ITPASS 実習　数値計算実習課題その 1

joho04 野尻野　真栄

2010 年 7 月 15 日 提出

1　慣性系における、中心星と惑星間の運動方程式

中心星の質量を m_1、惑星の質量を m_2、中心星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r_1}$、
惑星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r_2}$、相対ベクトルを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$, 万有引力定数を G とする。
このとき、重力を及ぼしあう二天体の運動のみを考えるので万有引力を考えればよい。
したがって、中心星、惑星はそれぞれに関して成り立つ運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r_1}}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r} \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r_2}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r} \tag{2}$$

である。
よって（1）式を m_1、（2）式を m_2 で割り、（2）から（1）を引くとすると、

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \boldsymbol{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \boldsymbol{r_1}}{dt^2} \tag{3}$$

$$= -G \frac{m_1}{r^3} \boldsymbol{r} - G \frac{m_2}{r^3} \boldsymbol{r} \tag{4}$$

したがって

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \boldsymbol{r} \tag{5}$$

となり、求める式が導出される。また、この式は二天体の相対ベクトルの式となっていることから、
1 つの質点を原点とした座標系では中心力のみが働くようになっており、慣性系においては二天体の重心を中心とした等速円運動をしていることを示している。

2　成分に分解

1 を成分 x，y に分解する。
（5）式と $\boldsymbol{r} = (x, y)$、そして $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ であることから

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \tag{6}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y \tag{7}$$

となる。