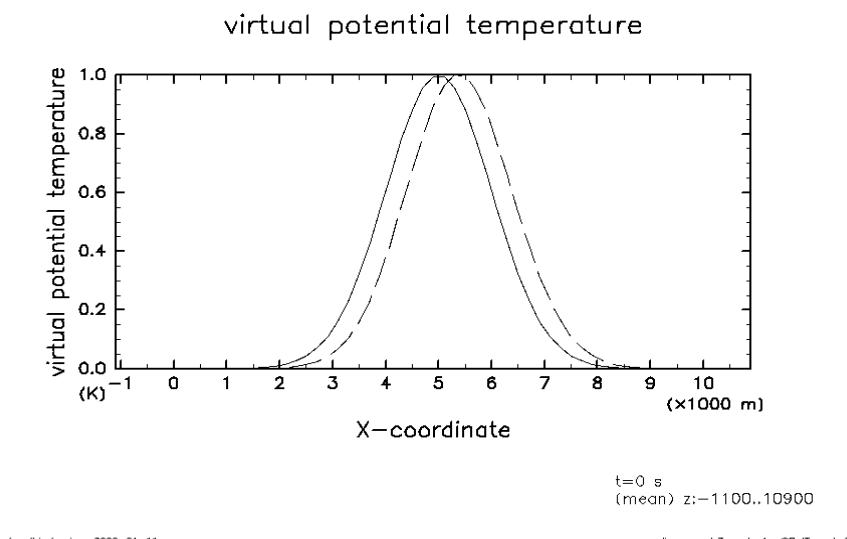


図 5.4: 溫位の移流の計算結果. 溫位の x-t 分布.

図 5.5: 溫位の移流の計算結果. z 断面図における温位擾乱. 実線は $t = 0$, 破線は $t = 300$ 秒.

- 数値粘性項の係数を変化させるとサーマルの様子はどのように変わるか
- である。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	長: 3 秒, 短: 0.3 秒
計算モデル時間	3000 秒
基本場の温度	乾燥断熱減率 (地表面温度は 290 K)
基本場の圧力	静水圧平衡 (地表面気圧は 10^5 Pa)
温度の初期擾乱	ガウス分布型の温位擾乱を与える (図 5.6)
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
放射冷却	なし
地表面フラックス	なし
重力加速度	9.8 m/s^2
定圧比熱	1004 J/K kg
乱流拡散	Klemp and Wilhemson (1978)

表 5.4: サーマルの計算における計算設定.

サーマルの計算の結果を図 5.6–図 5.9 に示す。図 5.7–図 5.9 からサーマルが上昇していることが確認できる。しかし、数値粘性項の係数の大きさによってサーマルの様子が異なる。数値粘性項の係数が $1.0 \times 10^{-4} \times \Delta x^2 / \Delta t = 6.7$ の場合、サーマルが左右に分かれているのが確認できる。一方、数値粘性項の係数が $1.0 \times 10^{-2} \times \Delta x^2 / \Delta t = 6.7$ の場合、温位擾乱の振幅が大きく減衰されていて、サーマルの上昇速度も遅く、サーマルはまだ左右に分かれていない。

5.1.5 乱流拡散の計算

下端に滑りなし境界条件をおき、一様な水平速度の初期分布を与えた場合において、速度シアによる乱流の生成とその効果による速度分布の変化を計算する。

この計算でチェックすることは

- $z = 0$ 付近で水平風速が 0 に近付いているか

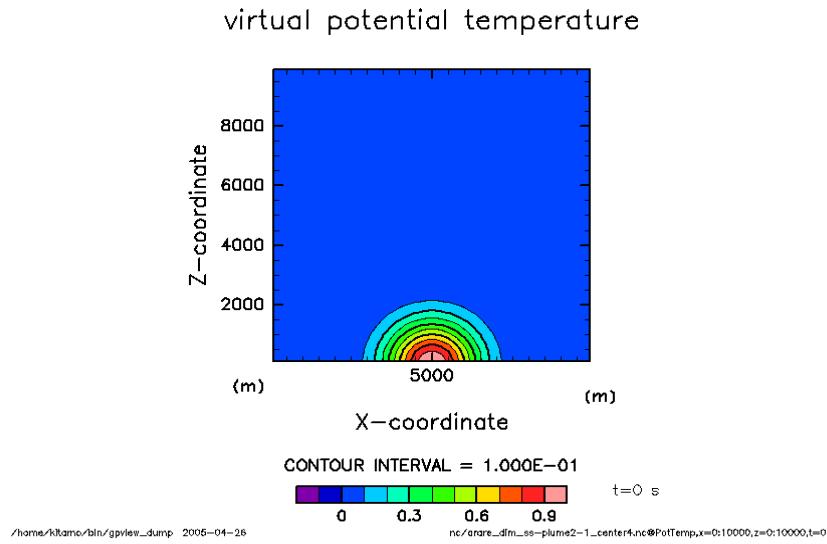


図 5.6: サーマル計算における温位擾乱の初期分布. $x = 5 \text{ km}$, $z = 0 \text{ km}$ を中心とするガウス分布型の温位擾乱を与える. 最大振幅は 1 K, 半值幅は 1 km である.

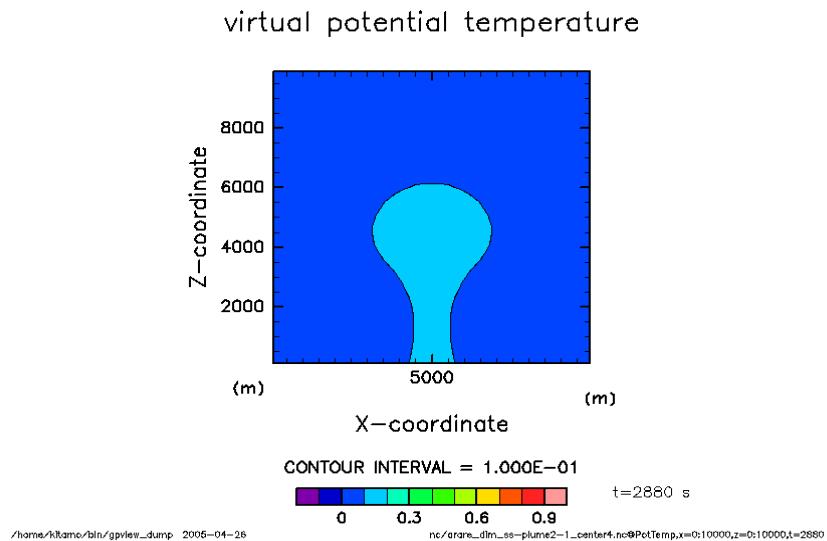


図 5.7: $t = 2880$ 秒における温位擾乱: 数値粘性係数を $1.0 \times 10^{-2} \times \Delta x^2 / \Delta t = 670$ とした場合.

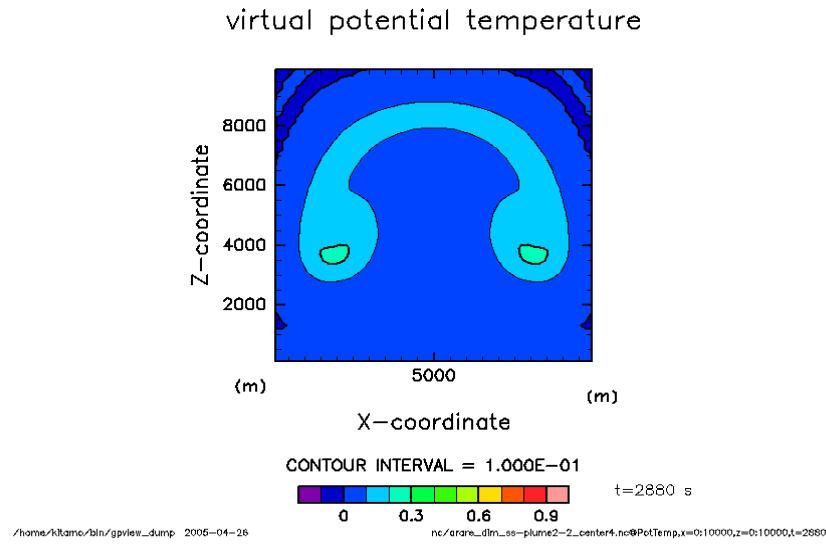


図 5.8: $t = 2880$ 秒における温位擾乱: 数値粘性係数を $1.0 \times 10^{-3} \times \Delta x^2 / \Delta t = 67$ とした場合.

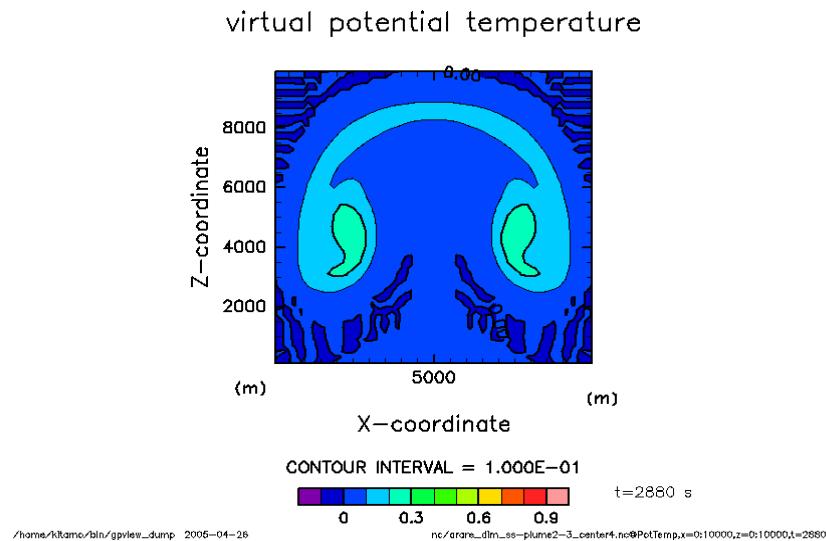


図 5.9: $t = 2880$ 秒における温位擾乱: 数値粘性係数を $1.0 \times 10^{-4} \times \Delta x^2 / \Delta t = 6.7$ とした場合.

である。

乱流拡散の計算結果を図 5.10 に示す。図 5.10 より $z = 0$ 付近で速度が 0 に近付いていることが確認できる。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	長: 3 秒
計算モデル時間	1800 秒
基本場の温度	290 K で一定
基本場の圧力	10^5 で一定
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	10 m/s
放射冷却	なし
地表面フラックス	なし
重力加速度	9.8 m/s^2
乱流拡散	Klemp and Wilhelmson (1978)
境界条件	水平: 周期, 下端: 滑りなし, 上端: 応力なし

表 5.5: 乱流拡散計算における計算設定。

5.1.6 一様冷却の計算

一様冷却の計算が正しく行われているかをチェックするためのテスト計算を行う。チェックの簡便さのために一様冷却以外の計算部分は全て行わない。

この計算でチェックすることは

- 温位擾乱の低下が与えた冷却率と整合的か

である。

図 5.11 に一様冷却計算の結果を示す。温位擾乱が高度によって異なっているが、これは一様冷却による温位の変化率は一様冷却率に $\bar{\theta}/T$ をかけた形で与えられるためである。図 5.11 より $z = 0$ における温位変化率は -10 K/day 程度である。従って一様冷却が正しく計算されていることが確認できた。

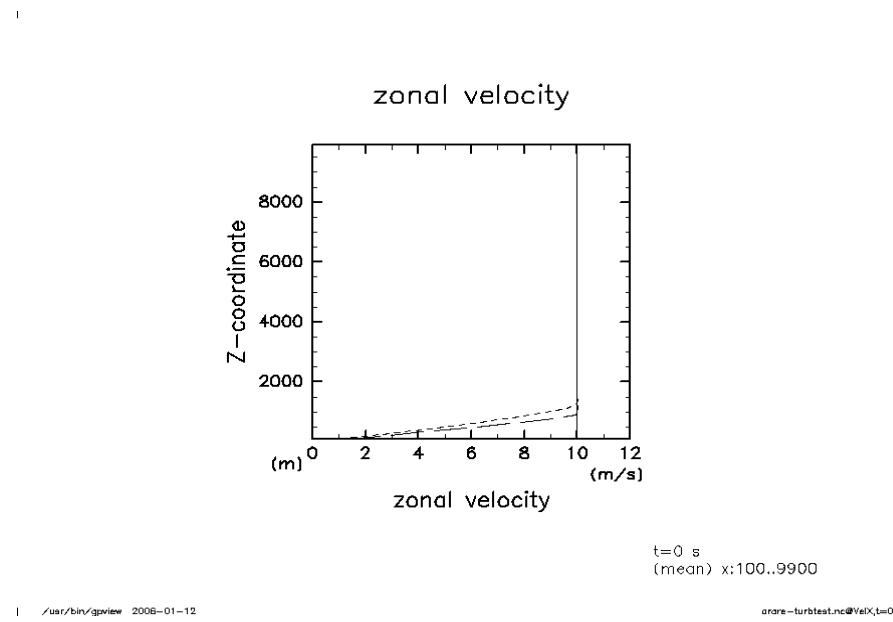


図 5.10: 乱流拡散の計算結果: 水平速度の鉛直分布. 実線: $t = 0$ 秒, 破線: $t = 900$ 秒, 点線: $t = 1800$ 秒.

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	長: 3 秒
計算モデル時間	3 時間
基本場の温度	乾燥断熱減率 (地表面温度は 290 K)
基本場の圧力	静水圧平衡 (地表面気圧は 10^5 Pa)
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
放射冷却	高度 5 km 以下で 50 K/day の一様冷却を与える.
地表面フラックス	なし
地表面温度	300 K
重力加速度	9.8 m/s^2
乱流拡散	なし

表 5.6: 一様冷却計算における計算設定.

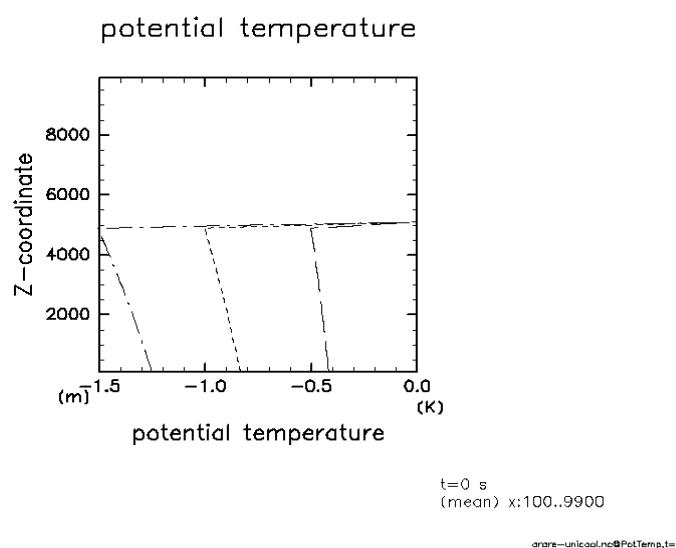


図 5.11: 一様冷却計算の計算結果. 溫位擾乱の鉛直分布. 破線は 1 時間後, 点線は 2 時間後, 一点破線は 3 時間後の温位擾乱である.

5.1.7 地表面熱フラックスの計算

地表面熱フラックスのテスト計算を行う。チェックの簡便さのために地表面熱フラックス以外の計算部分は全て省略する。従って、地表面から与えられた熱は全て最下層の温位擾乱を増加させるのに使われる。さらに、定常一様な水平風速を与え、地表面温度の値は固定する。

この計算でチェックすることは

- 計算された最下層の温位の増加率は妥当か
- 十分時間が経った時、最下層の温度が地表面温度の値に収束しているか

である。

図 5.12 に地表面熱フラックスの計算の結果を示す。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	長: 3 秒
計算モデル時間	3 時間
基本場の温度	290 K で一定
基本場の圧力	10^5 Pa で一定
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	$u = 10$ m/s
放射冷却	なし
地表面熱フラックス	熱についてのみ計算 ($c_D = 0.01$)
地表面温度	300 K
重力加速度	9.8 m/s ²
乱流拡散	なし

表 5.7: 地表面熱フラックス計算における計算設定。

図 5.12 に計算結果を示す。計算された地表面熱フラックスによる温度変化の値が正しく計算されているかどうかを確認する。地表面熱フラックスでしか温度が変化しない場合、最下層の温度は

$$T_1 = T_g - (T_g - T) \exp\left(\frac{c_D u t}{\Delta z}\right) \quad (5.2)$$

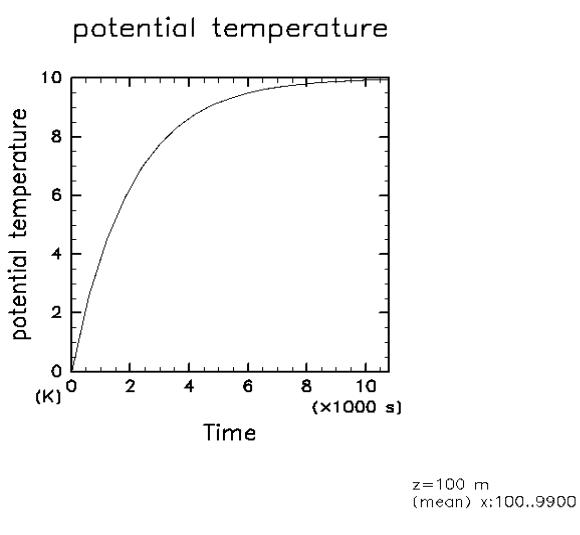


図 5.12: 地表面熱フラックスの計算結果. 最下層の温位擾乱の時間変化.

で表される。図5.12から最下層の温位変化がこの式に従っていることがわかる。従って、地表面熱フラックスの計算が正しく行われていることが確認できた。

5.1.8 地表面運動量フラックスの計算

地表面運動量フラックスのテスト計算を行う。水平風速の初期分布に一様な値を与え、地表面運動量フラックスにより風速が減衰する様子を計算する。チェックの簡便さのために地表面運動量フラックス以外の計算部分は全て省略する。従って、地表面から与えられた運動量は全て最下層の風速を変化させるのに使われる。

この計算でチェックすることは

- 計算された最下層の水平風速の減少率は妥当か
- 十分時間が経った時、最下層の水平風速の値が0に収束しているか

である。

図5.13に地表面運動量フラックスの計算の結果を示す。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
時間間隔	長: 3 秒
計算モデル時間	3 時間
基本場の温度	290 K で一定
基本場の圧力	10^5 Pa で一定
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	$u = 10$ m/s
放射冷却	なし
地表面フラックス	運動量についてのみ計算 ($c_D = 0.01$)
重力加速度	9.8 m/s ²
乱流拡散	なし

表 5.8: 地表面運動量フラックス計算における計算設定。

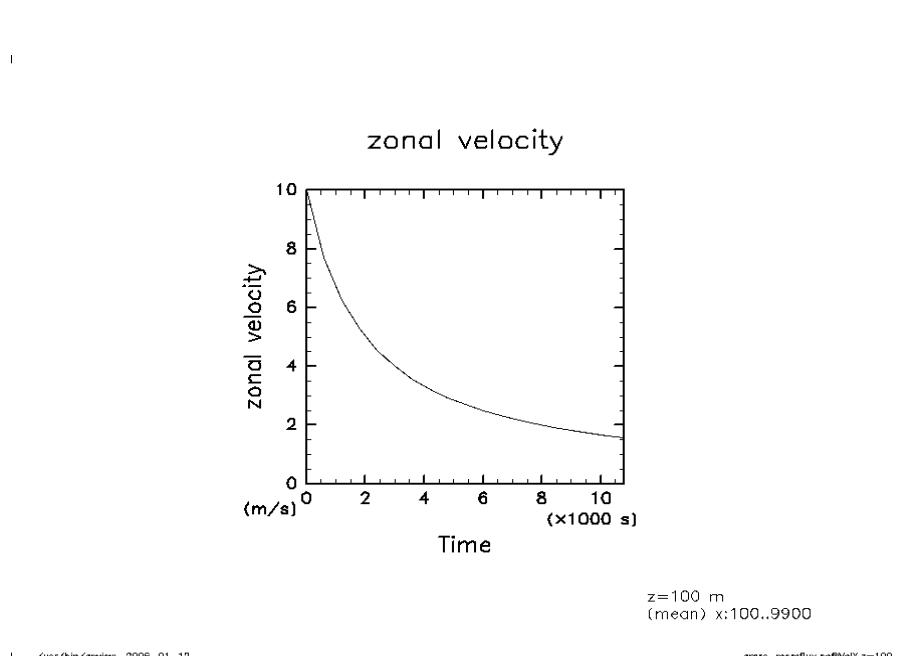


図 5.13: 地表面運動量フラックスの計算結果. 最下層の水平速度の時間変化.

