課題演習 DB「数値計算」資料その 7(浅水方程式)

線形浅水方程式

底面が水平な矩形の容器に入った平均水深 H の水を考える．容器は水平 (x) 方向に $0 \leq x \leq L$ の領域にあり, $x = 0, L$ では垂直の壁があるとする．このとき, 時刻を t として自由水面の変位を $\eta(x,t)$, x 方向の流束を $u(x,t)$ と表すことにすると, 重力加速度を g として, $|u| \ll \sqrt{gH}$, $|\eta| \ll H$ で, かつ u, η の水平方向の変化スケールが H より十分大きい場合は, この水の運動は良い近似で以下の線形浅水方程式で記述される (水平方向について, x と直交する方向には一様を仮定する).

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -g\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t) = -H\frac{\partial}{\partial x}u(x,t).$$

また, 境界条件は,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

で与えられる．このような浅水方程式は, 津波のモデルになるだけでなく, 大気・海洋の大規模運動の最も簡単なモデル方程式の一つになる．

線形浅水方程式の数値計算

線形浅水方程式は偏微分方程式であり, この数値計算については様々な手法がある．その中でも最も基本的なものが差分法である．これは, 空間偏微分を差分で近似するものである．領域を n 分割し, $\Delta x = L/n$ として, $x_i = i\Delta x \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ と分点を導入する．また, それらの中点も $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ として導入しておく．このとき, $u_i(t) = u(x_i, t) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$, $\eta_{i+\frac{1}{2}}(t) = \eta(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ とする．境界条件から, $u_0 = u_n = 0$ であり, また, 偏微分の差分近似により,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i(t) = -g\frac{\eta_{i+\frac{1}{2}} - \eta_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h_{i+\frac{1}{2}}(t) = -H\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

と時間発展の方程式を定めると, これは, $(h_{\frac{1}{2}}, h_{1+\frac{1}{2}}, \ldots, h_{n-1+\frac{1}{2}}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ を変数とする常微分方程式となるので, これは Runge-Kutta 法等で時間積分できる．

CFL 条件

上記のように離散化した常微分方程式を Runge-Kutta 法等で時間発展させる場合, 安定に計算するためには, その系に含まれる波動の位相速度の最大値を c とした場合, 時間刻み幅 Δt に対して, $c\Delta t\Delta x$ のように, 空間刻み幅を細かくする場合, それに比例して Δt も小さくしなければならない (ここで, 不等式の右辺の係数は差分法の精度や時間積分のスキームに依存するので必ずしも 1 ではないが)．この条件は, CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy 条件) と呼ばれ, 情報の伝播が離散化した系で妥当に扱えるための条件として得られる．この条件は必ずしも計算の安定性の条件と同値ではないが, von Neumann の安定性解析を行って定まる安定性の閾値と不等式の右辺の係数が定数倍程度しか違わないことが多いので, CFL 条件が安定性の条件と同一視されることも多い．上記の浅水方程式の場合, 波動伝播速度は $\sqrt{gH}$ であるので, CFL 条件は, $\Delta t\sqrt{gH} < \Delta x$ となる．CFL 条件や, von Neumann の安定性解析については, 計算地球物理学の講義資料 (keisanchikyubutsuri-5w.pdf) を参照のこと (PandA の演習の資料のところに置いている)．

課題 7-1

サンプルプログラムの置き場所

https://www.gfd-dennou.org/arch/ishioka/db/sample/

手順

1. 上記の URL から, shallow.f90, shallow.py をダウンロード.
2. shallow.f90 の内容を VSCode 等で確認した後, このプログラムを gfortran でコンパイルして実行. なお, このプログラムは, 前ページのように離散化された線形浅水方程式の時間発展を行うものである. このプログラムでは, h と u をまとめて一つの配列として扱うことによって時間発展の計算を簡単にしていることに注意.
3. 上記がうまくいくと, shallow.dat というファイルができるので, これを読みこんで animation 表示を行う shallow.py を python3 で実行してみよ.
4. shallow.f90 で与えられているパラメーター G(これは g に対応) および DEPTH(これは H に対応) 等を変更し, 時間刻み幅や空間刻み幅と CFL 条件の成立/不成立によって計算の安定性がどう変わるかを調べよ. また, このサンプルでは, 丁度 1 周期分の振動が計算されるようなパラメター設定になっているが, そのような周期振動になることを解析的にも確認しておくこと.

課題 7-2

上記のサンプルを改造することによって, $L = 10000000, H = 100, g = 10$ のケースで, $h = 200$, $n = 1000$ として, $\Delta x = 10000$ とした計算設定で, 初期条件を $\eta = \tanh((x - L/2)/(10\Delta x))$, $u \equiv 0$ とした場合について $t = 200000$ まで時間発展してみよ. このケースにおいて, x の正負の方向に進行する波が励起され, 初期の表面変位の段差が時間とともに (初期に段差を与えた位置からは) 遠ざかっていくことを確認せよ.

