Pedlosky の半円定理 (Semi-Circle Theorem)

証明のための式変形

2 次元非発散流体の線型化したポテンシャル渦度保存則に, 流線関数の形 $\psi = \phi(y)e^{ik(x-ct)}$ を代入した方程式から出発する.

$$(U-c)\left(\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi\right) + \frac{dQ}{dy}\phi = 0, \tag{1}$$

$\dfrac{dQ}{dy} \equiv \beta - \dfrac{d^2U}{dy^2}$ は基本場のポテンシャル渦度傾度である.

ここでは不安定モード $c_i > 0$ を考えることにする. このとき $U - c \neq 0$ である. 変数変換 $\phi(y) = \{U(y) - c\}f(y)$ とする. $f(y)$ は流体の y 方向の変位である. (1) に代入することにより

$$(U-c)\left[(U-c)\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{dU}{dy}\frac{df}{dy} - k^2(U-c)f\right] + (U-c)\beta f = 0. \tag{2}$$

境界条件 $\phi = 0$ at $y = y_1, y_2$ より

$$f = 0 \quad \text{at} \quad y = y_1, y_2. \tag{3}$$

(2) に f^* をかけて,y_1 から y_2 まで積分する.

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{(U-c)^2 f^*\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{dU}{dy}(U-c)\frac{df}{dy}f^* - k^2(U-c)^2|f|^2 + (U-c)\beta|f|^2\right\}dy = 0.$$

第 1 項を部分積分すると

$$\int_{y_1}^{y_2}(U-c)^2 f^*\frac{d^2f}{dy^2}dy = \left[(U-c)^2f^*\frac{df}{dy}\right]_{y_1}^{y_2} - \int 2(U-c)\frac{dU}{dy}f^*\frac{df}{dy}dy - \int (U-c)^2\left|\frac{df}{dy}\right|^2 dy$$

(3) は結局

$$\int_{y_1}^{y_2}(U-c)^2\left\{\left|\frac{df}{dy}\right|^2 + k^2|f^2|\right\}dy = \beta\int_{y_1}^{y_2}(U-c)|f|^2dy \tag{4}$$

[0] 不安定/積分定理/Pedsemc1.tex,Pedsemcm.tex

(4) の実数部, 虚数部はそれぞれ

$$\int_{y_1}^{y_2} \left\{ (U-c_r)^2 - c_i^2 \right\} P dy = \beta \int_{y_1}^{y_2} (U-c_r)|f|^2 dy \tag{5}$$

$$2c_i \int_{y_1}^{y_2} (U-c_r) P dy = \beta c_i \int_{y_1}^{y_2} |f|^2 dy \tag{6}$$

ただし P は $P = k^2|f|^2 + \left|\dfrac{df}{dy}\right|^2$ である. æ

$\int \left|\dfrac{df}{dy}\right|^2 dy$ の大きさの見積り

$f(y)$ は $y = y_1, y_2$ で 0 であるから余弦 Fourier 級数の和として表すことができる.

$$f(y) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta$$

η は $\eta = \dfrac{2}{y_2 - y_1} \left(y - \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right)$ である.

$$\frac{df}{dy} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{y_2 - y_1} \right) \sin \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \eta$$

$$\begin{aligned}
\int_{y_1}^{y_2} \left|\frac{df}{dy}\right|^2 dy &= \sum \int_{-1}^{1} \left[A_j \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{y_2 - y_1} \right) \right]^2 \sin^2 \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{dy}{d\eta} d\eta \\
&= \sum |A_j|^2 \pi^2 \left(j + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{2}{y_2 - y_1} \\
&\geq \frac{2}{y_2 - y_1} \frac{\pi^2}{4} \sum |A_j|^2 .
\end{aligned}$$

一方,

$$\int_{y_1}^{y_2} |f|^2 dy = \sum |A_j|^2 \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \left|\frac{df}{dy}\right|^2 dy \geq \left(\frac{2}{y_2 - y_1} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \int_{y_1}^{y_2} |f|^2 dy \tag{7}$$

æ

[0] /不安定/積分定理/Pedsem2.tex,Pedsemm.tex

不安定波の c_r の範囲

(6) より

$$c_r = \frac{\int U(y)P(y)dy}{\int P(y)dy} - \frac{\beta}{2}\frac{\int |f|^2 dy}{\int P(y)dy}$$

$\beta > 0$ の場合

$\int P(y)dy, \int |f|^2 dy$ は正である. c_r の上限は

$$c_r \leq \frac{\int U(y)P(y)dy}{\int P(y)dy} < \frac{U_{\mathrm{max}}\int P(y)dy}{\int P(y)dy} = U_{\mathrm{max}}$$

c_r の下限については (7) を用いて

$$\begin{aligned}
c_r &\geq \frac{\int U_{\mathrm{min}}P(y)dy}{\int P(y)dy} - \frac{\beta}{2}\frac{\int \mid f \mid^2 dy}{\int \{k^2|f^2| + |f'|^2\}dy} \\
&\geq U_{\mathrm{min}} - \frac{\beta}{2}\frac{\int \mid f \mid^2 dy}{\int \left\{k^2 + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2}{y_2 - y_1}\right)^2\right\}|f|^2 dy} \\
&= U_{\mathrm{min}} - \frac{\beta}{2\left\{k^2 + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2}{y_2 - y_1}\right)^2\right\}} \\
&> U_{\mathrm{min}} - \frac{\beta}{2k^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{U_{\mathrm{min}} - \frac{\beta}{2k^2} < c_r < U_{\mathrm{max}}, \quad \beta > 0} \qquad (8)$$

特に $\beta = 0$ の場合には

$$U_{\mathrm{min}} < c_r < U_{\mathrm{max}}$$

[0] /不安定/積分定理/Pedsem3.tex,Pedsemm.tex

となる.