図 5.13 に計算結果を示す。計算された地表面運動量フラックスによる温度変化の値が正しく計算されているかどうかを確認する。地表面運動量フラックスでしか水平速度が変化しない場合、最下層の水平速度は

$$u = \frac{u_0}{1 + (c_D u_0 t / \Delta z)} \quad (5.3)$$

で表される。図 5.13 から最下層の運動量変化がこの式に従っていることがわかる。従って、地表面運動量フラックスの計算が正しく行われていることが確認できた。

5.2 Odaka *et al.* (1998) の再計算

火星乾燥大気のテスト計算として Odaka *et al.* (1998) の再計算を行った。計算は宇宙研 SX-6 を使用した。CPU 時間は 1 時間 36 分であった。

計算領域幅	水平: 51.2 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 100 m, 鉛直: 100 m
時間間隔	長: 1.5 秒, 短: 0.15 秒
計算モデル時間	12 時間
基本場の温度	$z < 5$ km では温位一定 (245 K), $z > 5$ km では温度一定 (220 K)
基本場の圧力	静水圧平衡 (地表面気圧 700 Pa)
温度の初期擾乱	最下層に最大振幅 2 K のランダムな擾乱を与える
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
一様冷却の冷却率	50 K/day
バルク係数	0.01 (熱, 運動量で同じ値を用いる)
地表面温度	270 K
重力加速度	3.72 m/s ²
乱流拡散	Klemp and Wilhelmson (1978)

表 5.9: Odaka *et al.* (1998) の再計算における計算設定。

図 5.14–図 5.16 はそれぞれ 12 時間後における温位擾乱、水平速度、鉛直速度である。高さ約 6 km の対流セルが確認できる。対流セルの縦横比は約 1 である。上昇流のあるところでは約 3K の温位擾乱が確認できる。

図 5.17, 図 5.18 はそれぞれ 12 時間後の熱、運動量に関する乱流拡散係数である。上

昇流の存在するところで乱流拡散係数は大きくなり、その部分での熱、運動量に関する乱流拡散係数はそれぞれおよそ 50, 160 である。

図 5.19 は温位の水平平均値の時間変化である。

図 5.20 は 11–12 時間後の間ににおける温位の水平平均値の変化の寄与である。高度 5 km 以下では一様冷却と移流による加熱がだいたい一つりあっていいる。また高度 6–7 km では下からの冷たい空気の移流によって冷えている。

図 5.21 は全質量の時間変化である。計算された系では質量の出入りがないにも関わらず、全質量は 12 時間で 0.04 % 増加している。これは準圧縮方程式では質量が保存しないことに起因するものであると考えられる。

図 5.22– 図 5.23 は系の全エネルギーの時間変化の様子である。浮力による位置エネルギーを水平平均した温位によるものとその偏差によるものに分ける。前者はほぼ一定の割合で増え続けるのに対し、後者はある値で増えなくなる。運動エネルギーは時間が経つとある値で増えなくなる。全エネルギーの変化は一様冷却と運動量の乱流拡散によって主に決まっている。準圧縮方程式ではエネルギー保存則が破れているが、それによるエネルギーの変化は全エネルギーの変化に比べると十分に小さいことがわかる。

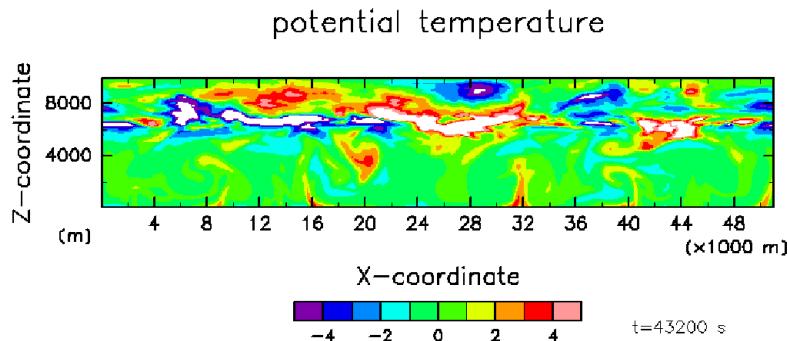


図 5.14: 12 時間後の温位擾乱の値. ここで示しているのは水平平均値からのずれである.

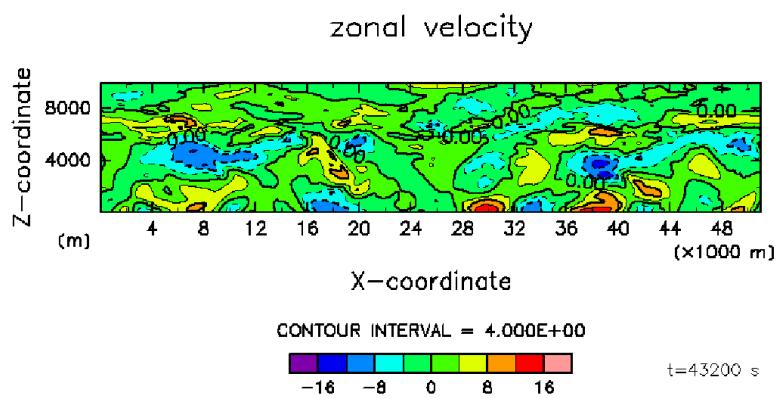


図 5.15: 12 時間後の水平速度の値.

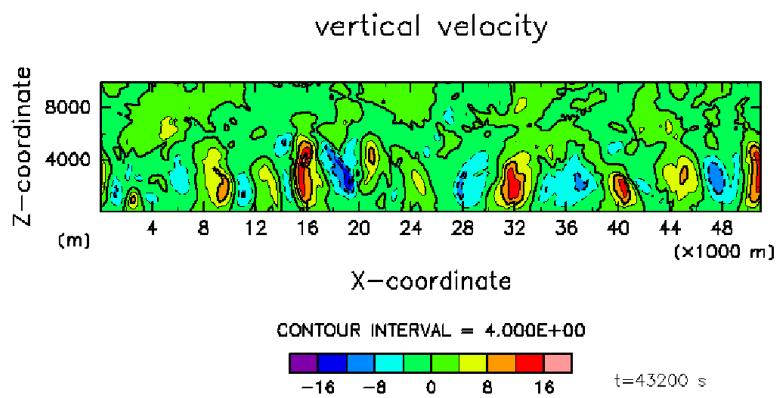


図 5.16: 12 時間後の鉛直速度の値.

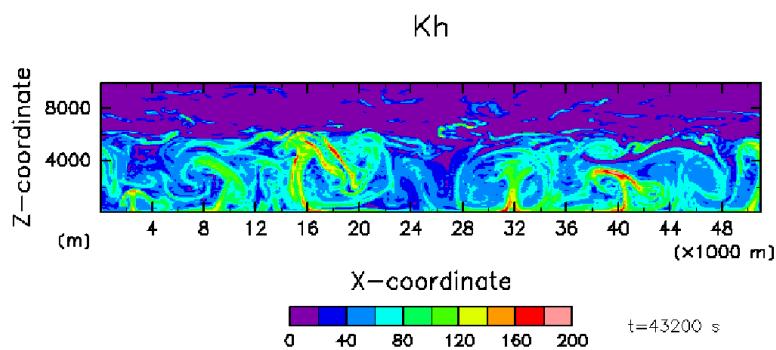


図 5.17: 12 時間後の熱に関する乱流拡散係数の値.

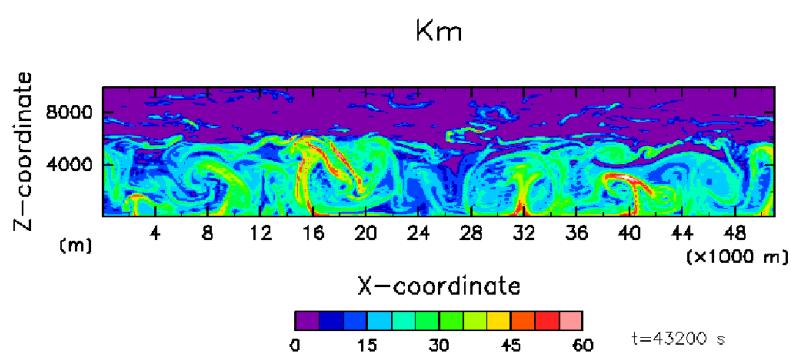


図 5.18: 12 時間後の運動量に関する乱流拡散係数の値.

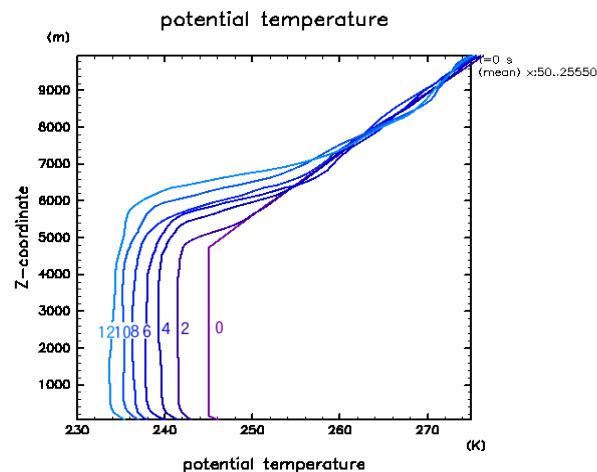


図 5.19: 水平平均した温位の鉛直分布の時間変化

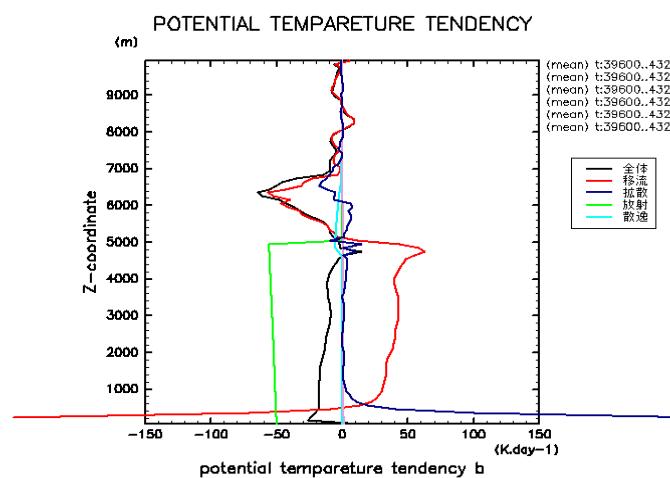


図 5.20: 11–12 時間後における温位変化の寄与.

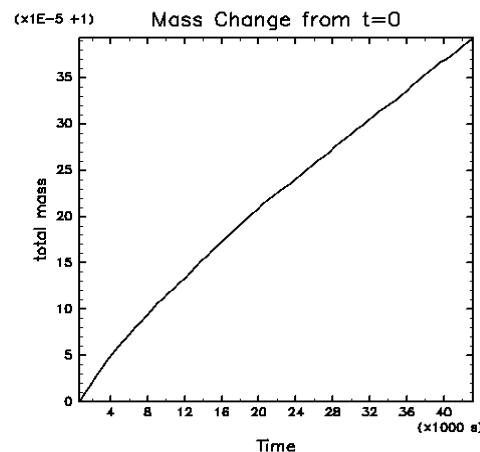


図 5.21: 全質量の時間変化. 初期の全質量を 1 とした.

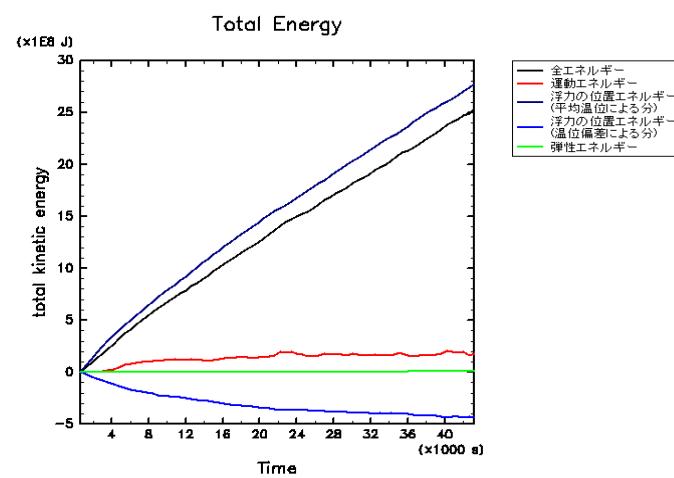


図 5.22: エネルギーの時間変化.

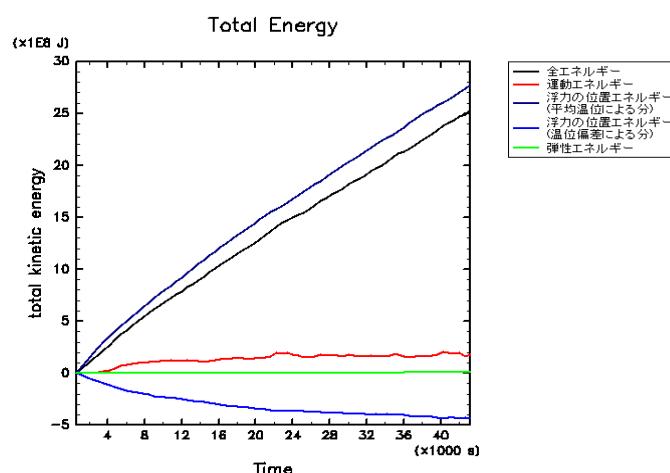


図 5.23: エネルギーの時間変化の寄与.

第6章 主成分凝結大気におけるサーマル上昇実験

この章では開発したモデルを用いて主成分凝結大気におけるサーマルの上昇実験を行う。モデル下部にサーマルを与える、浮力で上昇して凝結層にぶつかり消滅するまでの様子を計算する。この実験を臨界飽和比の値をいろいろ変えて行う。

その前に開発されたモデルが正しく動くかのチェックと大気主成分凝結による温度、圧力変化の評価を兼ねて、凝結のみを考慮した計算および凝結と音波のみを考慮した計算を行う。

6.1 凝結のみ考慮した場合の計算

凝結に関連する項のみを計算する。この計算でチェックすることは

- 計算される雲密度、圧力擾乱、温位擾乱の値は解析的に計算される値と整合的か
- 凝結の時間スケールはどのくらいの長さか

である。

表 6.1 に示すように凝結に伴う温位変化と圧力変化をそれぞれ考慮する場合と考慮しない場合の 4 つの場合について実験を行う。ただし、本計算では速度場を 0 として計算を行うため、圧力の計算には陽解法を用いている。

No.	凝結に伴う温位変化	凝結に伴う圧力変化
case 1	考慮しない	考慮しない
case 2	考慮しない	考慮する
case 3	考慮する	考慮しない
case 4	考慮する	考慮する

表 6.1: 凝結のみ考慮した場合に計算で行うケース.

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m , 鉛直: 200 m
計算モデル時間	450 秒
基本場の温度	$z < 5 \text{ km}$ では温位一定 (168 K). $z > 5 \text{ km}$ では温度一定 (140 K)(図 6.1)
基本場の圧力	静水圧平衡(地表面気圧 700 Pa)
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
重力加速度	3.72 m/s^2
乱流拡散	なし
臨界飽和比	1
凝結核数密度	$5.0 \times 10^8 / \text{kg}$
凝結核の半径	$1.0 \times 10^{-7} \text{ m}$
大気の熱伝導係数	$4.8 \times 10^{-3} \text{ W/K m}$
音波減衰項の係数	$5.0 \times 10^{-7} \Delta x^2 / \Delta t$
数値粘性項の係数	$1.0 \times 10^{-4} \Delta x^2 / \Delta t$

表 6.2: 凝結のみ考慮した場合の計算における計算設定.

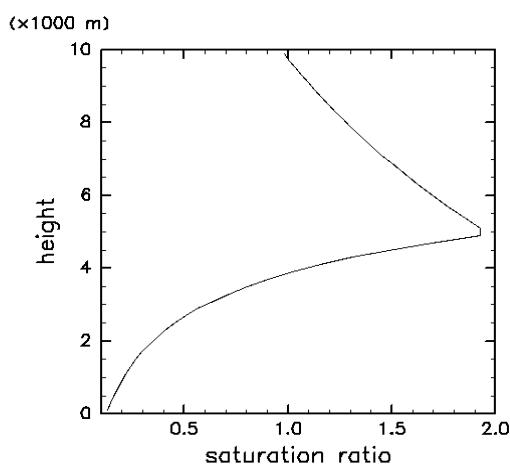
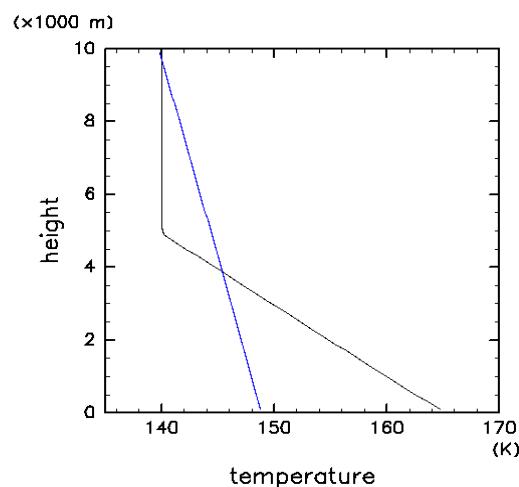


図 6.1: 凝結のみ考慮した場合の計算における基本場の温度分布. (上) 温度分布. 黒線は基本場の温度分布, 青線は凝結温度. (下) 飽和比.

6.1.1 凝結計算の整合性のチェック

この節では計算結果が理論値との整合性を持ったものであるかどうかを確認する。確認するのは

- 雲密度の時間変化が解析解と一致するか
- 凝結による圧力変化が雲密度の変化から予想される値と一致するか
- 潜熱による温位変化が雲密度の変化から予想される値と一致するか

の3つである。

まず、雲密度の時間変化が解析解と一致するかどうかを case1 の計算結果を用いて調べる。静止状態の場合における雲密度の時間変化は式 (2.6), (3.1), (3.6) から

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{4\pi r_d N}{R_h + R_m} (S - 1) \quad (6.1)$$

で表される。飽和比が一定の場合この式を解析的に積分することができ、

$$\rho_s = \frac{4}{3} \rho_I N \left[\left(r_{aero}^2 + \frac{2(S-1)}{R_h \rho_I} \right)^{3/2} - r_{aero}^3 \right] \quad (6.2)$$

となる。図 6.2 に $z = 5000$ m における case1 の計算結果と式 (6.2) で計算された雲密度を示す。図 6.2 からモデルで計算された値はほぼ解析解に一致している。従って雲密度の計算が整合的に行われていると思われる。

次に、凝結による圧力変化が雲密度の変化から予想される値と一致するかを case 2 の計算結果を用いて調べる。式 (2.4), (2.6) から

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}} \left(\frac{L}{c_p T} - 1 \right) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.3)$$

を得る。この式を積分すると

$$\Pi = \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}} \left(\frac{L}{c_p T} - 1 \right) \rho_s \quad (6.4)$$

となる。図 6.3 からモデルで計算された圧力擾乱の値がこの式の関係を満たしていることがわかる。先程、雲密度が正しく計算されていることを確かめた。従って、凝結に伴う圧力変化の計算は整合的に行われていると思われる。

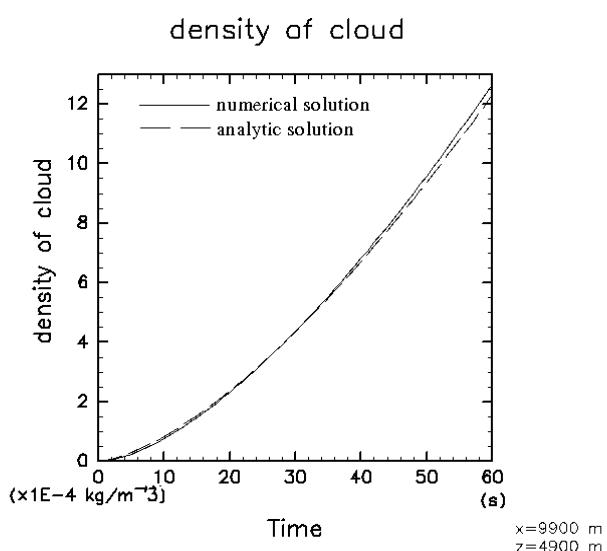


図 6.2: case1 で計算された $z = 5000\text{ m}$ における雲密度. 実線はモデルの計算結果, 破線は式 (6.2) の解析解を計算したものである.

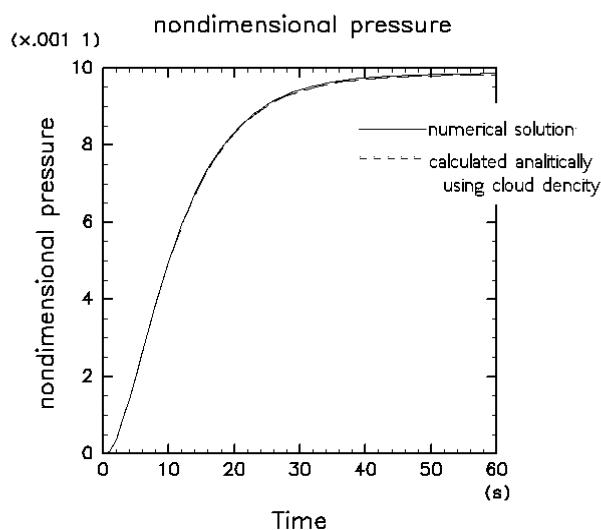


図 6.3: case2 で計算された $z = 5000$ m におけるエクスナー関数擾乱. 実線はモデルの計算結果, 点線は式 (6.4) からモデルで計算された雲密度を用いて計算したものである.

