課題演習 DB「数値計算」資料その 4(浮力振動と静力学的不安定)

非圧縮流体の場合

重力場の中で静止している非圧縮流体 (ただし, 密度 ρ は場所によって異なる値をとりうるものとする．例えば, 濃度が場所によって異なる塩水のような場合) を考える．鉛直上向きの座標を z とし, 密度分布が

$$\rho = \bar{\rho}(z)$$

で与えられているとする．初期にある高度 z_0 にある単位質量の流体塊 (パーセル) を Δz だけ z 方向に微小変位させることを考える．このとき, 非圧縮流体なので流体塊の密度は初期の位置での密度 $\bar{\rho}(z_0)$ のままだが, 背景場の密度は $\bar{\rho}(z_0+\Delta z)$ である．このパーセルの体積 V は $V = 1/\bar{\rho}(z_0)$ だから, 重力加速度を g とすると, このパーセルに働く浮力は

$$(\bar{\rho}(z_0+\Delta z) - \bar{\rho}(z_0))gV = \frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}\Delta z g V = \frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}\Delta z g/\bar{\rho}$$

と表される (最初の変形では, Δz が微小であるとしてテイラー展開の一次までをとった)．従って, このパーセルの運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta z = \frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}\Delta z$$

となる．ここで,

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}$$

とおくと, $N^2 > 0$ のとき (すなわち, 上にいくほど密度が小さくなるような密度成層をしているとき) は運動方程式は振動型となり, このときの振動を浮力振動, またはブラント-バイサラ振動という．このとき, $N > 0$ をブラント-バイサラ振動数という．また, このとき, 密度成層は安定であるという．

逆に $N^2 < 0$ のとき (すなわち, 上にいくほど密度が大きくなるような密度成層をしているとき) は運動方程式は指数関数的に増大する解をもち, 変位 Δz には復元力が働かずにどんどん大きくなる．このような場合を静力学的不安定といい, このときの密度成層は不安定であるという．

理想気体の場合

非圧縮流体の場合と同様の設定だが, 圧力変化でパーセルの体積が変わることを考慮しなければならない．背景場の密度 ρ, 圧力 p をそれぞれ

$$\rho = \bar{\rho}(z),\ p = \bar{p}(z)$$

とする．単位質量のパーセルを断熱的に Δz だけ変位させたときに働く浮力は, 背景場のエントロピーを $S = \bar{S}(z)$, ρ を p, S の関数とみなしたものを $\rho(p,S)$ と書くことにすれば,

$$\begin{aligned}
\left\{\bar{\rho}(z_0+\Delta z) - \rho\left(\bar{p}(z_0+\Delta z), \bar{S}(z_0)\right)\right\} gV &= \left\{\bar{\rho}(z_0+\Delta z) - \rho\left(\bar{p}(z_0+\Delta z), \bar{S}(z_0)\right)\right\} g/\rho\left(\bar{p}(z_0+\Delta z), \bar{S}(z_0)\right) \\
&= \left\{\rho\left(\bar{p}(z_0+\Delta z), \bar{S}(z_0+\Delta z)\right)/\rho\left(\bar{p}(z_0+\Delta z), \bar{S}(z_0)\right) - 1\right\} g \\
&= \frac{g}{\rho\left(\bar{p}(z_0), \bar{S}(z_0)\right)}\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}z}\Delta z
\end{aligned}$$

となる (最後の変形では Δz が微小であるとして Δz の一次項までをとった)．

さて, 状態方程式が

$$p = \rho R T$$

(T は絶対温度, R はその気体の気体定数) と表される理想気体において, さらに単位質量あたりの定圧比熱 C_p が一定とみなせる場合には

$$S = C_p \log\left(\frac{1}{\rho}p^{C_v/C_p}\right) + \text{定数}$$

と表されるから (ここに, C_v は定積比熱; 導出については各自で熱力学を復習すること),

$$S/C_p = \frac{C_v}{C_p}\log p - \log \rho$$

となるから, 理想気体に対する N^2 は,

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}z} = -g\left(\frac{\partial \log \rho}{\partial S}\right)_p \frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}z} = \frac{g}{C_p}\frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}z}$$

と表せる．さらに, 温位 θ というものを

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{R}{C_p}}$$

と導入すれば (ここに, p_0 はある基準圧力),

$$S = C_p \log\theta + \text{定数}$$

と表せられるから,

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}}\frac{\mathrm{d}\bar{\theta}}{\mathrm{d}z}$$

とも表せられる．ここに, $\bar{\theta}(z)$ は背景場の温位である．

補足 (理想気体のエントロピーの表式について)

　単位質量あたりの体積を V, 内部エネルギーを U とすると, 熱力学の第一法則より,

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V.$$

単位質量あたりの Gibbs の自由エネルギー G を

$$G = U + pV - TS$$

と導入すると,

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T$$

これより, Maxwell の関係式

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

を得る．これを用いると,

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p = \frac{C_p}{T}\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p$$

となるが, 単位質量の理想気体については

$$pV = RT$$

なので,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$

となるから,

$$\mathrm{d}S = \frac{C_p}{T}\mathrm{d}T - \frac{R}{p}\mathrm{d}p = C_p\mathrm{d}(\log T) - R\mathrm{d}(\log p)$$

従って, C_p が定数とみなせる場合には,

$$S = C_p \log\left(Tp^{-\frac{R}{C_p}}\right) + \text{定数} = C_p \log\left(\frac{p}{\rho}p^{-\frac{R}{C_p}}\right) + \text{定数} = C_p \log\left(\frac{1}{\rho}p^{\frac{C_v}{C_p}}\right) + \text{定数}$$

を得る．ところで,

$$\mathrm{d}S = C_p\mathrm{d}(\log T) - R\mathrm{d}(\log p) = C_p\mathrm{d}\left(\log\left(\frac{p}{\rho}\right)\right) - R\mathrm{d}(\log p) = -C_p\mathrm{d}(\log\rho) + C_v\mathrm{d}(\log p)$$

であるので, 実は C_p が定数とみなせないような理想気体についても

$$\left(\frac{\partial \log\rho}{\partial S}\right)_p = -\frac{1}{C_p}$$

は成立する．

　※補足: 浮力振動については, 気象学 I の講義資料 (kishougakuI-2w.pdf) も参照のこと (PandA の演習の資料のところに置いている).

課題 4-1

　サンプルプログラムの置き場所

https://www.gfd-dennou.org/arch/ishioka/db/sample/

手順

1. 上記の URL から, buoyancy.f90, buoyancy.py, buoyancy2.py をダウンロード.
2. buoyancy.f90 の内容を VSCode 等で確認した後, このプログラムを gfortran でコンパイルして実行. なお, このプログラムは, パーセルの運動に関する微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}z = -N^2 z$$

   を $N^2 = 0.0001$ についてオイラー法で時間発展するものである.
3. 上記がうまくいくと, buoyancy.dat というファイルができるので, これを読みこんで animation 表示を行う buoyancy.py, および, 変位の時間変化のグラフを表示する buoyancy2.py を python3 で実行してみよ.
4. Fortran プログラムを 4 次の Runge-Kutta 法を使うように書き換えて, オイラー法に比べて, 誤差が小さくなることなど確認せよ. また, $N^2 = -0.0001$ とすると, パーセルの運動が不安定化することも確認せよ.