$\beta < 0$ の場合

同様にして, c_r の制限は

$$\boxed{U_{\min} < c_r < U_{\max} - \frac{\beta}{2k^2}, \quad \beta < 0} \qquad (9)$$

となる. æ

半円定理 (Semi-Circle theorem)

(6) より

$$\int UPdy = c_r \int Pdy + \frac{\beta}{2} \int |f|^2 dy \tag{10}$$

ただし P は $P \equiv k^2|f|^2 + \left|\frac{df}{dy}\right|^2$ である.

(5) より

$$\begin{aligned}\int U^2 Pdy &= 2c_r \int UPdy + (c_i^2 - c_r^2) \int Pdy + \beta \int (U - c_r)|f|^2 dy \\ &= (c_r^2 + c_i^2) \int Pdy + \beta \int |f|^2 U dy \end{aligned} \tag{11}$$

さて, 次の積分を考える.

$$\int_{y_1}^{y_2} (U - U_{\mathrm{max}})(U - U_{\mathrm{min}}) Pdy$$

$y_1 \leq y \leq y_2$ で $P > 0,\ U - U_{\mathrm{max}} \leq 0,\ U - U_{min} \geq 0$ であるから, この積分は負の値を取る. すなわち

$$\int \left\{ U^2 - (U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}})U + U_{\mathrm{max}} U_{\mathrm{min}} \right\} Pdy \leq 0.$$

(10), (11) を用いて変形すると, $\beta \geq 0$ のときは

$$\begin{aligned}\left\{(c_r^2 + c_i^2) - (U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}})c_r + U_{\mathrm{max}} U_{\mathrm{min}}\right\} \int Pdy &= -\beta \int \left(U - \frac{U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}}}{2} \right) |f|^2 dy \\ &\leq -\beta \int \left(U_{\mathrm{min}} - \frac{U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}}}{2} \right) |f|^2 dy \\ &= \frac{\beta}{2}(U_{\mathrm{max}} - U_{\mathrm{min}}) \int |f|^2 dy,\end{aligned}$$

同様にして $\beta < 0$ のときは

$$\begin{aligned}\left\{(c_r^2 + c_i^2) - (U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}})c_r + U_{\mathrm{max}} U_{\mathrm{min}}\right\} \int Pdy &= -\beta \int \left(U - \frac{U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}}}{2} \right) |f|^2 dy \\ &\leq -\beta \int \left(U_{\mathrm{max}} - \frac{U_{\mathrm{max}} + U_{\mathrm{min}}}{2} \right) |f|^2 dy \\ &= -\frac{\beta}{2}(U_{\mathrm{max}} - U_{\mathrm{min}}) \int |f|^2 dy,\end{aligned}$$

[0] /不安定/積分定理/Pedsem4.tex,Pedsemm.tex

結局,

$$\left\{(c_r^2+c_i^2)-(U_{\mathrm{max}}+U_{\mathrm{min}})c_r+U_{\mathrm{max}}U_{\mathrm{min}}\right\}\int Pdy \le \frac{|\beta|}{2}(U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}})\int |f|^2dy,$$

となる. さらに (7) を用いて右辺を変形すると

$$\begin{aligned}
c_r^2+c_i^2-(U_{\mathrm{max}}+U_{\mathrm{min}})c_r+U_{\mathrm{max}}U_{\mathrm{min}} &\le \frac{|\beta|}{2}(U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}})-\frac{\int |f|^2dy}{\int Pdy} \\
&\le \frac{|\beta|}{2}(U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}})\frac{1}{k^2+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2}{y_1-y_2}\right)^2} \\
&\le \frac{|\beta|}{2k^2}(U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}})
\end{aligned}$$

よって

$$\boxed{\left(c_r-\frac{U_{\mathrm{max}}+U_{\mathrm{min}}}{2}\right)^2+c_i^2 \le \left(\frac{U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}}}{2}\right)^2+\frac{|\beta|(U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}})}{2k^2} \qquad (12)}$$

c_r の範囲 (8), あるいは (9) を考慮すると, 不安定波の位相速度の範囲は図 1 の斜線部となる[1]. これを Pedlosky の半円定理 (Semi-Circle Theorem) という

(a) $\beta > 0$ の場合　　(b) $\beta < 0$ の場合

図 1.Pedlosky の Semi-Circle theorem

[1] (12) 式の円の半径と, 位相速度の範囲 (8) の包含関係を調べる.
$\dfrac{U_{\mathrm{max}}+U_{\mathrm{min}}}{2}-R$ と $U_{\mathrm{min}}-\dfrac{|\beta|}{2k^2}$ の大小関係は $R^2 \le (\dfrac{U_{\mathrm{max}}-U_{\mathrm{min}}}{2}+\dfrac{|\beta|}{2k^2})^2$ より

$$-R+\frac{U_{\mathrm{max}}+U_{\mathrm{min}}}{2} \ge U_{\mathrm{min}}-\frac{|\beta|}{2k^2}$$

したがって図 1(a) のようになる.

特に $\beta = 0$ の場合には

$$\boxed{\left(c_r - \frac{U\mathrm{max} + U_{\mathrm{min}}}{2}\right)^2 + c_i^2 \le \left(\frac{U\mathrm{max} - U_{\mathrm{min}}}{2}\right)^2 \qquad (13)}$$

図 2 の斜線部が許される不安定波の位相速度の範囲である．これを Howard の半円定理 (Semi-Circle Theorem) という．

図 2.Howard の 半円定理

æ

参考文献

Pedlosky,J.,1979 : Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 710pp.

新野 宏, 1981 : 順圧不安定の力学, 天気, **28**, 53-82.

æ

[0] /不安定/積分定理/PedsemR.tex,Pedsemm.tex