次に、潜熱による温位変化が雲密度の変化から予想される値と一致するかを case 3 の計算結果を用いて調べる。式 (2.5), (2.6), (2.8) から

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p \bar{\rho}} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.5)$$

を得る。この式を積分すると

$$\theta = \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p \bar{\rho}} \rho_s \quad (6.6)$$

となる。図 6.4 からモデルで計算された温位擾乱の値がこの式の関係を満たしていることがわかる。先程、雲密度が正しく計算されていることを確かめた。従って、潜熱による温位変化の計算が整合的に行われていると思われる。

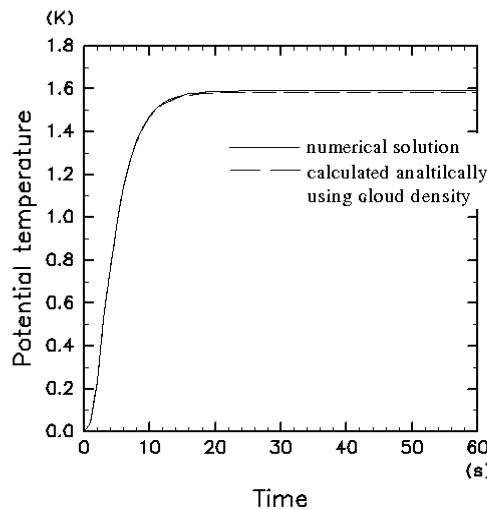


図 6.4: case3 で計算された $z = 5000$ m における温位擾乱。実線はモデルの計算結果、破線は式 (6.6) からモデルで計算された雲密度を用いて計算したものである。

6.1.2 凝結の時間スケール

ここでは凝結の時間スケールがどのくらいかをチェックする。また、飽和比の時間変化は圧力変化と時間変化のどちらの寄与が大きいのかもチェックする。

図 6.5 にそれぞれ case1–case4 における $z = 5000$ m の雲密度、飽和比の時間変化を示す。case 4 の値から静止状態で飽和比が 1.2 の大気が凝結するのに要する時間はおよそ 15 秒であることがわかる。また、図 6.5 より case 3 は case 2 よりも飽和比の時間変化率が大きく、ほぼ case 4 のそれと同じ値である。このことから飽和比の変化は温度変化の寄与が大きいことが確認できる。

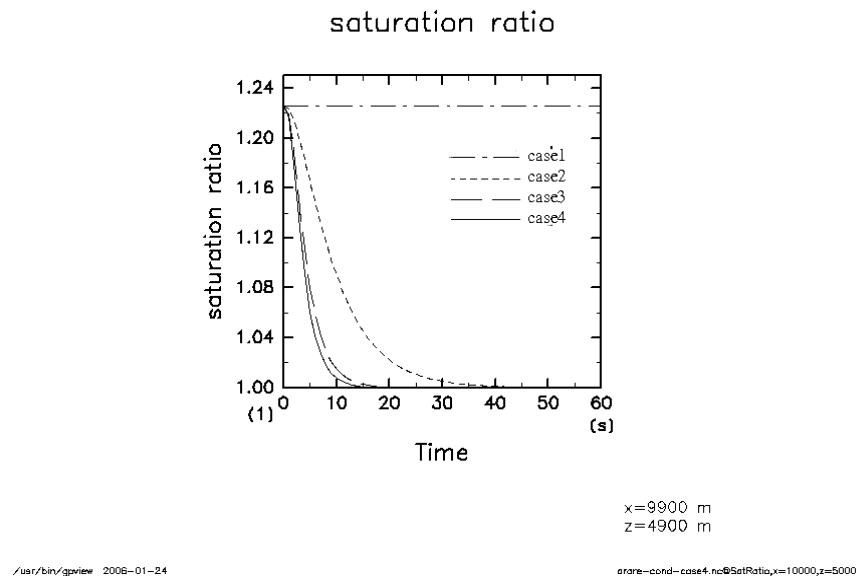


図 6.5: case1–case4 における飽和比の時間変化。一点破線は case 1、点線は case 2、破線は case 3、実線は case 4 をそれぞれ表す。

6.2 凝結と音波のみを考慮した場合の計算

凝結と音波に関連する項のみ計算する。この計算でチェックすることは

- 凝結に伴う発生する圧力擾乱が音速で伝播しているか
- 凝結に伴い発生する鉛直速度はどのくらいか
- 計算される雲密度、温位が前節の case2, case4 で計算された値と大きく異ならないか

である。

計算領域幅	水平: 10 km, 鉛直: 10 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
計算モデル時間	60 秒
基本場の温度	$z < 5 \text{ km}$ では温位一定 (168 K). $z > 5 \text{ km}$ では温度一定 (140 K)(図 6.1)
基本場の圧力	静水圧平衡 (地表面気圧 700 Pa)
温度の初期擾乱	なし
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
重力加速度	3.72 m/s ²
乱流拡散	なし
臨界飽和比	1
凝結核数密度	$5.0 \times 10^8 / \text{kg}$
凝結核の半径	$1.0 \times 10^{-7} \text{ m}$
大気の熱伝導係数	$4.8 \times 10^{-3} \text{ W /K m}$
音波減衰項の係数	$5.0 \times 10^{-7} \Delta x^2 / \Delta t$
数値粘性項の係数	$1.0 \times 10^{-4} \Delta x^2 / \Delta t$

表 6.3: 凝結と音波を考慮した場合の計算における計算設定.

図 6.6, 図 6.7 から凝結に伴って発生したエクスナー関数擾乱が音速(約 200 m/s)で伝播していることが確認できる。図 6.7 から凝結に伴って発生した鉛直速度の大きさは 0.5 m/s 程度であることがわかる。

図 6.8, 図 6.9 から音波を入れて計算した雲密度, 温位擾乱の大きさは前節の case 2 と case 4 の間にある。音波を考慮してもこれらの値は正しく計算できているものと思われる。

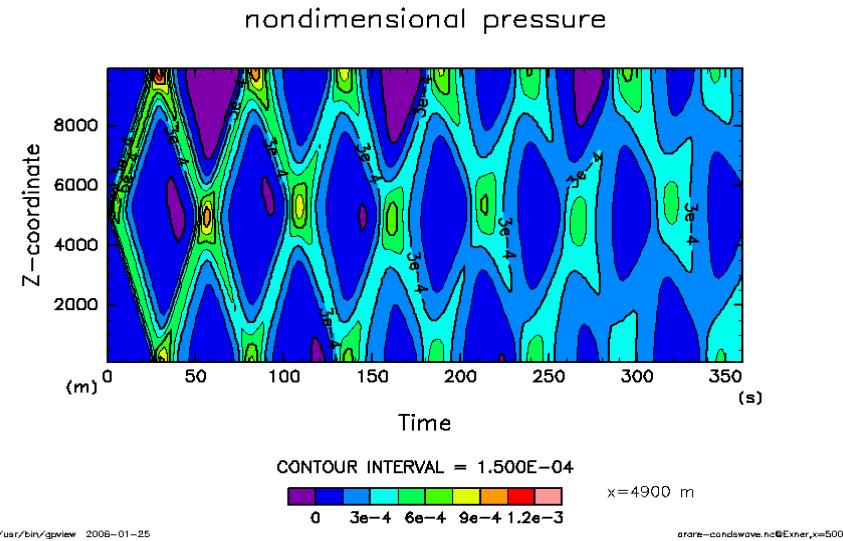
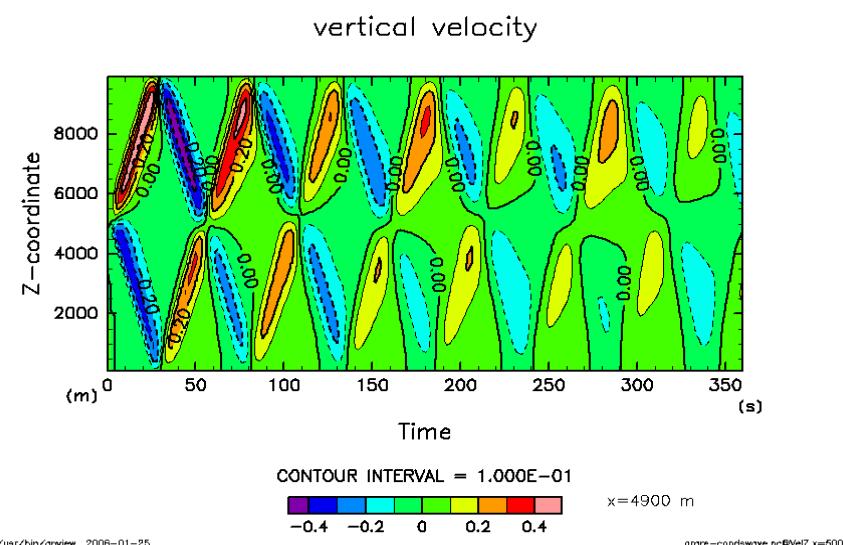
6.3 サーマルの計算

基本場の温度分布は極冠の境界付近における鉛直温度分布を参考に与える(図 6.10)。ただし、より理想的な系を考えるために、地表面から凝結高度までは温度は乾燥断熱減率で減少するとした。

凝結が起こる層の基本場の温度を決める飽和比をいろいろ変えて計算を行った。

計算領域幅	水平: 20 km, 鉛直: 20 km
格子点間隔	水平: 200 m, 鉛直: 200 m
計算モデル時間	2 時間
基本場の温度	図 6.10 参照。
基本場の圧力	静水圧平衡(地表面気圧 700 Pa)
温度の初期擾乱	ガウス関数型の擾乱。 中心位置 $x = 5000 \text{ m}, z = 0 \text{ m}$. 最大振幅 2 K.
圧力の初期擾乱	なし
風速の初期値	なし
重力加速度	3.72 m/s ²
乱流拡散	なし
臨界飽和比	1 / 1.1 / 1.35
凝結核数密度	$5.0 \times 10^8 \text{ / kg}$
凝結核の半径	$1.0 \times 10^{-7} \text{ m}$
大気の熱伝導係数	$4.8 \times 10^{-3} \text{ W / K m}$
音波減衰項の係数	$5.0 \times 10^{-7} \Delta x^2 / \Delta t$
数値粘性項の係数	$1.0 \times 10^{-4} \Delta x^2 / \Delta t$

表 6.4: サーマルの計算における計算設定。

図 6.6: 凝結と音波の計算におけるエクスナー関数の時間変化の $x = 5000$ 断面図.図 6.7: 凝結と音波の計算における鉛直速度の時間変化の $x = 5000$ 断面図.

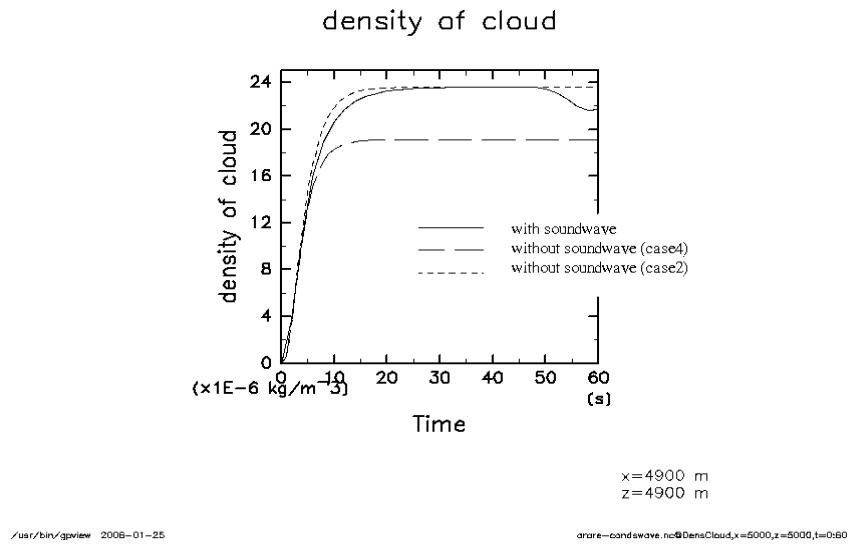


図 6.8: 凝結と音波の計算における雲密度の時間変化. 実線は音波を考慮した計算, 点線は前節の case 2 の計算, 破線は前節の case 4 の計算における結果をそれぞれ表している.

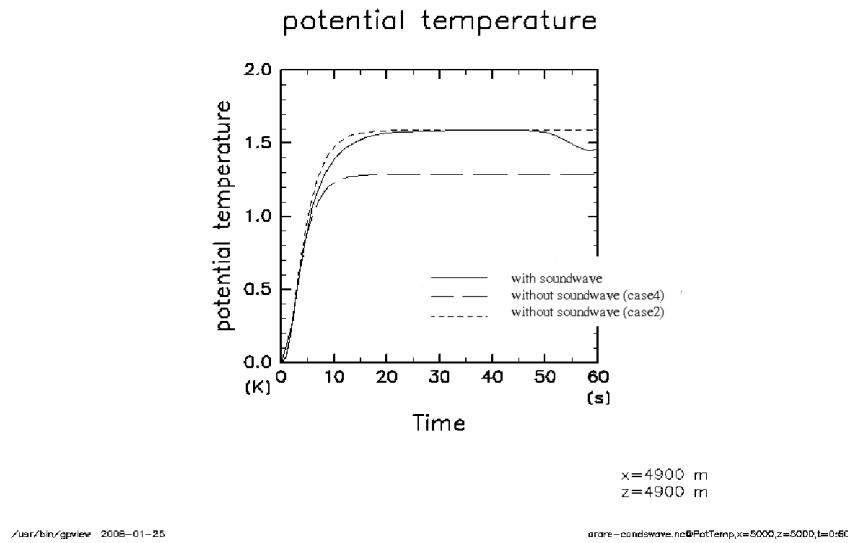


図 6.9: 凝結と音波の計算における温位の時間変化. 実線は音波を考慮した計算, 点線は前節の case 2 の計算, 破線は前節の case 4 の計算をにおける結果をそれぞれ表している.

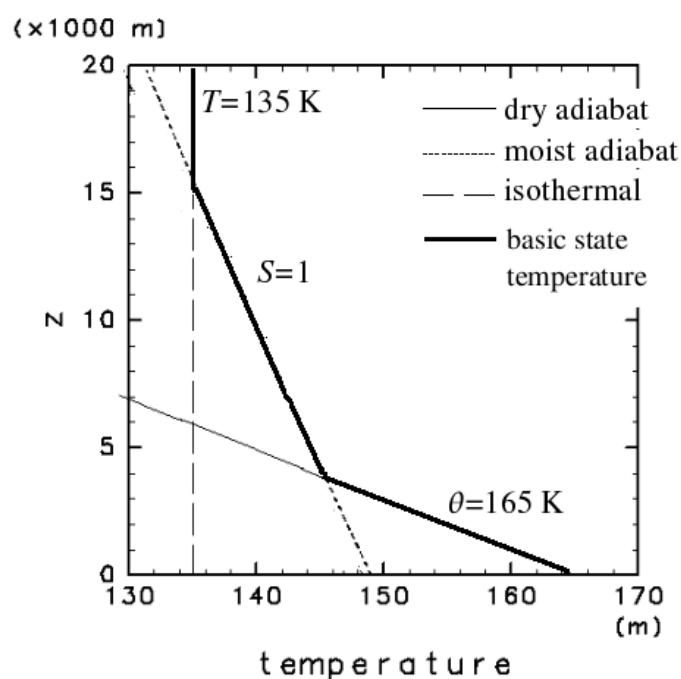


図 6.10: サーマルの上昇実験で与えた基本場の温度分布. 太い実線が与えた基本場の温度分布である. 細い実線は乾燥断熱線, 点線は飽和比 S 一定の線(湿潤断熱線), 破線は等温線である. 地表面温度は 165 K, 大気上端の温度は 135 K である.

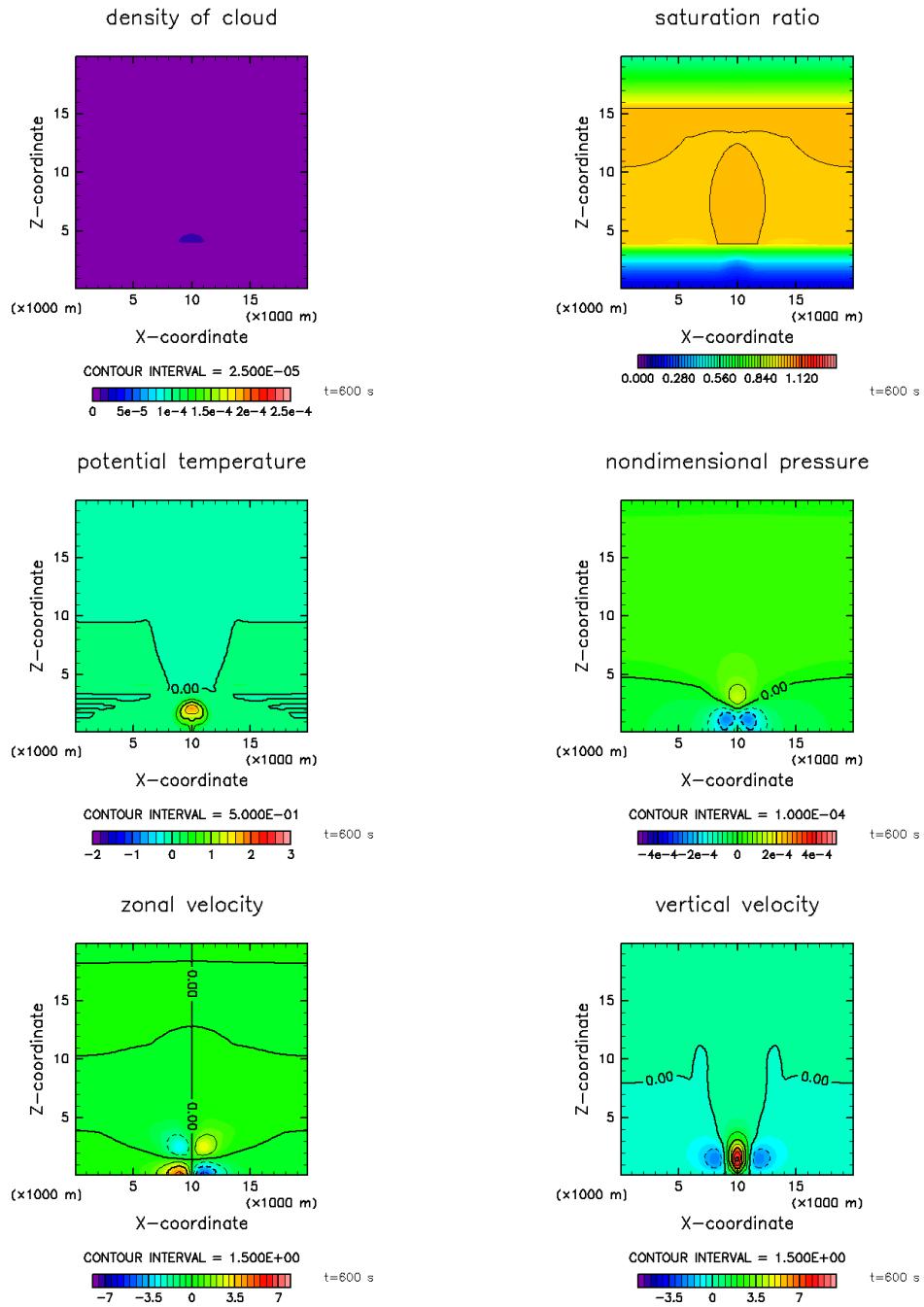


図 6.11: 臨界飽和比が 1 の場合の $t = 600$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