課題 7-3

系の回転の効果を考えると, y 方向に一様を課した場合でも y 方向流速 v の時間発展の効果を考慮しなければならない. このとき, 線形浅水方程式は, コリオリ項を付加することにより,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = fv(x,t) - g\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = -fu(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t) = -H\frac{\partial}{\partial x}u(x,t).$$

と修正される. ここに, f はコリオリパラメーターである. このとき, $f = 1.0 \times 10^{-4}$ として, その他は課題 2 と同じ初期条件やパラメーター設定で時間発展を行い (v の初期条件は $v \equiv 0$ とする), η および v の場の時間発展がコリオリ項の存在によってどう変わるかを調べよ. このように, コリオリ項の存在によって, 有限のサイズの擾乱が地衡風平衡を満たすように残る現象のことは地衡流調節と呼ばれ, 大気力学・海洋力学で重要な過程である. 地衡流調節については, 例えば, G. K. Vallis: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge) 等を参照 (この本は京大で電子ブックを買っている). また, 地衡流については, 気象学 I の講義資料 (kishougakuI-3w.pdf) も参照のこと (PandA の演習の資料のところに置いている).

課題 7-4(発展課題)

課題 3 では, y 方向の一様性を仮定したが, その仮定を外すと, 以下のような 2 次元線形浅水方程式を考えなければならない.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= fv - g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -fu - g\frac{\partial \eta}{\partial y}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

この 2 次元線形浅水方程式において, 考える領域を $0 \le x \le L, 0 \le y \le L$ として, 境界条件を, $u = 0$ $(x = 0, L), v = 0$ $(y = 0, L)$ として, 以下のパラメター設定と初期条件の設定からの時間発展を計算してみよ.

$L = 2 \times 10^6, H = 100, g = 10$, 空間方向のグリッド間隔 $\Delta x = \Delta y = 1 \times 10^4$ (すなわち, x, y 方向のグリッド分割数 $m = 200$, 時間刻み $\Delta t = 200$, 計算終了の時刻 $t = 2 \times 10^5$ (すなわち, 時間方向のステップ数 $n = 1000$). 初期条件:

$$\eta = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right), \; u \equiv v \equiv 0$$

ここに, $\sigma = 5 \times 10^4$ とし, $(x_0, y_0) = (L/2, L/2)$ とする. このような設定で数値計算すると, 重力波が励起されるが, 領域中心付近に円形の地衡流平衡した渦が残されることを確かめよ. また, 残される渦の水平方向の広がりがロスビーの変形半径 $\sqrt{gH}/f$ の程度であることも確認せよ.

また, 初期擾乱を与える中心位置を $(x_0, y_0) = (0.1 \times L, 0.2 \times L)$ のように境界面に近くに置いた場合, 境界に補足されたて境界を右手に見るように進む波が見られることを確認せよ. これは Kelvin 波と呼ばれるものである. Kelvin 波についても, Vallis の教科書など参照のこと.

なお, この計算の場合の離散化では, $\eta(x, y, t)$ は, $\eta_{(i+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}(t) = \eta(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}, t) \quad (i = 0, 1 \ldots, m-1; j = 0, 1 \ldots, m-1)$ のように離散化し, $u(x, y, t), v(x, y, t)$ は, $u_{ij}(t) = u(x_i, y_j, t), v_{ij}(t) = v(x_i, y_j, t) \quad (i = 0, 1 \ldots, m; j = 0, 1 \ldots, m)$ のように離散化すれば良い. ここで, $x_i = i\Delta x, x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta x$ などである. このとき, 境界条件から, $u_{0j} = u_{mj} = 0$ $(j = 0, \ldots, m)$, $v_{i0} = v_{iL} = 0$ $(i = 0, \ldots, m)$ と定めることになる. また, 差分化の式では, 半格子ずれた点での値は平均 (すなわち 1 次補間) で求めるようにする. すなわち, 上の 2 次元線形浅水方程式は以下のように離散化される.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u_{ij}}{\mathrm{d}t} &= fv_{ij} - g\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{(i+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})} - \eta_{(i-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}}{\Delta x} + \frac{\eta_{(i+\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})} - \eta_{(i-\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})}}{\Delta x}\right) \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1; j = 1, 2, \ldots, m-1), \\
\frac{\mathrm{d}v_{ij}}{\mathrm{d}t} &= -fu_{ij} - g\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{(i+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})} - \eta_{(i+\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})}}{\Delta y} + \frac{\eta_{(i-\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})} - \eta_{(i-\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})}}{\Delta y}\right) \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1; j = 1, 2, \ldots, m-1), \\
\frac{\mathrm{d}\eta_{(i+\frac{1}{2})(j+\frac{1}{2})}}{\mathrm{d}t} &= -H\frac{1}{2}\left(\frac{u_{(i+1)j} - u_{ij}}{\Delta x} + \frac{u_{(i+1)(j+1)} - u_{i(j+1)}}{\Delta x} + \frac{v_{i(j+1)} - v_{ij}}{\Delta y} + \frac{v_{(i+1)(j+1)} - v_{(i+1)j}}{\Delta y}\right) \\
&\qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1; j = 0, 1, \ldots, m-1).
\end{aligned}
$$

2 次元の初期値データの作成および描画 (η の等高線表示と (u, v) のベクトル表示) サンプルプログラムとして, shallow2d.f90 および shallow2d.py を用意しているので, それをもとに時間発展のプログラムとそのアニメーション表示のプログラムを作ってみて欲しい.