ITPASS実習　レポート2

joho14:赤松紀美

平成22年7月20日

1

　中心星の質量が m_1、惑星の質量が m_2。
中心星に働く力を $\mathbf{F_{12}}$、惑星に働く力を $\mathbf{F_{21}}$ とすると
中心星における運動方程式は

$$\mathbf{F_{12}} = m_1 a = m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} \tag{1}$$

惑星における運動方程式は

$$\mathbf{F_{21}} = m_2 a = m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} \tag{2}$$

となる。

また、中心星に働く力は

$$\mathbf{F_{12}} = \frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

と書けるので、(1) を代入して

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{3}$$

　同様に、惑星に働く力は

$$\mathbf{F_{21}} = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

と書けるので、(2) を代入して

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{4}$$

(4)-(3) より

$$\frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2} = -\frac{Gm_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{Gm_1\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = \mathbf{r}$ より、上の式は

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1+m_2)\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

と書くことが出来る。

ここで、m_1 と m_2 における重心の運動方程式を求める。
m_1 と m_2 における重心のベクトルは

$$\mathbf{r_G} = \frac{m_1\mathbf{r_1} + m_2\mathbf{r_2}}{m_1+m_2}$$

と書けるので、重心の加速度は

$$\frac{d^2\mathbf{r_G}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r_1}}{dt^2}\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{d^2\mathbf{r_2}}{dt^2}\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

となり、これに (3)、(4) を代入すると

$$\frac{d^2\mathbf{r_G}}{dt^2} = \frac{G\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} - \frac{G\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = 0$$

加速度は 0 となり、重心が等速運動をしていることが分かる。
したがって、二つの物体 m_1、m_2 は重心が等速運動するように運動していることが分かる。

2

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

より、1 での $\frac{d^2r}{dt^2}$ を代入すると

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{G(m_1+m_2)x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

同様に、

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

より、

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{G(m_1+m_2)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$