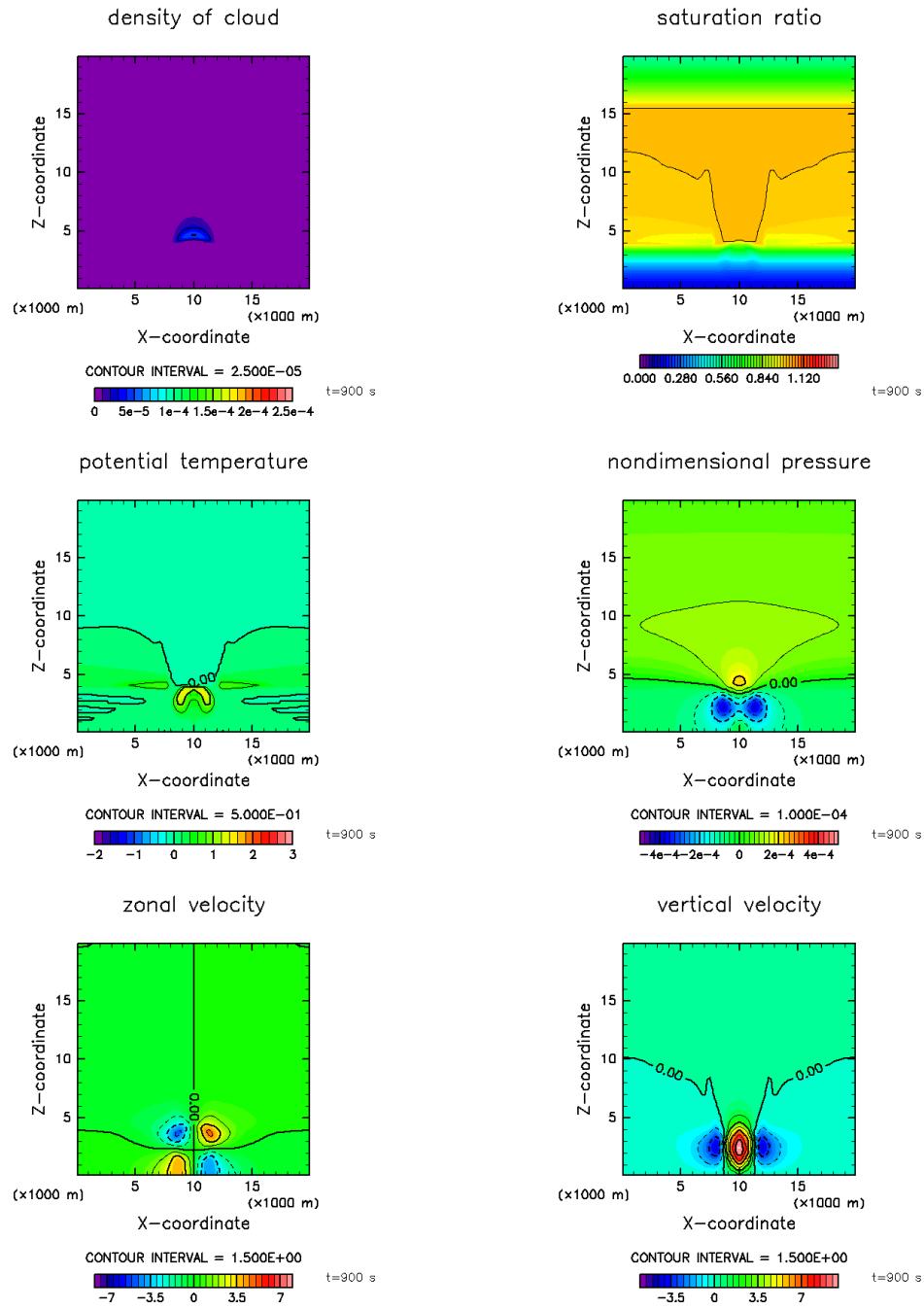


図 6.12: 臨界飽和比が 1 の場合の $t = 3300$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

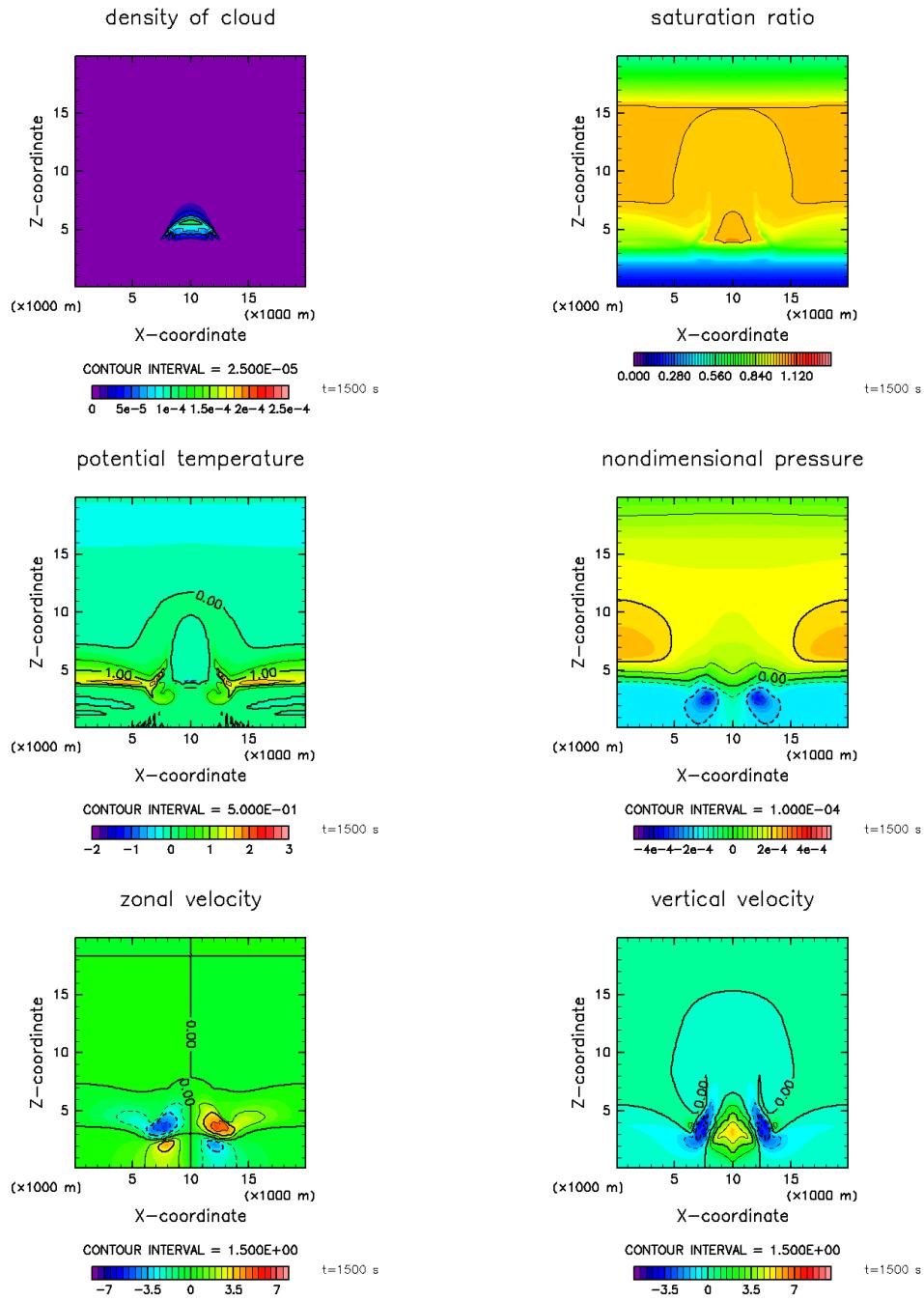


図 6.13: 臨界飽和比が 1 の場合の $t = 1500$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

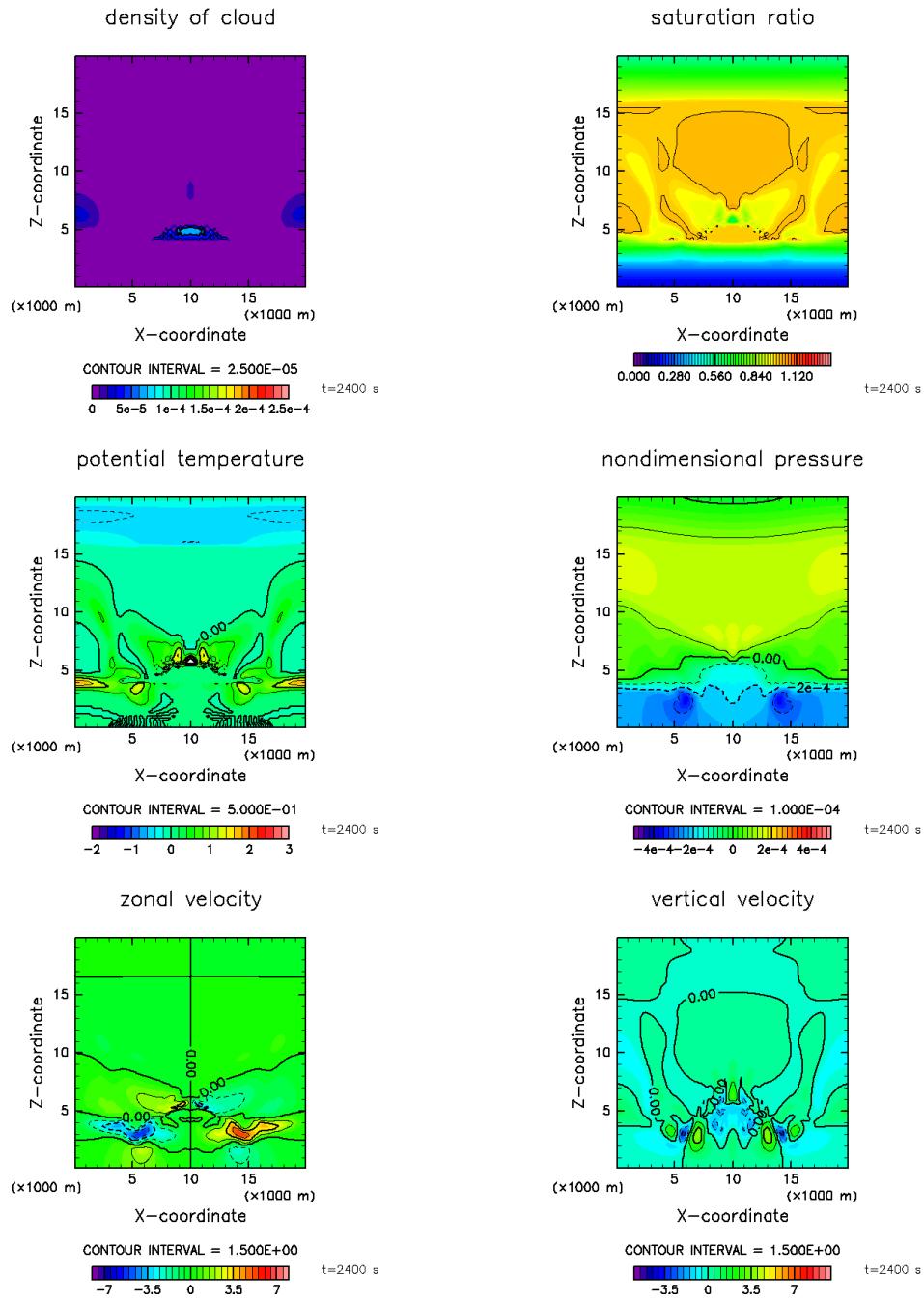


図 6.14: 臨界飽和比が 1 の場合の $t = 2400$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) 圧力擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

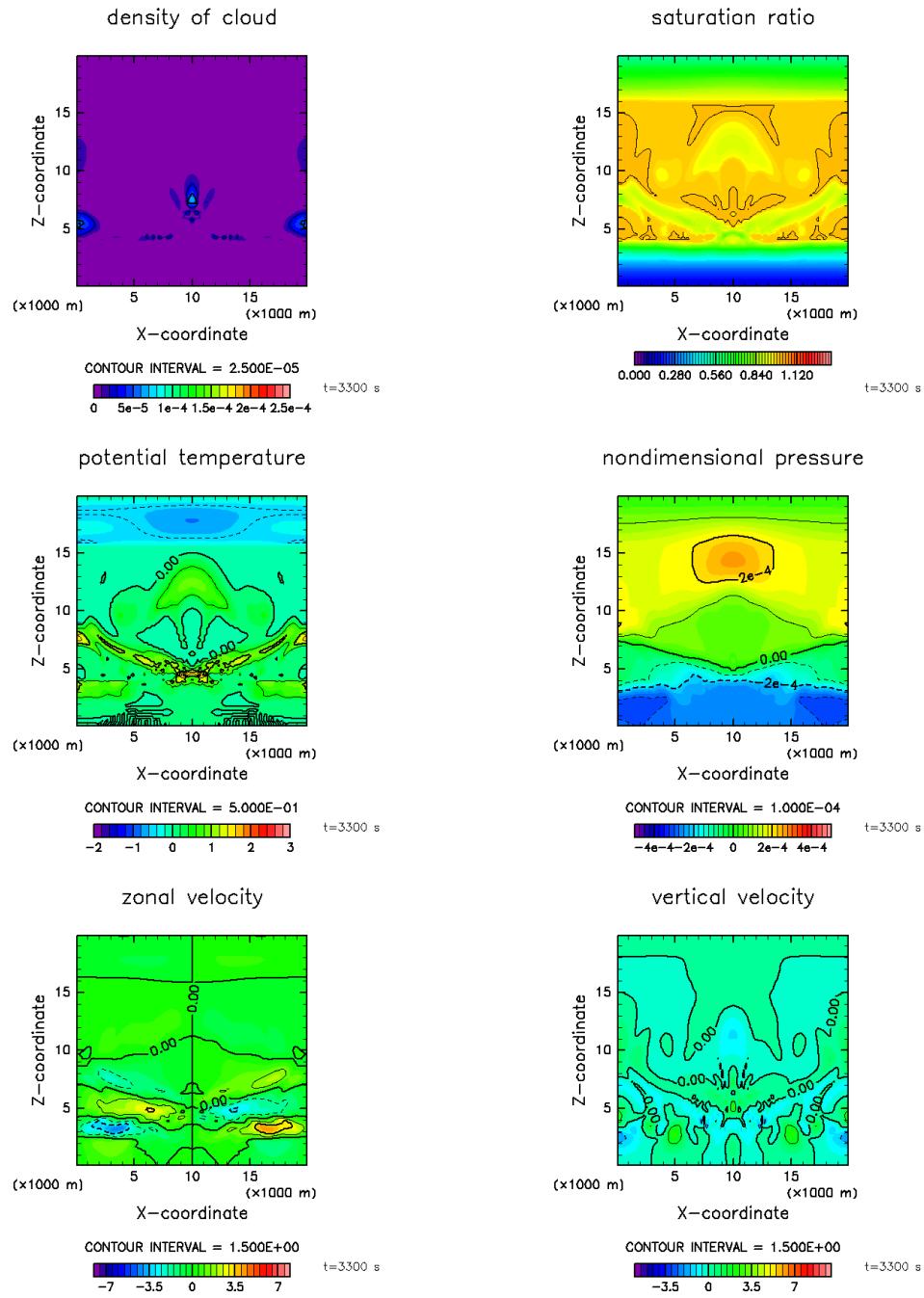


図 6.15: 臨界飽和比が 1 の場合の $t = 3300$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

図 6.11 は臨界飽和比が 1 の場合における $t = 600$ s の各物理量の分布を示している。サーマルが浮力で上昇することにより循環が生じている。サーマル上部では凝結が起き雲ができている。この部分では正の圧力擾乱が存在している。従ってこの正の圧力擾乱が飽和比の上昇を引き起こすことにより雲ができたのではないかと考えることができる。

図 6.11 は臨界飽和比が 1 の場合における $t = 900$ s の各物理量の分布を示している。サーマル上部で発生した圧力擾乱が鉛直方向に伝播していることがわかる。伝播速度はおよそ 20 m/s である。この伝播が大気主成分の凝結による効果により位相速度が小さくなつた音波によるものである可能性がある。しかし、およそ 200 m/s という音速 c の値が凝結により 180 m/s も小さくなるかどうかはわからない。

図 6.13 は臨界飽和比が 1 の場合における $t = 1500$ s の各物理量の分布を示している。凝結高度まで到達したサーマルは回りの空気と同じ温度になるためこれ以上浮力で上昇できなくなり、水平方向に流れる。 $t = 600$ s で発生し始めた雲は成長しその厚さは約 3 km である。雲の内部ではまわりの大気より温位が低く、圧力が高い。

図 6.14 は臨界飽和比が 1 の場合における $t = 2400$ s の各物理量の分布を示している。サーマルによって発生した雲がほとんど消滅している。一方、水平境界付近で新たに凝結が起こり雲ができている。この雲は水平方向の境界条件が周期境界条件のためサーマルが凝結高度に到達したときにできた水平流が水平境界で収束することにより発生した上昇流によって出来たものと考えることができる。

図 6.15 は臨界飽和比が 1 の場合における $t = 3300$ s の各物理量の分布を示している。サーマルによって直接作られた雲はほとんど残っていないがその上にまた新しい雲ができ始めている。この雲も水平境界付近で発生した雲と同様に水平流の収束によって出来たものであると考えることができる。

図 6.16 は臨界飽和比が 1.1 の場合における $t = 600$ s の各物理量の分布を示している。臨界飽和度の値が 1 の場合の同時刻の結果と異なる点は雲がまだ発生していないことおよびサーマル上部で負の温度擾乱および過飽和状態が存在することである。臨界飽和比が 1 の場合に比べて雲の生成開始時間が遅いのは臨界飽和比が高い分、大気中の飽和比の値が臨界飽和比値に到達するのに時間がかかるためである。

図 6.17 は臨界飽和比が 1.1 の場合における $t = 900$ s の各物理量の分布を示している。この時間になると $t = 600$ s ではまだ存在しなかつた雲が発生している。この時発生する潜熱によってサーマル上部に存在していた負の温度擾乱がなくなり、過飽和状態も解消されている。雲が生成される直前に負の温位擾乱が存在していたことから雲の生成される要因としてサーマル上部で発生する負の温位擾乱を考えることができる。一方、同時に正の圧力擾乱も発生しており、これも雲を生成する要因と

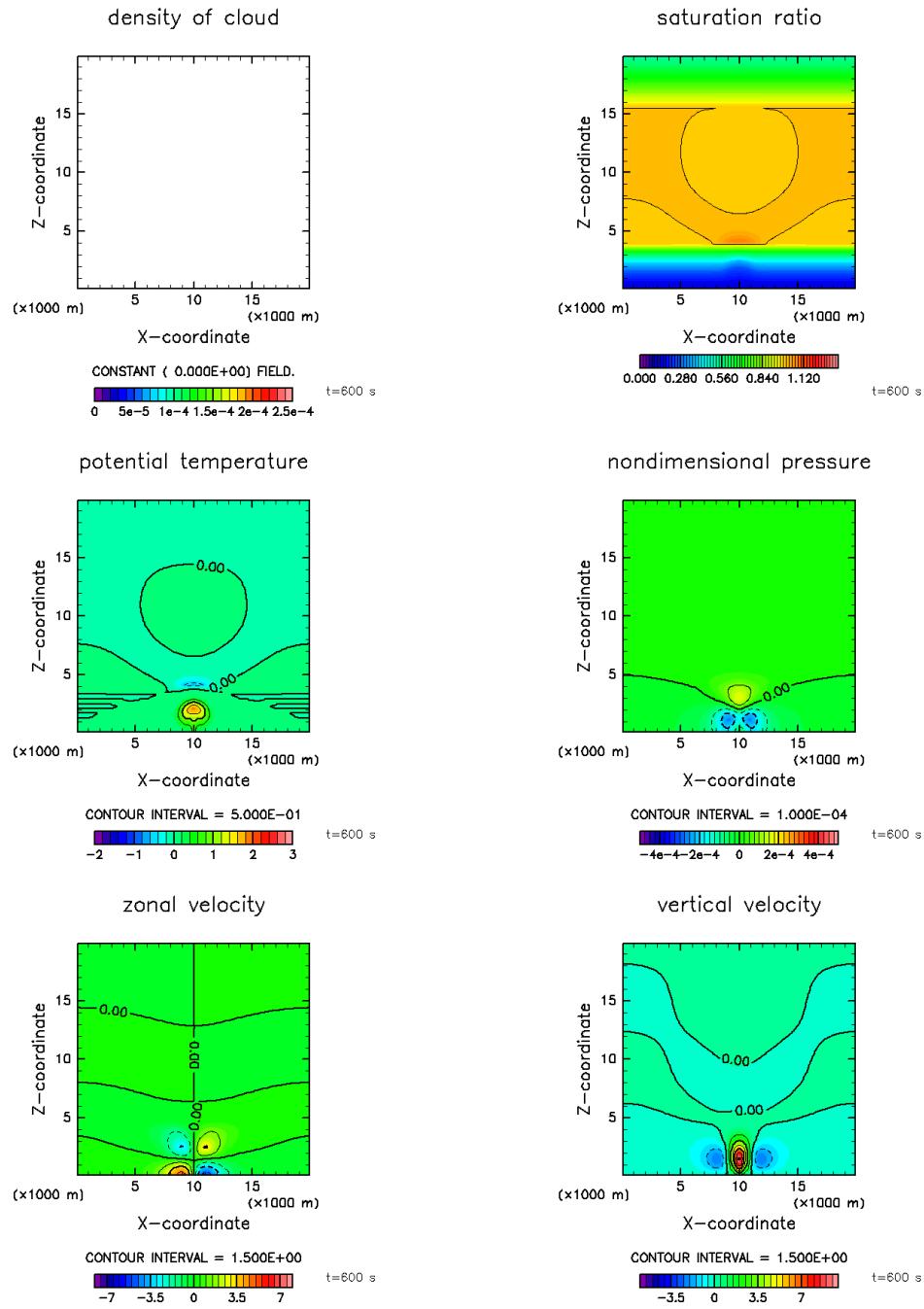


図 6.16: 臨界飽和比が 1.1 の場合の $t = 600$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

