

流体力学 授業資料 (2025-10-20)

2.3 応力

2.3.1 流体に働く力

流体とともに運動する閉領域 D' の内部とその外側との相互作用は, 以下の 2 種類の力で表現できると考えることにする.

1. 外力: 遠隔作用として現れる巨視的な力.
重力や電磁気力など, 大きさが物質質量すなわち体積や質量に比例する力. その意味で外力は体積力(body force あるいは物体力) と呼ばれる. 通常, ポテンシャルを用いて記述される.
2. 内力: 分子原子レベルの微視的な相互作用を平均した結果現れる巨視的な力. 相互作用の距離は非常に短い (微視的な距離でしかない). 領域 D' の内側では作用反作用で完全に打ち消しあうものとする. 領域 D' の表面 $\partial D'$ においてのみ, 領域に作用する力として現れる. 内力の大きさは $\partial D'$ の面積に比例する. 面積力(surface force あるいは表面力) と呼ばれる.

2.3.2 応力ベクトル

流体内部の 3 次元閉領域 D' を考える. D' の表面 $\partial D'$ 上の点 P (座標を $\mathbf{x}$ とする) に注目する. そこでの面積要素 (微小面積素片) を δS , 面積要素の外向き法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする.

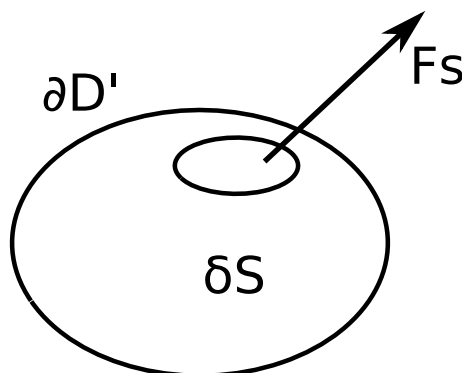


図 1: 応力の表現.

応力ベクトル (stress vector) は面積要素 δS に対して

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}_s}{\delta S} \quad (1)$$

で定義される. ただし, $\delta \mathbf{F}_s$ は面積要素 δS の $\mathbf{n}$ 側の面に働く力のベクトル.

2.3.3 応力の性質

例題を使って応力の性質を考える.

0 準備: 微小領域に成りたつ方程式.

流体とともに動く微小領域 D' を考える.

微小領域の運動方程式: D' に対して運動量の釣り合いを考えると,

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial D'} \boldsymbol{\sigma}_n dS + \int_{D'} \mathbf{F}_b dV. \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{F}_b(\mathbf{x})$ は各点に働く体積力, $\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x})$ は表面 ∂D に働く応力である.

微小領域の角運動量保存則: D' に対して角運動量保存則を考える,

$$\frac{d}{dt} \int_{D'} \mathbf{j} \rho dV = \int_{\partial D'} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS + \int_{D'} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_b(\mathbf{x}) dV. \quad (3)$$

ここで, $\mathbf{j}$ は角運動量密度,

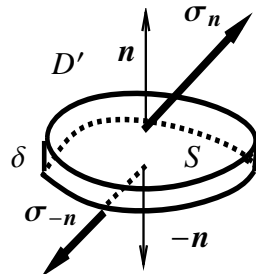
$$\mathbf{j} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

1 面の表の応力と裏の応力

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_{-n}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

上式が成り立つことの説明:

D' として点 $\mathbf{x}$ を含む厚さ δ , 上面・下面が面積 S の微小領域を考える.



表面の応力と裏面の応力を考えるための領域 D' .

運動方程式 (2) において $\delta \rightarrow 0$ に近づけると, 以下ようになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho \mathbf{v} dV}_{\sim \delta^3 \text{ なので } \delta \rightarrow 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} = \int_{S_u} \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS + \int_{S_d} \boldsymbol{\sigma}_{-n}(\mathbf{x}) dS \quad (6)$$

$\sim \delta^3$ なので $\delta \rightarrow 0$ で 0 に収束

$$+ \underbrace{\int_{\text{側面}} \boldsymbol{\sigma}_{n'} dS}_{\delta \rightarrow 0 \text{ で面積が } 0 \text{ に近づくので } 0 \text{ に収束}} + \underbrace{\int_{D'} \mathbf{F}_b dV}_{\sim \delta^3 \text{ なので } \delta \rightarrow 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} \quad (7)$$

S_u は領域の上面, S_d は領域の下面をあらわす. よって, 上面と下面の面積分だけが残る $\delta \rightarrow 0$ として面積分を上面だけで評価すれば

$$0 = \int_{S_u} \{\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}_{-n}(\mathbf{x})\} dS \quad (8)$$

この関係は連続体内の領域の取り方によらないので

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = -\sigma_{-n}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

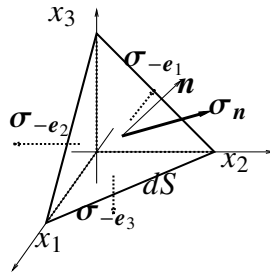
2 応力の表現

応力の表現は次式で与えられる.

