課題演習 DB「数値計算」資料その 6(点渦系の運動)

2 次元非圧縮非粘性流体の運動を記述する基礎方程式は以下のようにまとめられる.

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

ここに, (u, v) は (x, y) 方向の流速, $\phi = p$(圧力)$/\rho$(密度), D/Dt はラグランジュ微分で以下のように定義される.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}.$$

基礎方程式 (1)–(3) をそのまま扱うよりも以下のように方程式を変形した方が扱いが容易になる. まず, 渦度 ζ を

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定義する. すなわち, 流れのベクトル場の回転の z 成分をとっていることになる. この渦度に関する方程式を導くことを考える. (2) を x 偏微分した式から (1) を y 偏微分した式を引いたものをつくると,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{D\zeta}{Dt} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{D\zeta}{Dt} \quad (\because (3))
\end{aligned}$$

となるので, 結局, 渦度に対する方程式 (渦度方程式)

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0 \tag{4}$$

が導かれる. 流れの非圧縮条件 (3) から,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

なる流線関数 ψ が導入できる. このように流線関数を定義すると, 流線関数の等高線が流線, すなわちある瞬間の流れのベクトルをつないだような線になる. 流線関数と渦度とは,

$$\zeta = \nabla^2 \psi \tag{5}$$

の関係になるので, 渦度方程式 (4) と (5) とを組み合わせることによって解くことができる. ここに, ∇^2 はラプラシアンで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

と定義される.

さて, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ としたときに

$$\zeta = \begin{cases} \Gamma/(\pi R^2) & (r \le R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

と表されるような渦度分布を考える. ここに Γ はこの渦の循環である. さて, (5) は軸対称な場については

$$\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}\right) = \zeta$$

と書けるが, 無限平面上の運動を考え, 境界条件を $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}r \to 0$ $(r \to \infty)$ とすると, この解は,

$$\psi = \begin{cases} \frac{\Gamma}{\pi R^2}\frac{1}{4}(r^2 - R^2) + \frac{\Gamma}{2\pi}\log R & (r \le R) \\ \frac{\Gamma}{2\pi}\log r & (r > R) \end{cases}$$

となる ($r=R$ で ψ とその微分の連続性を課している．また, ψ は定数分の任意性があるので, $r>R$ での解が $\frac{\Gamma}{2\pi}\log r$ となるように定めている)．$R\to 0$ の極限を考えると, 原点に δ 関数的な渦があり, その渦は周囲に

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\log r \quad (r>0)$$

の流線関数場を伴っている．このような δ 関数的な渦を点渦 (または渦点, または渦糸) という．この渦点が作る流れは渦中心に対して軸対称なので, 渦自体を移動させる効果はない．しかし, 複数の点渦が存在する場合は他の渦が作る流れによって点渦が移流される．今, (x_1,y_1) に循環 Γ_1 の点渦 1 が, (x_2,y_2) に循環 Γ_2 の点渦 2 が存在しているとすると, 点渦 1 が作る流線関数場は

$$\psi = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\log\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

であるので, 対応する流速場は,

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y-y_1}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

となり, この流速場に点渦 2 が流されるから, 点渦 2 の位置について

$$\dot{x_2} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad \dot{y_2} = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{x_2-x_1}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

となる．ここに, $\dot{(\ )}$ は時間微分を表す．点渦 1 も同様に点渦 2 が作る流れに移流されるから,

$$\dot{x_1} = -\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1-y_2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \quad \dot{y_1} = \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1-x_2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

となる．この議論を n 個の点渦 (循環 Γ_i, 座標 (x_i,y_i)) からなる系 (点渦系) に拡張すると,

$$\dot{x_i} = -\sum_{j\neq i}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{y_i-y_j}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}, \quad \dot{y_i} = \sum_{j\neq i}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{x_i-x_j}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}, \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

を得る．

※補足: 点渦系の基礎方程式の導出などは, 気象学 I の講義資料 (kishougakuI-12w.pdf) も参照のこと (PandA の演習の資料のところに置いている).

課題 (以下の課題については, もうサンプルプログラムを提供しないので, これまでのサンプルプログラムを参考に自力で作成してみて欲しい)

- 課題 6-1(時間発展プログラムの作成)

  任意の n, $\Gamma_i, (x_i(0), y_i(0))$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を与えて数値的に $(x_i(t), y_i(t))$ $(i=1,2,\ldots,n)$ の時間発展を Runge-Kutta 法で行うプログラムを作成せよ.

- 課題 6-2(2 つの点渦)

  循環が等しい 2 つの点渦が円運動し, 循環の絶対値が同じで符号が異なる 2 つの点渦は平行移動することを数値計算で確認せよ.

- 課題 6-3(保存量)

  この系では, 以下の 4 つの保存量があることが知られている.

  系の Hamiltonian

  $$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\Gamma_i\Gamma_j\log((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2)$$

  系の「重心」座標

  $$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i x_i, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i y_i$$

  全角運動量のようなもの (Kelvin インパルス)

  $$I = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(x_i^2+y_i^2)$$

これらの保存量が実際に保存量になっていることを解析的に示すとともに, 適当な n および初期条件を与え, 数値計算でもこれらの保存量が (Runge-Kutta 法の打ち切り誤差の範囲の精度で) 保存されていることを確認せよ.

- 課題 6-4(解の爆発)

  $n = 3$ の場合, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2, \Gamma_3 = -1$,

$$\begin{aligned}(x_1(0), y_1(0)) &= (\sqrt{3} + \cos\theta, \sin\theta) \\ (x_2(0), y_2(0)) &= (-\sqrt{3} + \cos\theta, \sin\theta) \\ (x_3(0), y_3(0)) &= (4\cos\theta, 4\sin\theta)\end{aligned}$$

  $(0 < \theta < \pi/2)$ のように与えると有限時間内に 3 個の点渦が一点に収束してしまう (こういう現象を「解の爆発」と言う) ことが知られているが, これを数値計算で確認せよ.

- 課題 6-5(正多角形解)

  $n \geq 3$ の場合, 循環が全て等しい $(\Gamma_1 = \Gamma_2 = \cdots = \Gamma_n = \Gamma)$ 点渦を正多角形の頂点に配置した場合, その配置は (少くとも一時的には) 保たれ, 角速度 $\Omega = (n-1)\Gamma/(4\pi R^2)$ の回転運動することを数値計算で確かめよ. ここに R は中心からその正多角形の頂点までの距離である.

  また, $n \geq 8$ の場合, この配置は不安定であり, 時間が経つと自然と配置が崩れていくことも知られている. このことについても数値的に確認せよ.