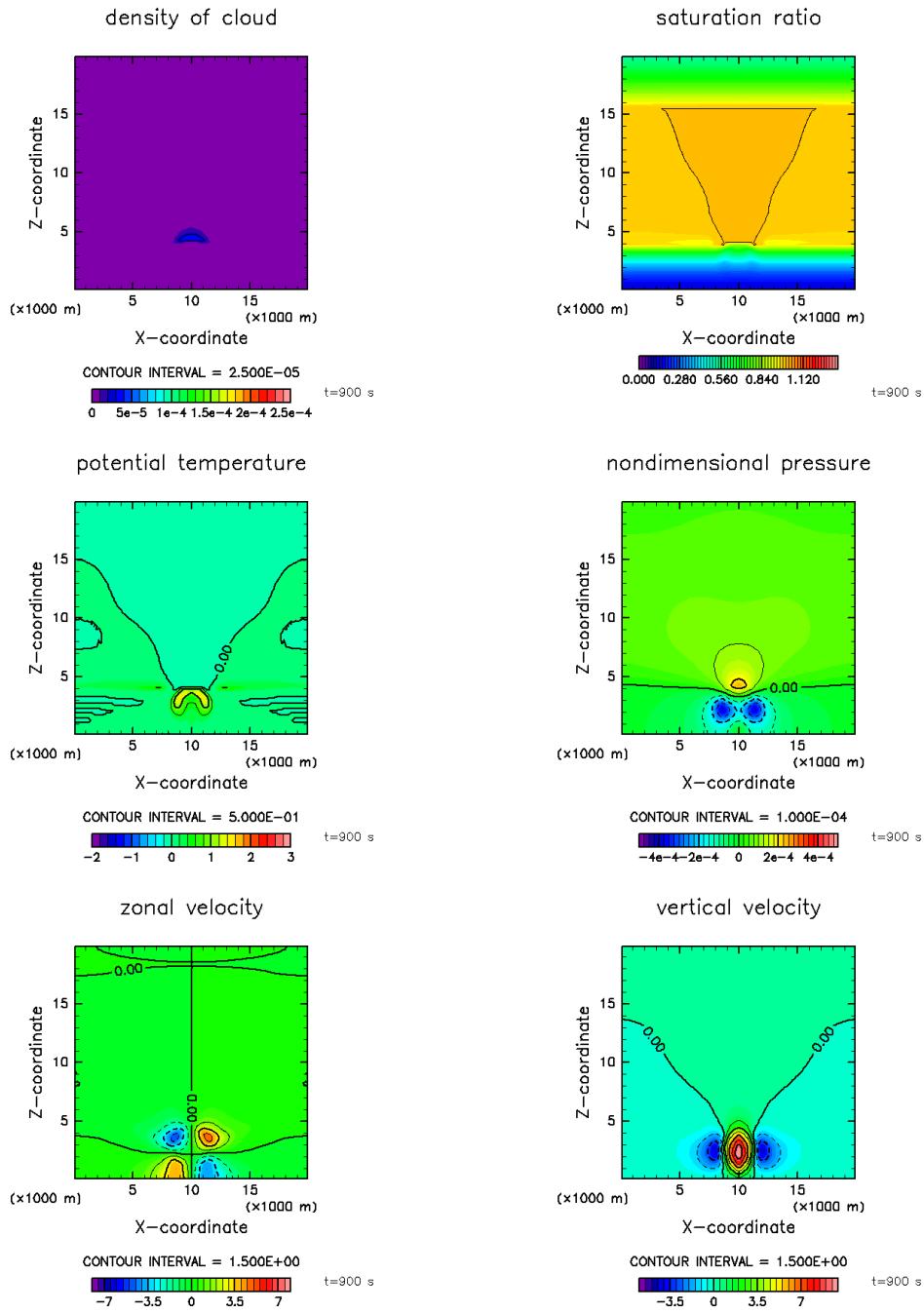


図 6.17: 臨界飽和比が 1.1 の場合の $t = 900$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 温位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

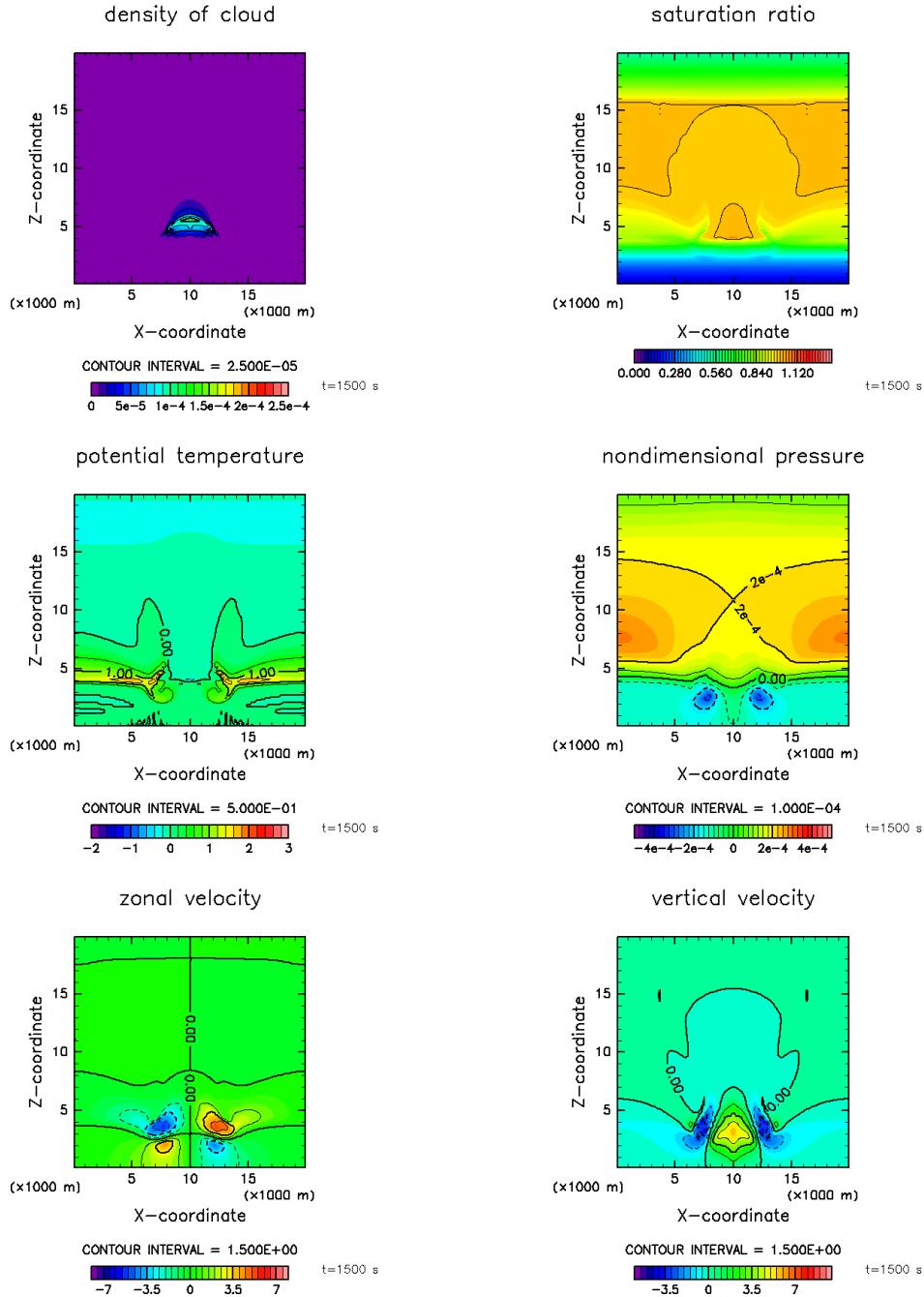


図 6.18: 臨界飽和比が 1.1 の場合の $t = 1500$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

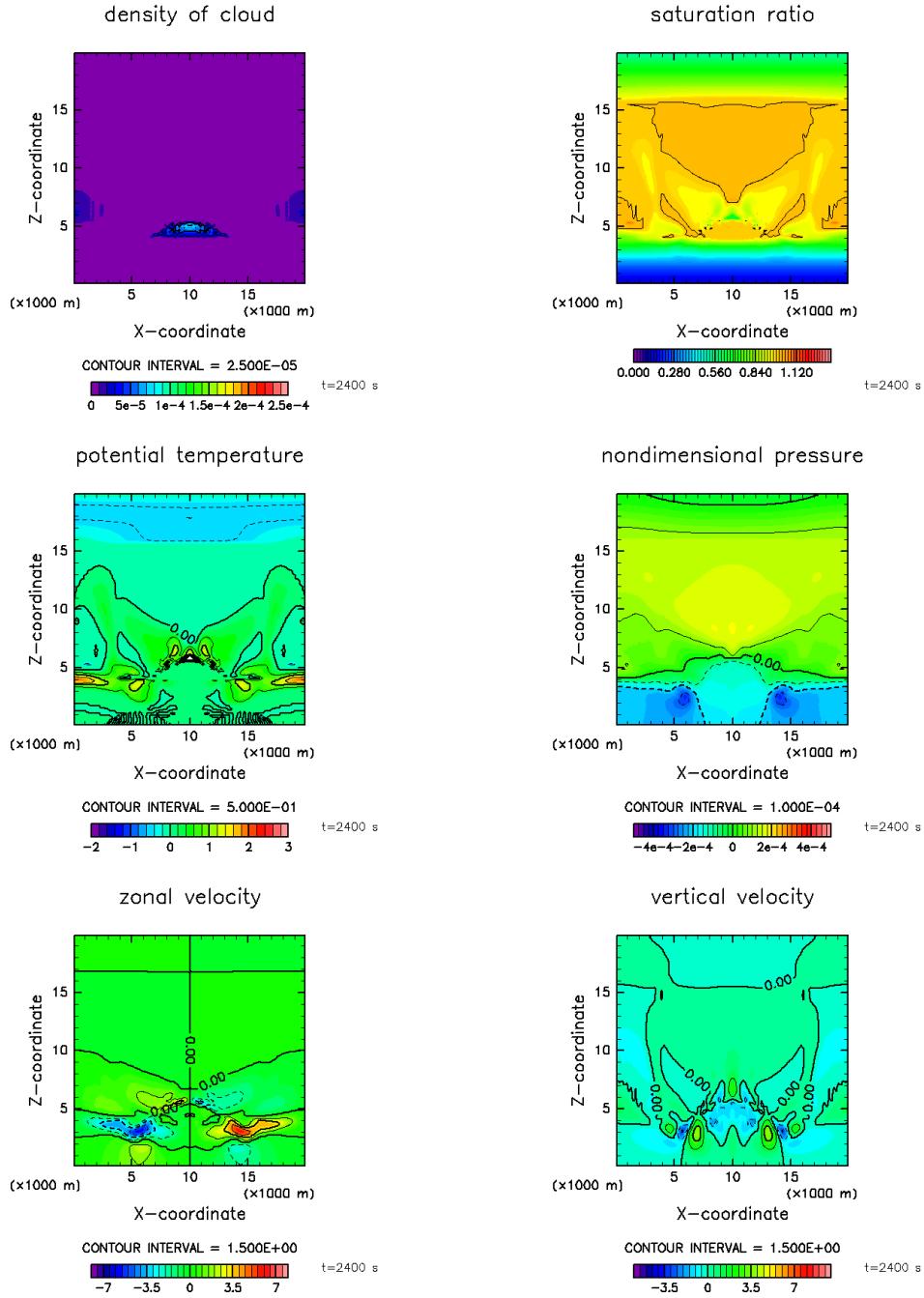


図 6.19: 臨界飽和比が 1.1 の場合の $t = 2400$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

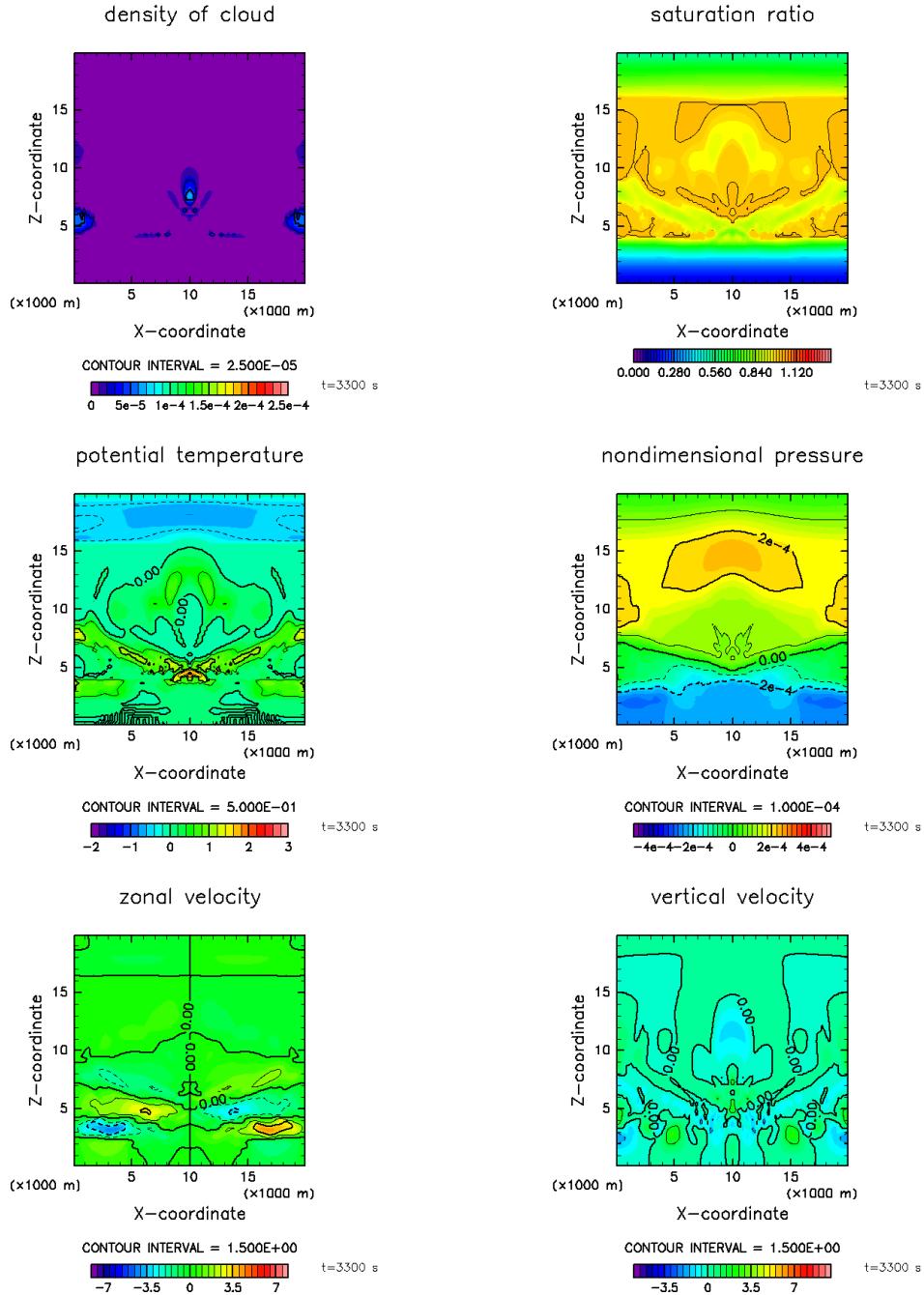


図 6.20: 臨界飽和比が 1.1 の場合の $t = 3300$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

してあげることができる。

臨界飽和比が 1.1 の場合、臨界飽和比が 1 の場合に比べて雲の生成開始時間が遅い。しかし、時間が経つにつれて各物理量のパターンは同じようになる。図 6.18–図 6.20 に臨界飽和比が 1.1 の場合における $t = 1500\text{--}3300\text{ s}$ の各物理量の分布をそれぞれ示す。これらの図に示される物理量の分布のパターンが図 6.13–図 6.15 に示される臨界飽和比が 1 の場合のそれと大体一致していることがわかる。

臨界飽和比が 1.35 の場合における計算結果を図 6.21–図 6.25 に示す。

図 6.22 から臨界飽和比が 1.35 の場合 $t = 900\text{ s}$ でも凝結が起こらず、雲の生成開始時間は臨界飽和比が 1.1 の場合よりもさらに遅い。この時、サーマルは既に凝結高度まで達しており、この部分では過飽和度が 1.2 程度とかなり高くなっている。

臨界飽和比が 1.1 の場合、 $t = 1500\text{ s}$ 以降は各物理量の分布のパターンが臨界飽和比が 1 の場合に一致したが、図 6.23–図 6.25 から臨界飽和比が 1.35 の場合、時間が経っても各物理量の分布のパターンは臨界飽和比が 1 の場合に一致しない。特に生成される雲の最大の厚さが臨界飽和比が 1 および 1.1 の場合は 3 km 程度であったのに対し、臨界飽和比が 1.35 の場合はその値は 5 km にも及ぶ(図 6.24)。

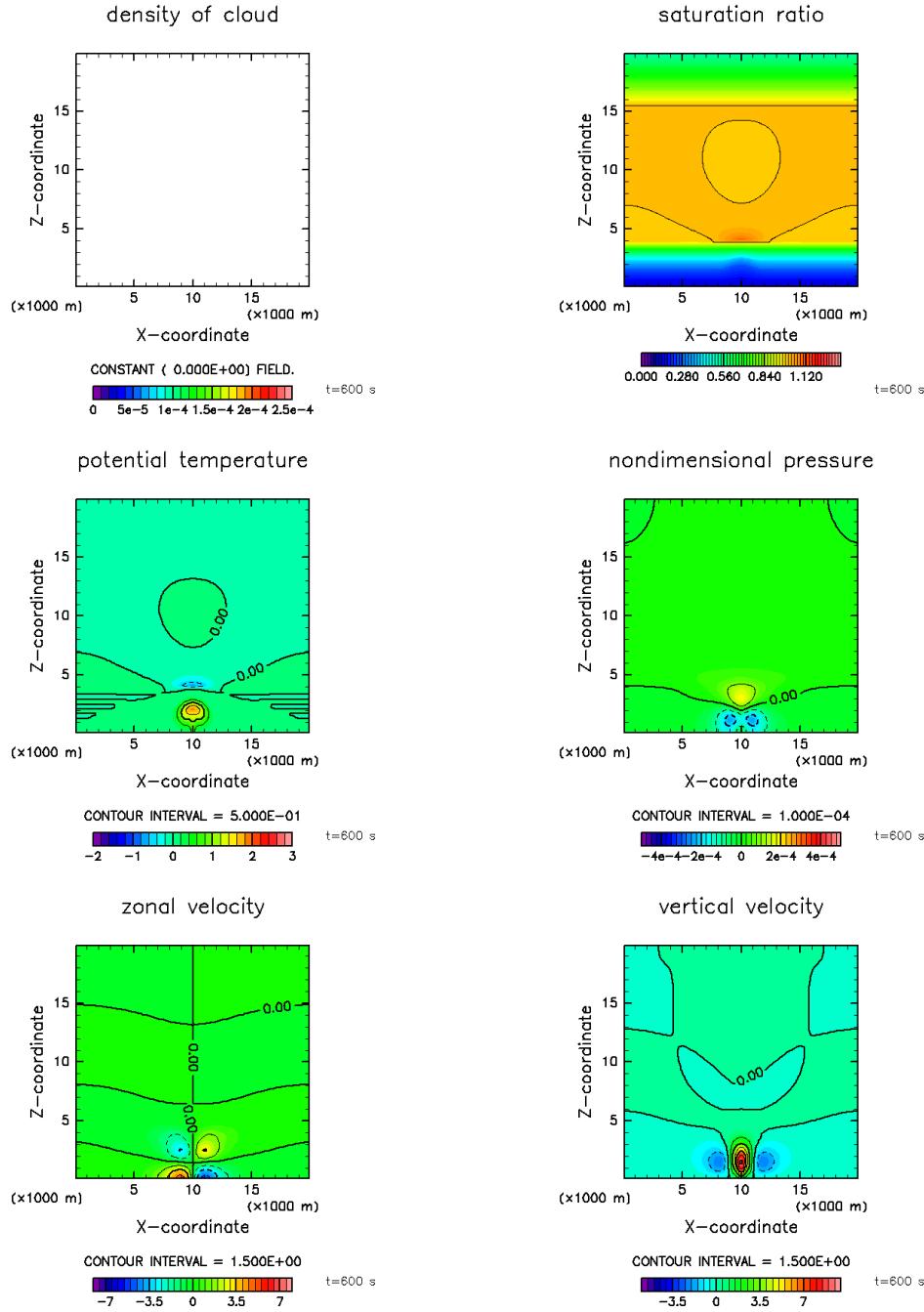


図 6.21: 臨界飽和比が 1.35 の場合の $t = 600$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