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j \mathbf{e}_i \quad (10)$$

この σ_{ij} は応力テンソルと呼ばれることもある. テンソルとは, ある種の線型性を持つ変数であり, 正しい定義に関しては数学の教科書を参照されたい.

上記の説明: ここでは, 連続体内の領域 D' として, 点 $\mathbf{x}$ を含む, 微小 4 面体を考える (下図参照). この微小 4 面体の各面に働く力のつりあいを考える.



応力の表現を考察するための 4 面体. 面 dS の法線ベクトル $\mathbf{n}$ の成分が $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $n_3 > 0$ である場合. ただし, $n_j = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j$.

4 面体の高さを δ とする. 4 面体の形を保ったまま $\delta \rightarrow 0$ に近づける. 力のつりあいの式 (2) は以下ようになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \rho v dV}_{\sim \delta^3 \text{なので} \delta \rightarrow 0 \text{で} 0 \text{に収束}} = \underbrace{\int_{\partial D'} \sigma_{n'} dS + \int_{D'} \mathbf{F}_b dV}_{\sim \delta^3 \text{なので} \delta \rightarrow 0 \text{で} 0 \text{に収束}} \quad (11)$$

よって, $\delta \rightarrow 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D'} \sigma_{n'}(\mathbf{x}) dS. \quad (12)$$

面積分を各面上で分けて評価する. x_i 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_i$ とする. $\mathbf{n}$ を法線ベクトルとする面を S , その微小面積を dS とする. 上の図の場合では, x_i 軸と垂直な面の面積は $n_i dS$ である. よって,

$$0 = \sigma_n(\mathbf{x}) dS + \sigma_{-e_1}(\mathbf{x}) n_1 dS + \sigma_{-e_2}(\mathbf{x}) n_2 dS + \sigma_{-e_3}(\mathbf{x}) n_3 dS. \quad (13)$$

面の向きを考慮して, $\sigma_n(\mathbf{x}) = -\sigma_{-n}(\mathbf{x})$ を使うと,

$$0 = \{ \sigma_n(\mathbf{x}) - \sigma_{e_1}(\mathbf{x}) n_1 - \sigma_{e_2}(\mathbf{x}) n_2 - \sigma_{e_3}(\mathbf{x}) n_3 \} dS \quad (14)$$

である. この関係は連続体内の領域の取り方によらずに成立するので

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \sigma_{e_1}(\mathbf{x}) n_1 + \sigma_{e_2}(\mathbf{x}) n_2 + \sigma_{e_3}(\mathbf{x}) n_3 = \sum_j \sigma_{e_j}(\mathbf{x}) n_j \quad (15)$$

ここで, σ_{ij} を $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{e_j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i$ と定義すると,

$$\sigma_{e_j}(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \quad (16)$$

となる. これより以下が得られる.

$$\sigma_n(\mathbf{x}) = \sum \sigma_{e_j}(\mathbf{x}) n_j = \sum_{ij} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j \mathbf{e}_i. \quad (17)$$

2.3.4 法線応力 (圧力)

平面の接線応力が常に 0 である場合, 法線応力は平面の向きによらない.

上記の説明: 図 2 のようなプリズム型の領域を考える. 各面の法線方向に応力 p_i ($i = 1, 2, 3$) が働いているとする.

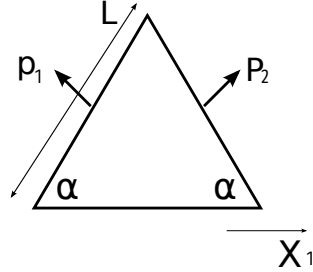


図 2: 応力の法線成分を考えるためのプリズム型領域. 底角 α , 斜辺 L の二等辺三角形である.

1. 連続体が静止していて働く力が応力のみである場合

x 方向の力が釣り合うことから

$$p_1 L \sin \alpha = p_2 L \sin \alpha \quad \text{ゆえに} \quad p_1 = p_2 \quad (18)$$

任意の α について成立するので, 法線応力は面の向きによらず一定.

2. 次に, 連続体は静止していて体積力が働く場合

プリズム領域に働く体積力は L^3 に比例する. 領域の境界面に働く面積力は L^2 に比例する. 領域を十分小さくとれば, 体積力は無視できる. したがって, 上の 1. の結果がそのまま成り立ち, 法線方向の応力は面の向きによらず一定.

3. 連続体が運動している場合

領域とともに動く座標系にのって考える. 連続体には応力, 外力, 慣性力が働き, それらが釣りあって静止している. 慣性力は体積力であるから, 上の 2. の結果が成り立ち, 法線方向の応力は面の向きによらず一定.

以上より, 接線方向の応力が常に 0 であるならば, 法線方向の応力の大きさは面の向きによらないことが示された. これを圧力と呼び,

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (19)$$

と表す.