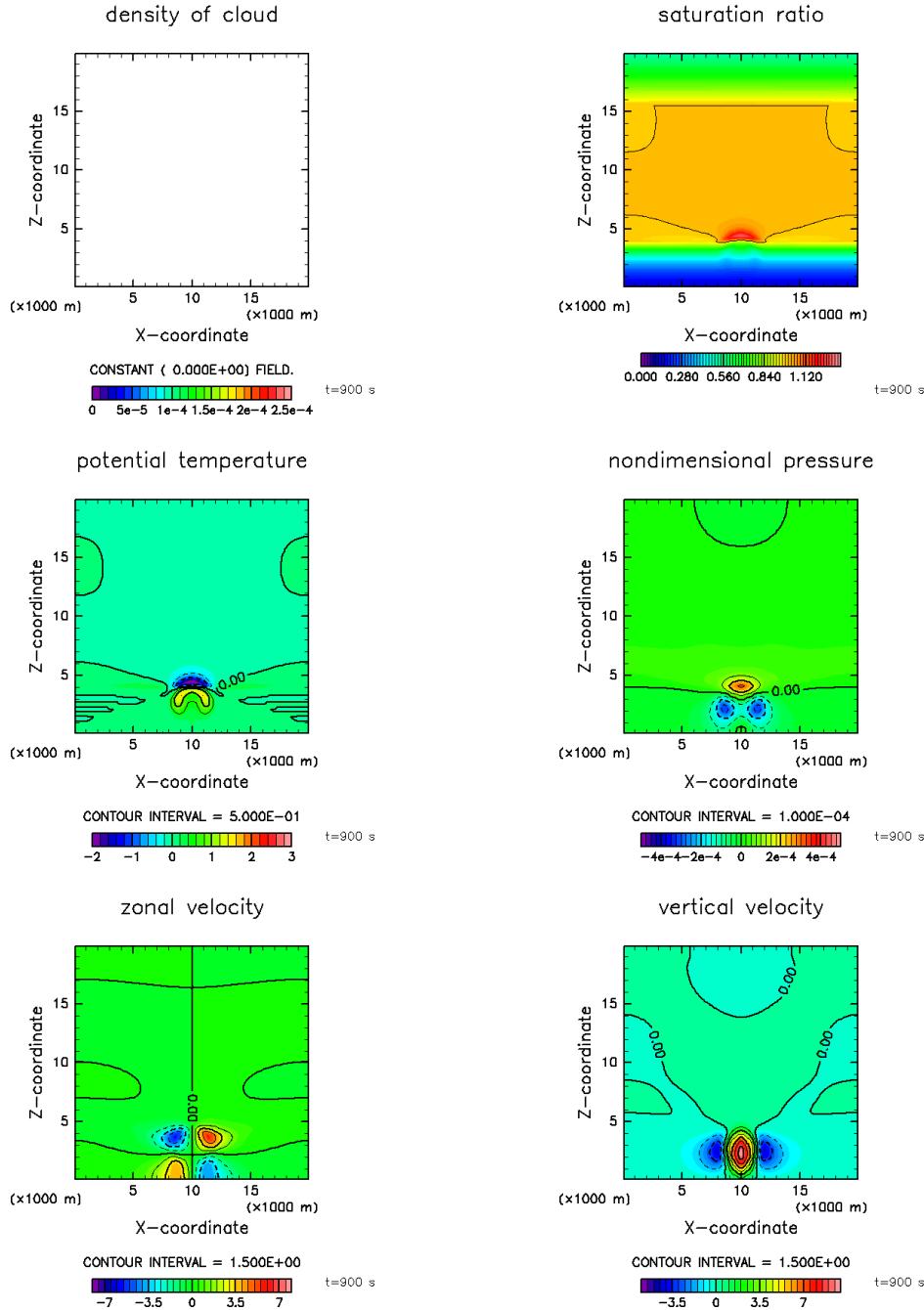


図 6.22: 臨界飽和比が 1.35 の場合の $t = 900$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

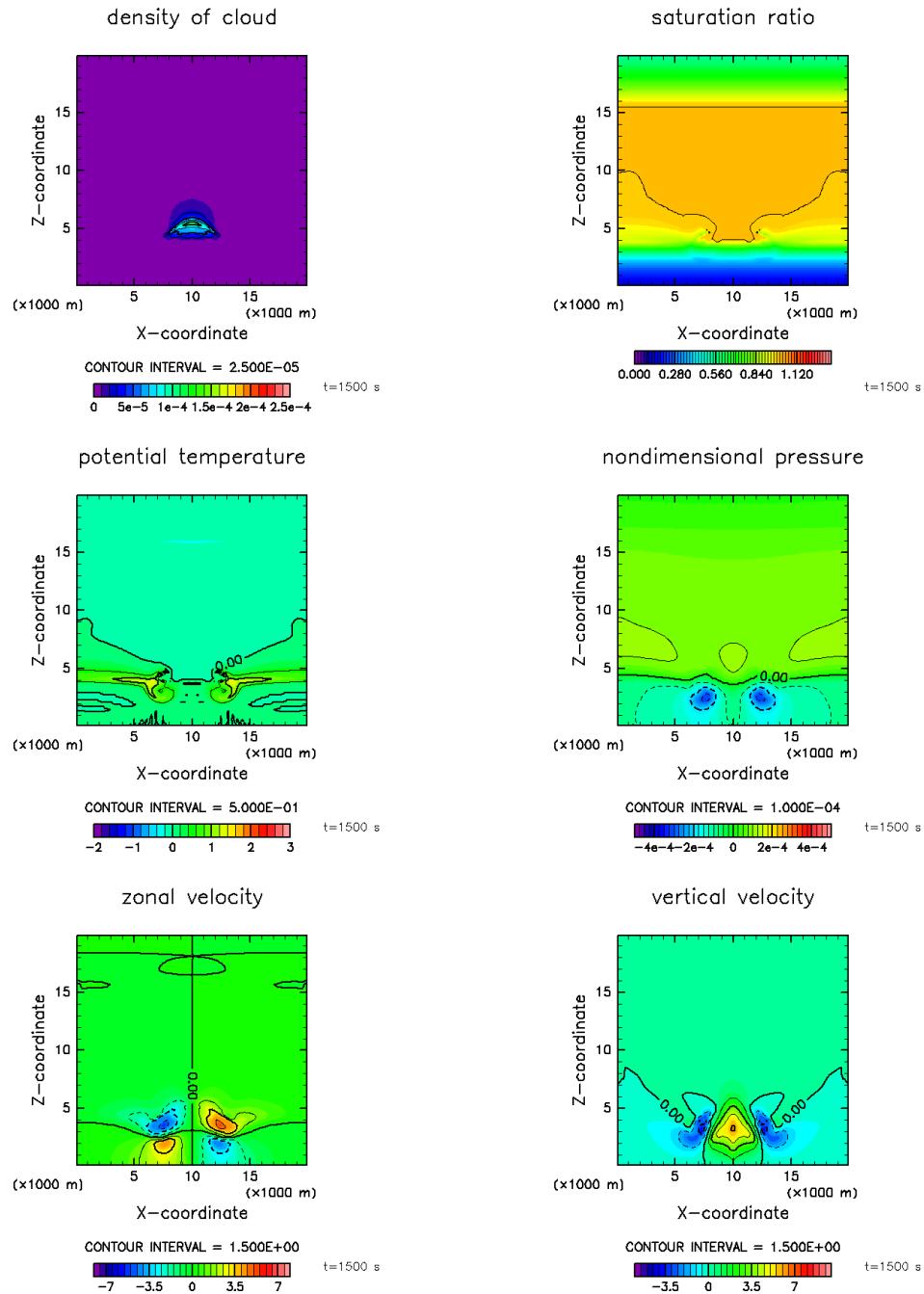


図 6.23: 臨界飽和比が 1.35 の場合の $t = 1500$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

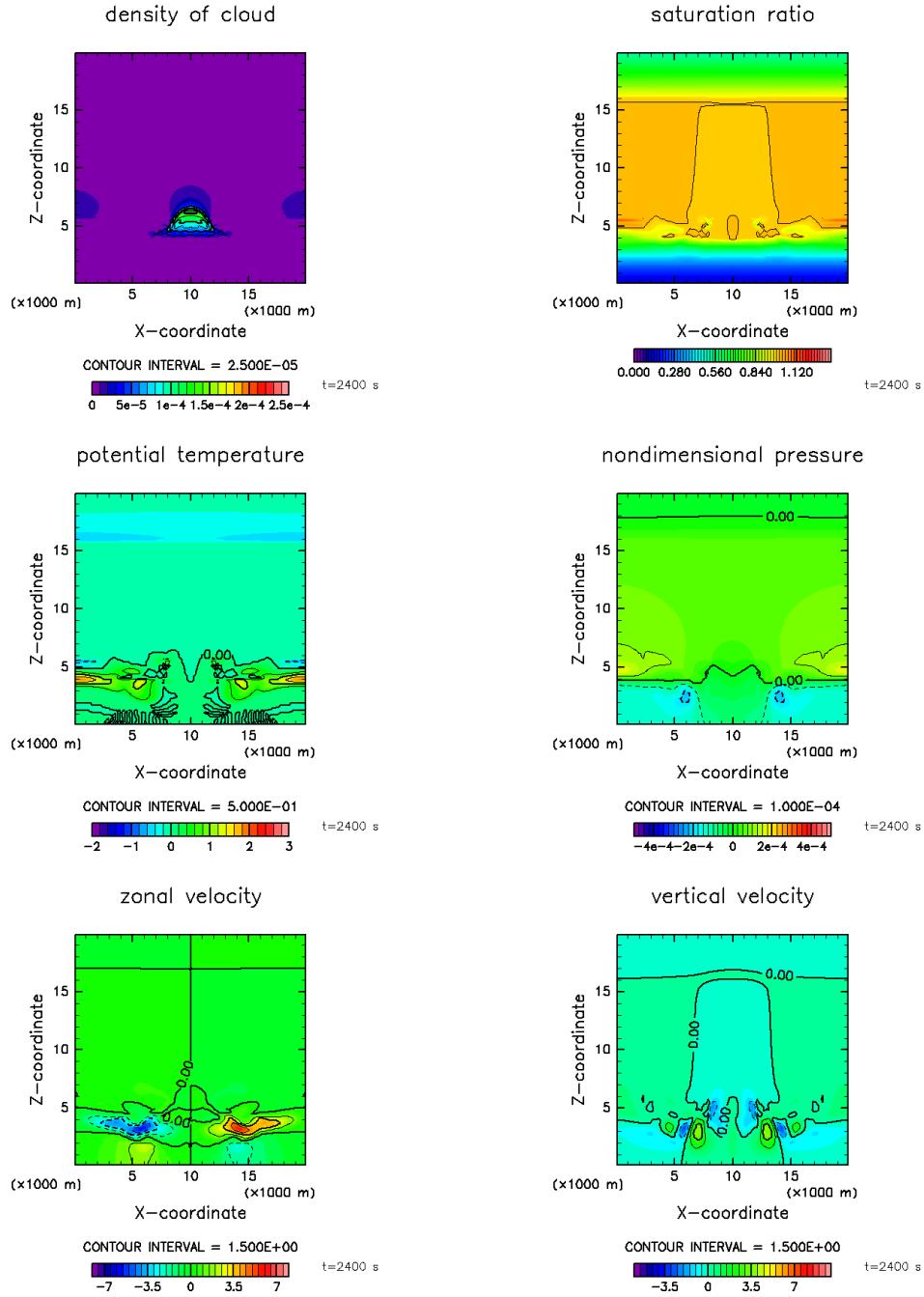


図 6.24: 臨界飽和比が 1.35 の場合の $t = 2400$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

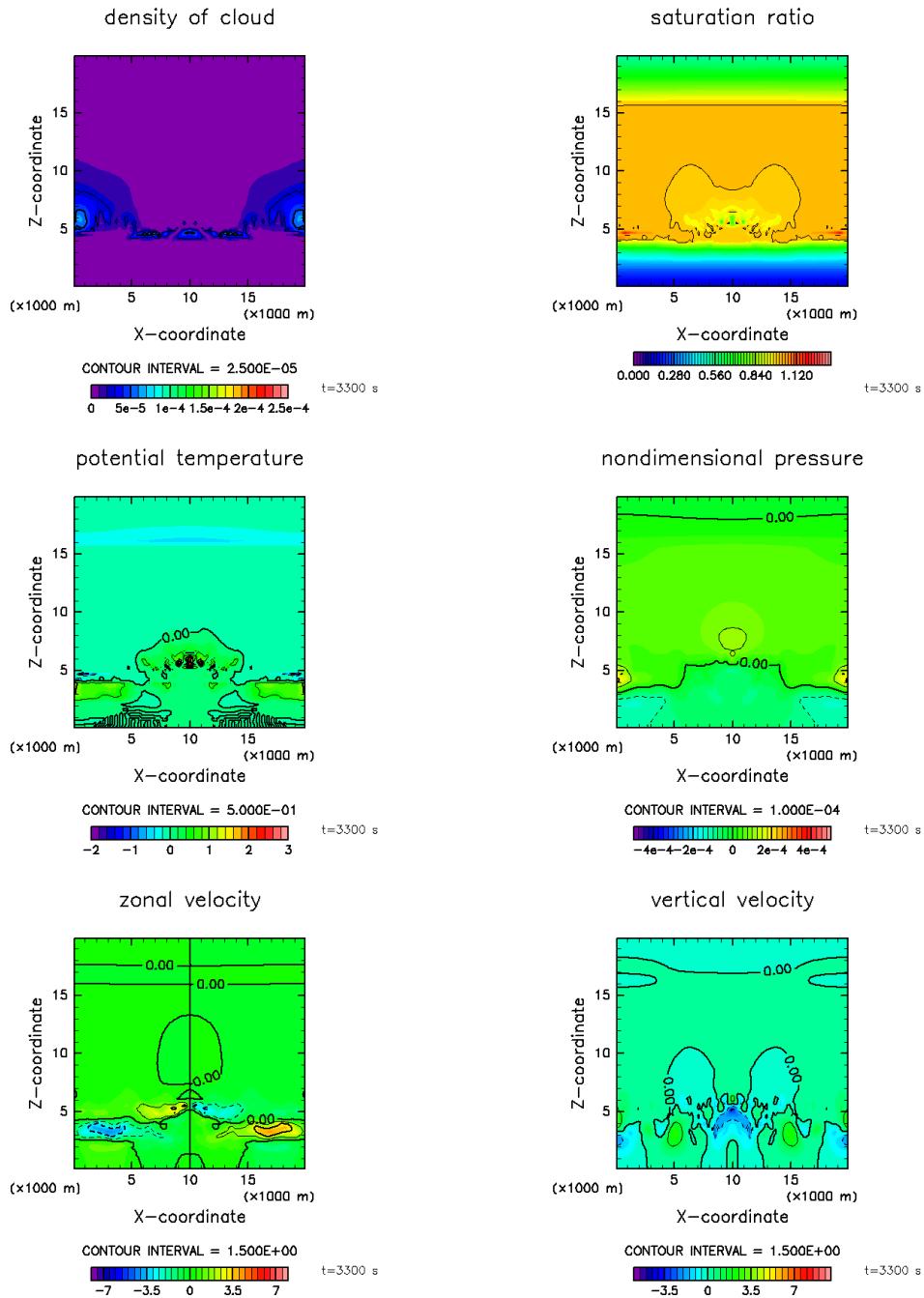


図 6.25: 臨界飽和比が 1.35 の場合の $t = 3300$ s の計算結果. (左上) 雲密度, (右上) 飽和比, (左中) 溫位擾乱, (右中) エクスナー関数擾乱, (左下) 水平速度, (右下) 鉛直速度.

第7章 まとめ

本研究では大気主成分の凝結を考慮した火星大気非静力学モデルを開発し, 大気主成分の凝結が起きた時の流れ場の様子がどうなるかを凝結が起こる大気におけるサーマルの上昇実験を行うことで調べた。

支配方程式として大気の密度変化を表現できる準圧縮方程式を採用した。この方程式に大気主成分の凝結による効果を加えた。多くの地球大気非静力学モデルの場合, 凝結の効果は潜熱による温度変化のみを考慮する。大気主成分の凝結を考える場合はこれに加えて潜熱に伴う熱膨張および大気質量の減少による圧力変化も考慮する必要がある。

凝結量および雲粒の落下量の表現は1個の雲粒の拡散成長を考えることで定式化した。地球大気非静力学モデルでは凝結量および雲粒の落下量を近似的に診断量として表現している。しかし、火星大気ではその近似が成り立つかどうかはわからないため、凝結量および雲粒の落下量の時間発展を計算する必要がある。凝結量は雲粒の拡散成長を用いて表現した。雲粒の落下量の扱いについて考えるために凝結量の式から生成される雲粒の半径のスケールを見積もった。見積もられた雲粒の半径の値は $5\text{--}25\ \mu\text{m}$ 程度であった。この値を用いて雲粒の落下速度を見積もったところその値は $10\ \text{cm/s}$ であり、想像される風速の値に比べて十分小さい値であった。従って、本モデルでは雲粒の落下量は無視した。また、凝結量の式を用いて凝結の時間スケールを見積もった。見積もられた凝結の時間スケールは1–20秒程度であった。

時間方向の離散化にはモード別時間分割法を用い、重力波モードは長い時間ステップで計算し音波モードは短い時間ステップで計算した。凝結に関連する項は見積もられた凝結の時間スケールから短い時間ステップで計算する必要があることがわかった。この考察をもとに方程式の離散化を行った。

開発されたモデルを用いてサーマルの上昇実験を行った。具体的には大気下部にサーマルを置いて、浮力で上昇させた時に形成される二酸化炭素氷雲の成因およびそれによって発生する流れ場のパターンを調べた。火星大気では臨界飽和比が1.35であるという Glandorf et al. (2003) の実験結果を参考にして、臨界飽和比の値を1,

1.1, 1.35 の 3 通りの場合で計算を行った。計算の結果、サーマルの上部で飽和比の値が大きくなり雲が形成された。この部分では温度が下がる効果と圧力上がる効果の 2 つが確認できた（例えば図 6.16 を参照）。また、臨界飽和比の値が 1, 1.1 の場合は雲の形成開始時間が異なるものの、時間が経つにつれて各物理量の分布のパターンはだいたい同じになった（図 6.15, 図 6.20 を参照）。それに対して、臨界飽和比の値が 1.35 の場合は臨界飽和比の値が 1, 1.1 の場合と比べて雲の厚さなどで異なる結果が得られた。（図 6.15, 図 6.25 を参照）。

付録A 定式化についての補遺

A.1 圧力方程式の導出

大気主成分の凝結を考慮した準圧縮方程式における圧力方程式(2.4)を導出する。

大気主成分の凝結を考慮した準圧縮方程式における連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = -M_{cond} \quad (\text{A.1})$$

である。右辺に大気主静分の凝結による大気質量の減少を表す項が入っている。

この式を理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$ を用いて圧力方程式に書き換える。理想気体の状態方程式を無次元圧力 Π と温位 θ を用いて表すと

$$\rho = \frac{p_0}{R} \Pi^{c_p/R-1} \theta^{-1} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで p_0 は地表面圧力である。これを用いると式(A.1)左辺第1項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{p_0}{R} \left\{ \left(\frac{c_p}{R} - 1 \right) \Pi^{c_p/R-2} \theta^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \Pi^{c_p/R-1} \theta^{-2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{p_0}{R} \Pi^{c_p/R-1} \theta^{-1} \left\{ \left(\frac{c_p}{R} - 1 \right) \Pi^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \theta^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{p}{RT} \left\{ \left(\frac{c_p}{R} - 1 \right) \Pi^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \theta^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \\ &= \rho \left\{ \left(\frac{c_p}{R} - 1 \right) \Pi^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \theta^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \\ &= \rho \left\{ \frac{c_v}{R} \Pi^{-1} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \theta^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \\ &= \rho \left\{ \frac{c_p \theta}{c^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \theta^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \\ &\sim \bar{\rho} \left\{ \frac{c_p \bar{\theta}}{\bar{c}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \bar{\theta}^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる。ただし、 c_v は定積比熱で $c_v = c_p - R$ である。よって式 (A.1) は

$$\frac{c_p \bar{\theta}^2}{\bar{c}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = -\frac{\bar{\theta}}{\bar{\rho}} M_{cond} \quad (\text{A.4})$$

となる。この式の左辺第 2 項、第 3 項は

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) &= -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\theta} \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\theta} \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\theta} \mathbf{u}) - \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

と書くことができる。よって連続の式 (A.4) は

$$\frac{c_p \bar{\theta}^2}{\bar{c}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\theta} \mathbf{u}) + \frac{d\theta}{dt} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{\rho}} M_{cond} \quad (\text{A.6})$$

となる。最後に両辺に $\bar{c}^2 / c_p \bar{\theta}$ をかけると主成分の凝結を考慮した圧力方程式 (2.4)

$$\frac{c_p \bar{\theta}^2}{\bar{c}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\theta} \mathbf{u}) + \frac{d\theta}{dt} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{\rho}} M_{cond}$$

を得る。

A.2 準圧縮方程式におけるエネルギー方程式

準圧縮方程式におけるエネルギー方程式を導出する。ただし、ここでは乾燥大気を想定し凝結に関する項を無視する。

乾燥大気の場合、準圧縮方程式の連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.7})$$

である。この式より任意のスカラー量 ϕ に対し

$$\bar{\rho} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \bar{\rho} \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \phi \mathbf{u}) + \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ。この式から準圧縮方程式では ϕ の時間微分をフラックス形式で書くことができないことがわかる。

(2.2) $\times \bar{\rho} u$, (2.3) $\times \bar{\rho} w$ より

$$\frac{\partial \bar{\rho} K}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} K \mathbf{u}) = -c_p \bar{\theta} \cdot \nabla \Pi + \bar{\rho} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} + \bar{\rho} \frac{\theta}{\bar{\theta}} g w - K \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

となる。ここで $K = (u^2 + w^2)/2$, $\mathbf{D}_u = (D_u, D_w)$ とおいた。右辺第3項は

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \frac{\theta}{\bar{\theta}} g w &= \bar{\rho} \frac{\theta}{\bar{\theta}} g \frac{dz}{dt} \\ &= \bar{\rho} \left\{ \frac{\theta d(gz)}{\bar{\theta} dt} + \frac{gz}{\bar{\rho}} \left(\frac{d\theta}{dt} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (Q_{rad} + Q_{dis}) + D_\theta, \right) \right\} \\ &= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\theta}} \frac{d(\theta gz)}{dt} + \frac{gz}{\bar{\theta}} \left(w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (Q_{rad} + Q_{dis}) - D_\theta, \right)\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

と書き換えられる。これを用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho} K}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} K \mathbf{u}) &= -c_p \bar{\theta} \cdot \nabla \Pi + \bar{\rho} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{\theta}} \frac{d(\theta gz)}{dt} \\ &\quad + \frac{gz}{\bar{\theta}} \left(w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (Q_{rad} + Q_{dis}) - D_\theta, \right) - K \frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

となる。さらに θgz の時間微分に対し (A.8) を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{\rho} \left(K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} gz \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho} \left(K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} gz \right) \mathbf{u} \right\} \\ = -c_p \bar{\theta} \cdot \nabla \Pi + \bar{\rho} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \\ + \frac{gz}{\bar{\theta}} \left(w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (Q_{rad} + Q_{dis}) - D_\theta, \right) \\ - \left(K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} gz \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

となる。さらに (2.4) を用いて右辺第1項を変形すると

$$\begin{aligned}-c_p \bar{\theta} \cdot \nabla \Pi &= -\nabla \cdot (c_p \bar{\theta} \bar{\rho} \Pi \mathbf{u}) + c_p \Pi \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\theta} \mathbf{u}) \\ &= -\nabla \cdot (c_p \bar{\theta} \bar{\rho} \Pi \mathbf{u}) - c_p \Pi \frac{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2}{\bar{c}^2} \frac{\partial \Pi}{\partial t} \\ &= -\nabla \cdot (c_p \bar{\theta} \bar{\rho} \Pi \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\bar{\rho}}{2} \left(\frac{c_p \bar{\theta} \Pi}{\bar{c}^2} \right)^2 \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left\{ K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} gz + \frac{1}{2} \left(\frac{c_p \bar{\theta} \Pi}{\bar{c}^2} \right)^2 \right\} \right] + \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho} \left(K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} gz + c_p \bar{\theta} \Pi \right) \mathbf{u} \right\} \\ = \bar{\rho} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} + \frac{gz}{\bar{\theta}} \left(w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} (Q_{rad} + Q_{dis}) - D_\theta, \right) - \left(K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} gz \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

となる。この式を全領域で積分し、境界面を出入りする流れはないとすれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \bar{\rho} \left\{ K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} g z + \frac{1}{2} \left(\frac{c_p \bar{\theta} \Pi}{\bar{c}^2} \right)^2 \right\} dV \\ &= \int \bar{\rho} \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} dV + \int \frac{w g z}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} dV - \int \frac{\bar{\rho} g z}{\bar{T}} (Q_{rad} + Q_{dis}) dV \\ & \quad - \int \frac{\bar{\rho} g z}{\bar{\theta}} D_\theta dV - \int \left(K - \frac{\theta}{\bar{\theta}} g z \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

となる。これが準圧縮方程式のエネルギー方程式である。左辺は全エネルギーの時間変化である。かっこの中の第1項、第2項、第3項はそれぞれ運動エネルギー、浮力による位置エネルギー、弾性エネルギーである。右辺第1項、第2項、第3項、第4項はそれぞれ運動量の拡散、基本場の鉛直温位勾配、非断熱加熱（放射、散逸）、熱の拡散によるエネルギー変化率である。右辺最後の項は準圧縮方程式の場合スカラー量の時間微分がブラックス形式で書けないことによることにより現れる。この項の存在により準圧縮方程式では外部項がない場合でもエネルギーが保存しない。

A.3 雲粒の拡散成長の式の導出

質量 m をもつ雲粒がまわりの大気の拡散によって成長する過程を考える。拡散による雲粒の成長は

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi r_d^2 D \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (\text{A.16})$$

で表される。 r は雲粒の中心からの距離、 D は大気の分子拡散係数である。大気の状態は定常かつ等方であると仮定してこの式を r について解くと

$$\frac{dm}{dt} = -4\pi r_d D (\rho_{r_d} - \rho_\infty) \quad (\text{A.17})$$

となる。ただし、境界条件として $r = r_d$ で $\rho = \rho_{r_d}$ 、 $r \rightarrow \infty$ で $\rho \rightarrow \rho_\infty$ を用いた。ここで理想気体の状態方程式 $p = \rho RT$ を代入すると

$$\frac{dm}{dt} = -4\pi r_d D \left(\frac{p_*(T_{r_d})}{RT_{r_d}} - \frac{p_\infty}{RT_\infty} \right) \quad (\text{A.18})$$

となる。この式の両辺を $p_*(T_\infty)$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_*(T_\infty)} \frac{dm}{dt} &= -\frac{4\pi r_d D}{R} \left(\frac{p_*(T_{r_d})}{p_*(T_{r_d})T_{r_d}} - \frac{p_\infty}{p_*(T_{r_d})T_\infty} \right) \\ &= -\frac{4\pi r_d D}{RT_\infty} \left(\frac{p_*(T_{r_d})}{p_*(T_\infty)} - \frac{p_\infty}{p_*(T_\infty)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

となる。ただし、最後の変形には $(T_{r_d} - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ を用いた。

凝結が起きた時潜熱が開放される。この潜熱が熱伝導によって輸送されると仮定すると

$$L \frac{dm}{dt} = -4\pi r^2 k \frac{dT}{dr} \quad (\text{A.20})$$

が成り立つ。ここで k は大気の熱拡散係数である。大気密度の拡散方程式と同様にこの式を解くと

$$L \frac{dm}{dt} = 4\pi rk(T_{r_d} - T_\infty) \quad (\text{A.21})$$

となる。ただし、境界条件として $r = r_d$ で $T = T_{r_d}$, $r \rightarrow \infty$ で $T \rightarrow T_\infty$ を用いた。ここでクラウジウス-クラペイロンの式(3.8)

$$\frac{dp_*}{dT} = \frac{Lp_*}{RT^2}$$

を積分すると

$$\begin{aligned} \ln \frac{p_*(T_{r_d})}{p_*(T_\infty)} &= \frac{L}{R} \frac{T_{r_d} - T_\infty}{T_{r_d} T_\infty} \\ &\sim \frac{L}{R} \frac{T_{r_d} - T_\infty}{T_\infty^2} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{p_*(T_{r_d})}{p_*(T_\infty)} &= \exp \left(\frac{L}{R} \frac{T_{r_d} - T_\infty}{T_{r_d} T_\infty} \right) \\ &\sim 1 + \frac{L}{R} \frac{T_{r_d} - T_\infty}{T_\infty^2} \\ &\sim 1 + \frac{L^2}{4\pi r_d k R T_\infty^2} \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

となる。最後の変形には式(A.21)を用いた。

式(A.19), (A.23)より

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{4\pi r D p_*(T_\infty)}{R T_\infty} \left(1 + \frac{L^2}{4\pi r_d k R T_\infty^2} \frac{dm}{dt} - \frac{p_\infty}{p_*(T_\infty)} \right) \quad (\text{A.24})$$

となる。この式を整理すると

$$\left(\frac{R T_\infty}{D p_*(T_\infty)} + \frac{L^2}{k R T_\infty^2} \right) \frac{dm}{dt} = 4\pi r_d \left(\frac{p_\infty}{p_*(T_\infty)} - 1 \right) \quad (\text{A.25})$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{RT_\infty}{Dp_*(T_\infty)} \\ R_h &= \frac{L^2}{kRT_\infty^2} \\ S &= \frac{p_\infty}{p_*(T_\infty)} \end{aligned}$$

とおくと

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4\pi r_d}{R_m + R_h} (S - 1) \quad (\text{A.26})$$

となる. R_m, R_h はそれぞれ質量輸送, 熱輸送に関する係数である. S は飽和比である.

単位体積当たりの雲粒の個数を N とし, 雲粒の大きさが全て同じであると仮定すれば単位体積当たりの凝結量 M_{cond} は

$$M_{cond} = N \frac{dm}{dt} = \frac{4\pi r_d N}{R_m + R_h} (S - 1) \quad (\text{A.27})$$

で与えられる.

付録B 離散化の詳細

ここでは支配方程式 (2.2)–(2.5) の離散化について述べる。

B.1 空間方向の離散化

本文中で述べたように格子点配置は水平方向に対しては Arakawa-C 格子を、鉛直方向に対しては Lorenz 格子を用いている(図 B.1)。以下では、スカラー量の格子点をスカラー格子点, u の格子点を x 方向フラックス格子点, w の格子点を z 方向フラックス格子点と呼ぶ。

ここでは、変数の格子点位置を下付き添字を用いて表す(図 B.2)。下付き添字の表し方については、 x 方向に i 番目, z 方向に k 番目のスカラー格子点の位置を (i, k) , x 方向フラックス格子点の位置を $(i(u), k)$, z 方向フラックス格子点の位置を $(i, k(w))$, 格子の角に当たる点を $(i(u), k(w))$ とする。

B.1.1 平均操作

スタッガード格子を用いているため方程式中の各項の格子点位置をそろえるために平均操作が必要になる。以下に必要となる平均操作を示す。

$$\begin{aligned}\Pi_{i(u),k} &= \frac{\Pi_{i+1,k} + \Pi_{i,k}}{2} \\ \Pi_{i,k(w)} &= \frac{\Pi_{i,k+1} + \Pi_{i,k}}{2} \\ \Pi_{i(u),k(w)} &= \frac{\Pi_{i+1,k+1} + \Pi_{i,k+1} + \Pi_{i+1,k} + \Pi_{i,k}}{4} \\ u_{i,k} &= \frac{u_{i(u),k} + u_{i-1(u),k}}{2} \\ u_{i,k(w)} &= \frac{u_{i(u),k+1} + u_{i-1(u),k+1} + u_{i(u),k} + u_{i-1(u),k}}{4}\end{aligned}$$

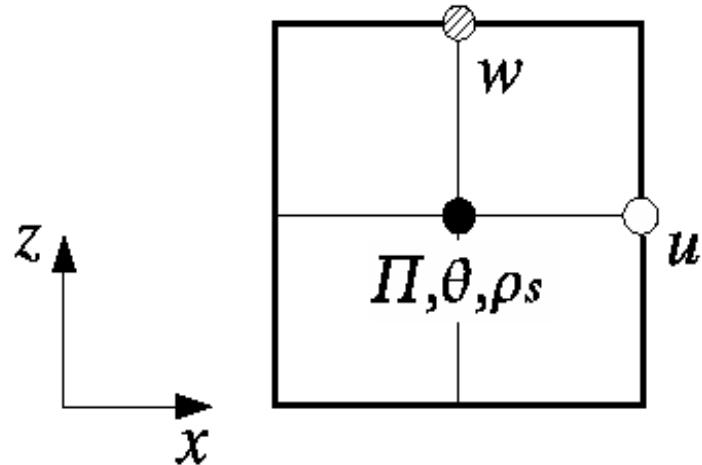


図 B.1: Arakawa-C 格子, Lorenz 格子における変数の配置.

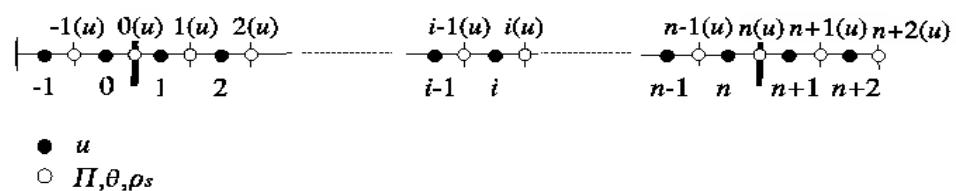


図 B.2: 水平方向における格子点配置. 白丸は水平速度の格子点を, 黒丸はスカラー量の格子点位置を示している. 鉛直方向に対しても鉛直速度とスカラー量の間に同様の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
u_{i(u),k(w)} &= \frac{u_{i(u),k+1} + u_{i(u),k}}{2} \\
w_{i,k} &= \frac{w_{i,k(w)} + w_{i,k-1(w)}}{2} \\
w_{i(u),k} &= \frac{w_{i+1,k(w)} + w_{i,k(w)} + w_{i+1,k-1(w)} + w_{i,k-1(w)}}{4} \\
w_{i(u),k(w)} &= \frac{w_{i+1,k(w)} + w_{i,k(w)}}{2}
\end{aligned}$$

B.1.2 空間微分の離散化

空間微分の離散化について述べる。まず、2次精度中心差分を以下に示す。ここでは、スカラー格子点の変数を $\Pi_{i,k}$, x 方向スカラー格子点の変数を $u_{i(u),k}$, z 方向スカラー格子点の変数を $w_{i,k(w)}$, 格子点の角にあたる変数を $\phi_{i(u),k(w)}$ としている。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{i(u),k} &= \frac{\Pi_{i+1,k} - \Pi_{i,k}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{i,k(w)} &= \frac{\Pi_{i,k+1} - \Pi_{i,k}}{\Delta z} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k} &= \frac{u_{i(u),k} - u_{i-1(u),k}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} &= \frac{u_{i(u),k+1} - u_{i(u),k}}{\Delta z} \\
\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} &= \frac{w_{i+1,k(w)} - w_{i,k(w)}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k} &= \frac{w_{i,k(w)} - w_{i,k-1(w)}}{\Delta z} \\
\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,k(w)} &= \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i-1(u),k(w)}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i(u),k} &= \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i(u),k-1(w)}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

2次精度中心差分は音波に関連する項の微分で用いられる。次に4次精度中心差分を以下に示す。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{i(u),k} &= \frac{9}{8} \frac{\Pi_{i+1,k} - \Pi_{i,k}}{\Delta x} - \frac{1}{24} \frac{\Pi_{i+2,k} - \Pi_{i-1,k}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{i,k(w)} &= \frac{9}{8} \frac{\Pi_{i,k+1} - \Pi_{i,k}}{\Delta z} - \frac{1}{24} \frac{\Pi_{i,k+2} - \Pi_{i,k-1}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k} &= \frac{9}{8} \frac{u_{i(u),k} - u_{i-1(u),k}}{\Delta x} - \frac{1}{24} \frac{u_{i+1(u),k} - u_{i-2(u),k}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} &= \frac{9}{8} \frac{u_{i(u),k+1} - u_{i(u),k}}{\Delta z} - \frac{1}{24} \frac{u_{i(u),k+2} - u_{i(u),k-1}}{\Delta z} \\
\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} &= \frac{9}{8} \frac{w_{i+1,k(w)} - w_{i,k(w)}}{\Delta x} - \frac{1}{24} \frac{w_{i+2,k(w)} - w_{i-1,k(w)}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k} &= \frac{9}{8} \frac{w_{i,k(w)} - w_{i,k-1(w)}}{\Delta z} - \frac{1}{24} \frac{w_{i,k+1(w)} - w_{i,k-2(w)}}{\Delta z} \\
\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i,k(w)} &= \frac{9}{8} \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i-1(u),k(w)}}{\Delta x} - \frac{1}{24} \frac{\phi_{i+1(u),k(w)} - \phi_{i-2(u),k(w)}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i(u),k} &= \frac{9}{8} \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i(u),k-1(w)}}{\Delta z} - \frac{1}{24} \frac{\phi_{i(u),k+1(w)} - \phi_{i(u),k-2(w)}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

音波に関連する項以外は一般的に4次精度中心差分を用いて空間微分を離散化する。

B.1.3 運動方程式

(2.2), (2.3) を空間方向に離散化すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{i(u),k}}{\partial t} &= -u_{i(u),k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i(u),k} - w_{i(u),k} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k} \\
&\quad - c_p \bar{\theta}_{i(u),k} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{i(u),k} + [D_u]_{i(u),k} \tag{B.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{i,k(w)}}{\partial t} &= -u_{i,k(w)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k(w)} - u_{i,k(w)} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \\
&\quad - c_p \bar{\theta}_{i,k(w)} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)_{i,k(w)} + [D_w]_{i,k(w)} + g \frac{\theta_{i,k(w)}}{\bar{\theta}_{i,k(w)}} \tag{B.2}
\end{aligned}$$

となる。

B.1.4 圧力方程式

(2.4) を空間方向に離散化すると

$$\frac{\partial \Pi_{i,k}}{\partial t} = \frac{\bar{c}_{i,k}^2}{c_p \bar{\rho}_{i,k} \bar{\theta}_{i,k}^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\theta} u) \right)_{i,k} + \left(\frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w) \right)_{i,k} \right] \tag{B.3}$$

となる。音速 $\bar{c}_{i,k}$ は

$$\bar{c}_{i,k}^2 = \frac{c_p R}{c_v} \bar{\Pi}_{i,k} \bar{\theta}_{i,k} \quad (\text{B.4})$$

で計算される。

B.1.5 热力学方程式

(2.5) を空間方向に離散化すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{i,k}}{\partial t} &= -u_{i,k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{i,k} - w_{i,k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{i,k} \\ &+ \frac{\bar{\theta}_{i,k}}{\bar{T}_{i,k}} \frac{LM_{cond}{}_{i,k}}{\rho_{i,k} c_p} + \frac{\bar{\theta}_{i,k}}{\bar{T}_{i,k}} Q_{i,k} + [D_\theta]_{i,k}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる。

B.2 時間方向の離散化

音波および凝結に関連する項は短い時間ステップ $\Delta\tau$ で、それ以外の項は長い時間ステップ Δt で離散化する。音波に関連する項は HE-VI 法を用いて、それ以外の項はリープフロッグ法を用いる。

B.2.1 運動方程式と圧力方程式

(2.2) を時間方向に離散化すると

$$u_{i(u),k}^{\tau+\Delta\tau} = u_{i(u),k}^\tau - \left(c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial x} \right)_{i(u),k} \Delta\tau + F_u^t{}_{i(u),k} \Delta\tau \quad (\text{B.6})$$

となる。 F_u は音波に関連しない項で

$$F_u^t{}_{i(u),k} = - \left(u^t \frac{\partial u^t}{\partial x} \right)_{i(u),k} - \left(w^t \frac{\partial u^t}{\partial z} \right)_{i(u),k} + [D_u]_{i(u),k}^{t-\Delta t}, \quad (\text{B.7})$$

である。

(2.3), (2.4) を離散化すると

$$w_{i,k(w)}^{\tau+\Delta\tau} = w_{i,k(w)}^\tau - c_p \bar{\theta}_{i,k(w)} \left[\beta \frac{\partial \Pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} + (1-\beta) \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \Delta\tau + F_w^t \Delta\tau, \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} &= \Pi_{i,k}^\tau - \left[\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\theta} u^{\tau+\Delta\tau}) \right]_{i,k} \Delta\tau \\ &\quad - \beta \left[\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w^{\tau+\Delta\tau}) \right]_{i,k} \Delta\tau + (1-\beta) \left[\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau) \right]_{i,k} \Delta\tau \\ &\quad + \left[\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \right]_{i,k} \Delta\tau \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる. F_w は音波, 凝結に関連しない項で

$$\begin{aligned} F_w^t_{i,k(w)} &= -u_{i,k(w)}^t \left(\frac{\partial w^t}{\partial x} \right)_{i,k(w)} - w_{i,k(w)}^t \left(\frac{\partial w^t}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \\ &\quad + g \frac{\theta_{i,k(w)}^t}{\bar{\theta}_{i,k(w)}} + [D_w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