2.3.5 応力テンソルの対称性

応力テンソルは対称テンソルである:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (20)$$

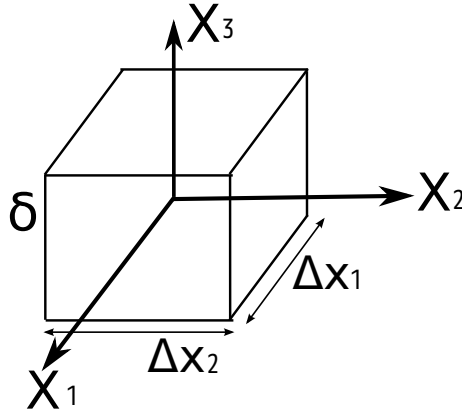


図 3: 応力の対称性を考えるための微小立方体.

上記の説明: モーメントの釣り合いを用いて説明する. 連続体内の領域 D として点 $\mathbf{x}$ を含む, 微小立方体 (6 面体) を考察する. 各面が座標面に平行になるように局所直交座標系をとる (図 4).

立方体の辺の長さのスケールを δ とする. 角運動量方程式 (3) は以下のようなになる.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{D'} \mathbf{j} \rho dV}_{\sim \delta^4 \text{ なので } \delta \rightarrow 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} = \underbrace{\int_{\partial D'} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS}_{\sim \delta^2} + \underbrace{\int_{D'} \mathbf{x} \times \mathbf{F}_b(\mathbf{x}) dV}_{\sim \delta^4 \text{ なので } \delta \rightarrow 0 \text{ で } 0 \text{ に収束}} \quad (21)$$

ここで, $\mathbf{j} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ である. よって, $\delta \rightarrow 0$ においては

$$0 = \int_{\partial D} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}) dS \quad (22)$$

でなければならない. 以下では第 3 軸成分のみを考える.

$$0 = \int_{\partial D} [\mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x})]_3 dS \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sim \int_{x_1=\Delta x_1/2} \left[\left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{e_1} \right]_3 dx_2 dx_3 + \int_{x_1=-\Delta x_1/2} \left[\left(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{-e_1} \right]_3 dx_2 dx_3 \\ & + \int_{x_2=\Delta x_2/2} \left[\left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{e_2} \right]_3 dx_1 dx_3 + \int_{x_2=-\Delta x_2/2} \left[\left(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times \boldsymbol{\sigma}_{-e_2} \right]_3 dx_1 dx_3 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & = \int_{x_1=\Delta x_1/2} \left[\left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times (\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}) \right]_3 dx_2 dx_3 \\ & + \int_{x_1=-\Delta x_1/2} \left[\left(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \times (-\sigma_{11}, -\sigma_{21}, -\sigma_{31}) \right]_3 dx_2 dx_3 \\ & + \int_{x_2=\Delta x_2/2} \left[\left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}) \right]_3 dx_1 dx_3 \\ & + \int_{x_2=-\Delta x_2/2} \left[\left(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \times (-\sigma_{12}, -\sigma_{22}, -\sigma_{32}) \right]_3 dx_1 dx_3 \end{aligned} \quad (25)$$

$$= \frac{\Delta x_1}{2} \sigma_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 + \left(-\frac{\Delta x_1}{2} \right) (-\sigma_{21}) \Delta x_2 \Delta x_3 - \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{12} \Delta x_1 \Delta x_3 - \left(-\frac{\Delta x_2}{2} \right) (-\sigma_{12}) \Delta x_1 \Delta x_3 \quad (26)$$

なお, σ_{e_1} は法線ベクトルが e_1 の面 (x_1 軸に直交する面) に働く応力. σ_{e_1} の 2 軸方向成分 ($\sigma_{e_1} \cdot e_2$) は σ_{21} . よって,

$$0 = \sigma_{21}\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 - \sigma_{12}\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3 \quad (27)$$

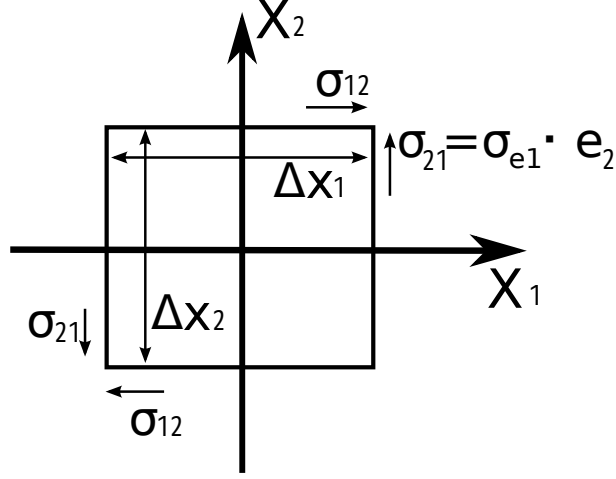


図 4: 角運動量バランスから考える応力の対称性.

上式は任意の $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ について成り立たねばならないので,

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (28)$$

である. 同様のことを 1, 2 軸成分について行くと

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (29)$$

も得られる. したがって応力テンソルは対称である.

2.3.6 応力の表現

結局, 流体の応力は以下の形式で表現される

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (30)$$

σ'_{ij} は対称テンソルである.