である. (B.9) に (B.8) を代入して $w^{\tau+\Delta\tau}$ を消去する. (B.9) の $u^{\tau+\Delta\tau}$ は (B.8) で求めた値を用いる. 式を整理すると

$$\begin{aligned} \Pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} &= \Pi_{i,k}^\tau - \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\theta} u^{\tau+\Delta\tau}) \Delta\tau + \beta^2 \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2 \frac{\partial \Pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right) (\Delta\tau)^2 \\ &\quad - \beta \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - (1-\beta) c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial z} \Delta\tau + F_w^t \Delta\tau \right\} \right] \Delta\tau \\ &\quad + (1-\beta) \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau) \Delta\tau + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \Delta\tau \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

となる. 左辺に時刻 $\tau + \Delta\tau$ の項, 右辺に時刻 τ, t の項をまとめると,

$$\begin{aligned} &\Pi^{\tau+\Delta\tau} - \beta^2 \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2 \frac{\partial \Pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right) (\Delta\tau)^2 \\ &= \Pi^\tau - \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{\theta} u^{\tau+\Delta\tau}) \Delta\tau \\ &\quad - \beta \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\rho} \bar{\theta} \left\{ w^\tau - (1-\beta) c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial z} \Delta\tau + F_w^t \Delta\tau \right\} \right] \Delta\tau \\ &\quad + (1-\beta) \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau) \Delta\tau + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \Delta\tau \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

左辺の鉛直微分に対し 2 次精度中心差分を用いてこの式を空間方向に離散化すると

$$\begin{aligned}
 & -\Delta\tau^2\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} (c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2)_{i,k(w)} \Pi_{i,k+1} \\
 & + \left[1 + \Delta\tau^2\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ (c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2)_{i,k(w)} + (c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2)_{i,k-1(w)} \right\} \right] \Pi_{i,k} \\
 & -\Delta\tau^2\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} (c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2)_{i,k-1(w)} \Pi_{i,k-1} \\
 & = \left[\Pi - \Delta\tau(1-\beta) \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}\bar{\theta}w^\tau) - \Delta\tau \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\theta}} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right. \\
 & \quad \left. - \Delta\tau\beta \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \bar{\rho}\bar{\theta} \left(w^\tau - \Delta\tau(1-\beta)c_p\bar{\theta} \frac{\partial\Pi^\tau}{\partial z} + F_w^t \Delta\tau \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \Delta\tau \right]_{i,k} \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

上下境界を固定壁とする場合、境界条件は

$$w_{i,km(w)} = 0 \tag{B.14}$$

$$w_{i,0(w)} = 0 \tag{B.15}$$

となる。 km は鉛直方向の格子点数である。

上部境界条件 (B.14) より (B.8) は

$$\left[\beta \frac{\partial\Pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right]_{i,km(w)} = - \left[(1-\beta) \frac{\partial\Pi^\tau}{\partial z} \right]_{i,km(w)} + \left[\frac{F_w^t}{c_p\bar{\theta}} \right]_{i,km(w)} \equiv E_{i,k(w)} \tag{B.16}$$

となる。 (B.13) に $k = km$ を代入し (B.16) を用いると

$$\begin{aligned}
 & \left[1 + \Delta\tau^2\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2)_{i,km-1(w)} \right] \Pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
 & -\Delta\tau^2\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2)_{i,km-1(w)} \Pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau} \\
 & = \left[\Pi^\tau - \Delta\tau(1-\beta) \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}\bar{\theta}w^\tau) - \Delta\tau \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\theta}} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right. \\
 & \quad \left. - \Delta\tau\beta \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \bar{\rho}\bar{\theta} \left(w^\tau - \Delta\tau(1-\beta)c_p\bar{\theta} \frac{\partial\Pi^\tau}{\partial z} + F_w^t \Delta\tau \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \Delta\tau \Big]_{i,km} \\
& - \Delta\tau^2 \beta \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,km(w)} E_{i,km}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

となる。

下部境界条件 (B.15) より (B.8) は

$$\left[\beta \frac{\partial \Pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right]_{i,0(w)} = - \left[(1-\beta) \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial z} \right]_{i,0(w)} + \left[\frac{F_w^t}{c_p \bar{\theta}} \right]_{i,0(w)} \equiv E_{i,0(w)} \tag{B.18}$$

となる。 (B.13) に $k = 1$ を代入し (B.18) を用いると

$$\begin{aligned}
& - \Delta\tau^2 \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,1(w)} \Pi_{i,2}^{\tau+\Delta\tau} \\
& \left[1 + \Delta\tau^2 \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,1(w)} \right] \Pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
& = \left[\Pi^\tau - \Delta\tau(1-\beta) \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau) - \Delta\tau \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right. \\
& \quad \left. - \Delta\tau \beta \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \bar{\rho} \bar{\theta} \left(w^\tau - \Delta\tau(1-\beta) c_p \bar{\theta} \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial z} + F_w^t \Delta\tau \right) \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \Delta\tau \right]_{i,1} \\
& - \Delta\tau^2 \beta \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,0(w)} E_{i,0}
\end{aligned} \tag{B.19}$$

となる。

(B.13), (B.17), (B.19) をまとめて行列の形で書くと

$$\left[\begin{array}{ccccc} A_1 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ C_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{km-1} & B_{km} \\ 0 & 0 & \dots & C_{km-1} & A_{km} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \Pi_{1,1} & \Pi_{2,1} & \dots & \Pi_{km-1,1} & \Pi_{km,1} \\ \Pi_{1,2} & \Pi_{2,2} & \dots & \Pi_{km-1,2} & \Pi_{km,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Pi_{1,km-1} & \Pi_{2,km-1} & \dots & \Pi_{km-1,km-1} & \Pi_{km,km-1} \\ \Pi_{1,km} & \Pi_{2,km} & \dots & \Pi_{km-1,km} & \Pi_{km,km} \end{array} \right]^{\tau+\Delta\tau}$$

$$= \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & \dots & D_{km-1,1} & D_{km,1} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & \dots & D_{km-1,2} & D_{km,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{1,km-1} & D_{2,km-1} & \dots & D_{km-1,km-1} & D_{km,km-1} \\ D_{1,km} & D_{2,km} & \dots & D_{km-1,km} & D_{km,km} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

となる。左辺の係数行列は3重対角行列であることに注意。係数行列は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} A_k &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,k(w)} + (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,k-1(w)} \right\} \\ &\quad (k = 2, 3, \dots, km - 1), \\ A_1 &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,1(w)}, \\ A_{km} &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,km-1(w)}, \\ B_k &= -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{k-1} \frac{1}{\Delta z^2} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,k-1(w)}, \\ C_k &= -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{k+1} \frac{1}{\Delta z^2} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,k(w)}, \\ D_{i,k} &= \Pi_{i,k}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_k \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,k} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \right)_k \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,k} + F_{i,k} \\ &\quad (k = 2, 3, \dots, km - 1) \\ D_{i,1} &= \Pi_{i,1}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,1} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \right)_1 \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,1} + F_{i,1} \\ &\quad - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,0(w)} E_{i,0(w)} \\ D_{i,km} &= \Pi_{i,km}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right)_{km} \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta} w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,km} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{c_p \bar{\theta}} \right)_{km} \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,km} + F_{i,km} \\ &\quad + \Delta^2 \beta \left(\frac{\bar{c}^2}{c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2} \right) \frac{1}{\Delta z} (c_p \bar{\rho} \bar{\theta}^2)_{i,km(w)} E_{i,km(w)} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$E_{i,k(w)} = - \left[(1 - \beta) \frac{\partial \Pi^\tau}{\partial z} \right]_{i,k(w)} + \left[\frac{F_w^t}{c_p \bar{\theta}} \right]_{i,k(w)}$$

$$F_{i,k} = \left[-\Delta\tau\beta \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\rho}\bar{\theta}^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \bar{\rho}\bar{\theta} \left(w^\tau - \Delta\tau(1-\beta)c_p\bar{\theta} \frac{\partial\Pi^\tau}{\partial z} + F_w^t\Delta\tau \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\bar{c}^2}{c_p\bar{\theta}^2} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \frac{L}{c_p} - 1 \right) \frac{M_{cond}^\tau}{\bar{\rho}} \Delta\tau \right]_{i,k}$$

この連立方程式を解くことで $\Pi^{\tau+\Delta\tau}$ が求められる。さらに (B.8) に求めた $\Pi^{\tau+\Delta\tau}$ を代入することで $w^{\tau+\Delta\tau}$ が求められる。

B.2.2 凝結物質保存の式

(2.6) を離散化すると

$$\rho_s^{\tau+\Delta\tau} = \rho_s^\tau + M_{cond}^\tau \Delta\tau + F_{\rho_s}^t \Delta\tau \quad (\text{B.21})$$

となる。 F_{ρ_s} は音波、凝結に関連しない項で

$$F_{\rho_s}^t = -\nabla \cdot (\rho_s^t \mathbf{v}^t) \quad (\text{B.22})$$

である。

B.2.3 熱力学の式

(2.5) を離散化すると

$$\theta_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} = \theta_{i,k}^\tau + F_\theta^t \Delta\tau + \frac{\bar{\theta}_{i,k}}{\bar{T}_{i,k}} \frac{LM_{cond}^\tau}{c_p\bar{\rho}_{i,k}} \quad (\text{B.23})$$

となる。 F_θ^t は音波、凝結に関連しない項で

$$F_\theta^t = -u_{i,k}^t \left(\frac{\partial\theta^t}{\partial x} \right)_{i,k} - w_{i,k}^t \left(\frac{\partial\theta^t}{\partial z} \right)_{i,k} - w_{i,k}^t \left(\frac{\partial\bar{\theta}^t}{\partial z} \right)_{i,k} \\ + \frac{\bar{\theta}_{i,k}}{\bar{T}_{i,k}} (Q_{rad} + Q_{dis})_{i,k}^t + D_{\theta i,k}^{t-\Delta t} \quad (\text{B.24})$$

である。

B.3 数値粘性項

移流項の空間微分を中心差分を用いて離散化すると、計算不安定を起こすことがある。この計算不安定を抑えるために人工的な数値粘性項を運動方程式および熱力学方程式の移流項に加える。

任意の予報変数を ϕ とすると数値粘性項は

$$\nu_H \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu_V \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{B.25})$$

で表される。 ν_H, ν_V は数値粘性係数である。数値粘性係数の値は $\nu_H = \nu_V = 1.0 \times 10^{-4} \Delta x^2 / \Delta t$ とした（数値粘性系数の決め方については 5.1.4 節を参照のこと）。

B.4 音波減衰項

モード別時間分割法を用いると音波についての CFL 条件を満たしているにもかかわらず計算不安定を起こすことがある (Skamarock and Klemp, 1992)。この計算不安定を抑えるため運動方程式 (2.2), (2.3) 中にある無次元圧力を

$$\Pi - \alpha \text{Div} \quad (\text{B.26})$$

で置き換える。ここで, Div は速度場の発散で

$$\text{Div} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{B.27})$$

である。この $-\alpha \text{Div}$ は音波減衰項と呼ばれる。Skamarock and Klemp (1992) によると安定な計算のためには

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau} \quad (\text{B.28})$$

とする必要がある。本モデルでは音波減衰項の係数は $\alpha = 5.0 \times 10^{-7} \times \Delta x^2 / \Delta t$ とした（音波減衰項の係数の決め方については 5.1.2 節を参照のこと）。

B.5 Asselin の時間フィルタ

リープフロッグ法を用いたことによる計算モードの增幅を抑制するため長い時間ステップの計算 1 回ごとに Asselin(1972) の時間フィルタを適用する。

任意の予報変数を ϕ として、時間フィルタ適用後の予報変数を $\bar{\phi}$ で書くことにすると、時間フィルタの作用は

$$\bar{\phi}^t = \phi^t + \mu_a(\bar{\phi}^{t-\Delta t} - 2\phi^t + \phi^{t+\Delta t}) \quad (\text{B.29})$$

と表される。 μ_a はフィルタの強さを示す係数である。本計算においては $\mu_a = 0.1$ とした。

付録C 飽和領域を含む場合における 温度および圧力の鉛直分布の 計算方法

ここでは以下のような場合の温度、圧力分布の計算方法について述べる。

- 地表面から温度は乾燥断熱減率で減少する。
- ある飽和比に達したらその高度から上では温度は湿潤断熱減率で減少する。
- さらにある温度に達したらそこから上では等温になる。
- いずれの点においても圧力は静水圧平衡の式を満たす。

まず最初に乾燥断熱線、湿潤断熱線、等温線に従う領域の温度、圧力分布をそれぞれ求める。

乾燥断熱線に従う層の温度分布は

$$T = T_0 - \frac{g}{c_p} z \quad (\text{C.1})$$

で与えられる。 T_0 は地表面温度である。温度と圧力の関係式はこの式と静水圧平衡の式から求められる。静水圧平衡の式を変形すると

$$\frac{dp}{dT} \frac{dT}{dz} = -\frac{p}{RT} \quad (\text{C.2})$$

となる。この式の左辺に式 (C.1) を代入すると

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{c_p} \frac{dT}{T} \quad (\text{C.3})$$

となる。この式を積分すると

$$\left(\frac{p}{p_0} \right) = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-g/c_p} \quad (\text{C.4})$$

となる。 p_0 は地表面圧力である。

湿潤断熱線に従う層では温度と圧力は

$$p = S \exp \left(A - \frac{B}{T} \right) \quad (\text{C.5})$$

で与えられる。この式を静水圧平衡の式に代入し、両辺を p で割ると

$$S \frac{B}{T^2} \exp \left(A - \frac{B}{T} \right) \frac{dT}{dz} = - \frac{pg}{RT} \quad (\text{C.6})$$

となる。両辺を p で割り、式を整理すると

$$\frac{dT}{T} = - \frac{pg}{RB} dz \quad (\text{C.7})$$

となる。この式を乾燥断熱線と湿潤断熱線の交点の高さ z_{LFC} から積分すると

$$\ln \frac{T}{T_{LFC}} = - \frac{g}{RB} (z - z_{LFC}) \quad (\text{C.8})$$

すなわち

$$T = T_{LFC} \exp \left\{ - \frac{g}{RB} (z - z_{LFC}) \right\} \quad (\text{C.9})$$

となる。ここで T_{LFC} は z_{LFC} における温度である。

等温層の温度を T_{Iso} とおくと静水圧平衡の式から

$$p = p_{TPL} \exp \left\{ - \frac{g}{RT_{Iso}} (z - z_{TPL}) \right\} \quad (\text{C.10})$$

で与えられる。 z_{TPL}, p_{TPL} はそれぞれ湿潤断熱線と等温線の交点の高度、圧力である。

乾燥断熱線と湿潤断熱線の交点の高度と湿潤断熱線と等温線の交点の高度がわかれば温度、圧力分布を一意に与えることができるようになる。まず、乾燥断熱線と湿潤断熱線の交点の高度を計算するためにこの点の温度、圧力を計算する。この点の温度、圧力は式 (C.4), (C.5) を連立して解くことで計算する。この連立方程式を解析的に解くのは困難であるので数値計算により解を求める(図 C.1)。計算された温度を式 (C.1) に代入することで、乾燥断熱線と湿潤断熱線の高度 z_{LFC} を計算することができる。次に湿潤断熱線と等温線の交点の高度 z_{LTP} を計算する。式 (C.1) に等温層の温度 T_{Iso} を代入すると湿潤断熱線と等温線の交点の高度 z_{LTP} を計算できる。

式 (C.4) に温度を代入することで高度と圧力の関係式

$$z = \frac{c_p T_0}{g} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{c_p/g} \right\} \quad (\text{C.11})$$

を得る。この式に p_{LFC} を代入することで乾燥断熱線と湿潤断熱線の交点の高度 z_{LFC} を計算することができる。

次に湿潤断熱線と等温線の交わる高度を求める。静水圧の式を圧力 p で割り、 $dp/p = d(\ln p)$ を用いると

$$\frac{d(\ln p)}{dz} = -\frac{g}{RT} \quad (\text{C.12})$$

となる。式 (C.4) を代入すると

$$\frac{dT}{T} = -\frac{gdz}{RB} \quad (\text{C.13})$$

となる。乾燥断熱線と湿潤断熱線の交点 z_{LTP} から湿潤断熱線と等温線の交点 z_{LTP} で積分すると

$$\frac{T_{Iso}}{T_{LFC}} = -\frac{g}{RB}(z_{LTP} - z_{LFC}) \quad (\text{C.14})$$

となる。ここで T_{Iso} は等温層の温度である。

あとは $z < z_{LFC}$ では式 (C.1), (C.4) を、 $z_{LFC} < z < z_{LTP}$ では式 (C.5), (C.9), を $z_{LTP} < z$ では式 (C.14) をそれぞれ用いて温度、圧力を計算すればよい。

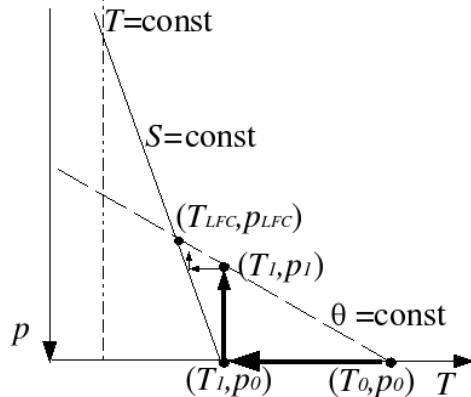


図 C.1: 反復法による自由対流高度における温度、圧力計算の概念図。 $p = p_0$ を式 (C.5) に代入して T_1 を求める。次に $T = T_1$ を式 (C.4) に代入して $p = p_1$ を求める。この操作を T, p の値が収束するまで繰り返し、最終的な値を乾燥断熱線と湿潤断熱線の交点における温度、圧力とする。

謝辞

本論文を作成する上で多くの方々にご協力をいただきました。指導教官である北海道大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻の林祥介教授には研究の指針となる助言をいただき、研究を暖かく見守っていただきました。同専攻の小高正嗣助手には普段から研究に対する助言をいただいたり、なかなか進まない私の作業を手伝っていただくななど多大なご協力をしていただきました。同専攻博士後期過程の杉山耕一朗氏には普段から研究に対する助言をいただいたり、研究用の有用なプログラムをいただいたりしました。九州大学大学院理学府地球惑星科学専攻の中島健介助手には地理的な制約がある中、eメールを通じて研究に対する有用なコメントを度々いただきました。地球流体力学研究室、惑星物理学研究室の皆様には日常を通して様々な面で御世話になりました。この場にて感謝の意を述べさせていただきます。

5.2 節の計算には宇宙航空開発機構宇宙科学研究本部情報解析センターの SX-6 を使わせていただきました。併せて感謝いたします。

参考文献

- Asselin, J. M., 1972, Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.
- Colaprete, A., Haberle, R. M., Toon, O. B., 2003, Formation of convective carbon dioxide clouds near the south pole of Mars. *J. Geophys. Res.*, **108(E7)**, 5081, doi:10.1029/2003JE002053.
- Deepconv Development Group, 2005, 2次元非静力学モデル deepconv, <http://www.gfd-dennou.org/library/deepconv/>
- Glandorf, D., Colaprete, A., Tolbert, M. A., Toon, O. B., 2002, CO₂ snow on Mars and early Earth: Experimental constraints. *Icarus*, **160**, 66–72.
- 化学工学会編, 1999, 化学工学便覧, 丸善, 1339pp.
- Klemp, J. B., Williamson, R. B., 1978, The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.
- 水野量, 2000, 雲と雨の気象学, 朝倉書店, 196pp.
- Odaka, M., Nakajima, K., Takehiro, S., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., 1998, A numerical study of the Martian atmospheric convection with a two-dimensional anelastic model., *Earth Planet Space*, **50**, 431–437.
- Rafkin, S. C. R., Haberle, R. M., Michaels, T. I., 2001, The Mars regional atmospheric modeling system: Model description and selected simulations. *Icarus*, **151**, 228–256.
- Skamarock, W. C., Klemp, J. B., 1992, The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equations. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109–2127.
- Tobie, G., Forget, F., Lott, F., 2003, Numerical simulation of the winter polar wave clouds observed by Mars Global Surveyor Mars Orbiter Laser Altimeter, *Icarus*, **164**,

33–49.

Toigo, A.D., Richardson, M.I., Ewald, S.P., Gierasch, P.J., 2003, Numerical simulation of Martian dust devils. *J. Geophys. Res.*, **108(E6)**, 5047, doi:10.1029/2002JE002002.

坪木和久, 榊原篤志, 2001, CReSS ユーザーズガイド 第2版.
<http://www.cf.tokyo.or.jp/CReSS.top.html>

Wood, S. E., 1999, Nucleation and growth of CO₂ ice crystals in the martian atmosphere. PhD thesis. Univ. of California, Los Angeles.